第 27 卷 第 1 期
Vol. 27 No. 1

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 1 月
Jan. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 01-0035-06

一类 Lurie 时滞广义系统的时滞相关 H_∞ 控制

李圣涛[1], 刘小梅[2], 周玉成[3], 刘晓平[1], 井元伟[1]

(1. 东北大学 信息科学与工程学院，沈阳 110819；2. 东南大学 自动化学院, 南京 210096；3. 中国林业科学研究院 木材工业研究所，北京 100091)

摘 要: 研究一类 Lurie 时滞广义系统的 H_∞ 控制问题. 以矩阵不等式形式给出了保证闭环系统正则、无脉冲、全局一致渐近稳定且具有给定性能的时滞相关充分条件. 进一步, 以非凸约束下的线性矩阵不等式 (LMIs) 的可行解给出了状态反馈控制律设计方法. 仿真算例表明了所提出方法的有效性.

关键词: Lurie 系统；时滞广义系统；H_∞ 控制；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Delay-dependent H_∞ control for Lurie singular systems with time-delay

LI Sheng-tao[1], *LIU Xiao-mei*[2], *ZHOU Yu-cheng*[3], *LIU Xiao-ping*[1], *JING Yuan-wei*[1]

(1. College of Information Science and Technology，Northeastern University，Shenyang 110819，China；2. College of Automation，Southeast University，Nanjing 210096，China；3. Research Institute of Wood Industry，Chinese Academy of Forestry，Beijing 100091，China. Correspondent：LI Sheng-tao，E-mail：shengtaoli1985@163.com)

Abstract: The problem of delay-dependent H_∞ control for Lurie singular systems with state-delay is investigated. Delay-dependent sufficient condition is obtained in terms of matrix inequalities for ensuring the resultant closed-loop systems of regularity, absence of impulses, global uniform asymptotical stability and a prescribed H_∞ performance level. Further more, the state feedback H_∞ control law is given in terms of the feasible solutions of linear matrix inequalities(LMIs) under the non-convex constraints. A numerical example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: Lurie systems；singular systems with time-delay；H_∞ control；linear matrix inequalities

1 引 言

广义系统最早由 Rosenbrock[1]在讨论复杂的电网络系统时提出. 此类系统由微分 (差分) 方程描述的慢变子系统以及由代数方程描述的快变子系统组成, 它比正则系统能更精确地描述实际的动态系统. 时滞广义系统既含有时滞, 又有代数约束, 普遍存在于各类实际系统中, 具有较强的应用背景[2].

另一方面, Lurie 系统是一类重要的控制系统, 其绝对稳定性研究已取得了丰硕成果[3-8]. 随着研究的不断深入, 一些学者对 Lurie 时滞广义系统绝对稳定性问题进行了研究[9-10]. 然而, 对于 Lurie 时滞广义系统的 H_∞ 控制问题却鲜有涉及.

相对于时滞无关稳定条件而言, 时滞相关稳定条件因考虑了系统的时滞信息, 所得结果具有更低的保守性而受到广泛关注[11-13]. 目前时滞相关条件都是基于交叉项界定技术、模型变换及 Lyapunov-Krasovskii 泛函的适当选取技巧. 最近又出现了一些新思想[7,14]. 文献 [7] 经研究得到了一般 Lurie 时滞系统的绝对稳定性, 但文中使用了不等式放缩技术. [10]推广了[7]的结论, 研究了一般 Lurie 时滞广义系统的绝对稳定性, 同样使用了不等式放缩技巧, 且其方法不能处理控制器设计问题. [15] 研究了 Lurie 时滞广义系统的 H_∞ 控制, 但得到的是时滞无关条件, 且在证明过程中对矩阵作了可逆假设. 可见, 此类系统的时滞相关 H_∞ 控制研究仍有很大的改进空间.

本文没有采用交叉项界定和不等式放缩技巧, 研究了一类 Lurie 时滞广义系统的 H_∞ 控制问题, 得到了使得系统绝对稳定且具有给定 H_∞ 性能的时滞相关充分条件, 进而给出了基于线性矩阵不等式的状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法. 数值算例表明了本文方法的有效性.

收稿日期: 2010-12-26；**修回日期:** 2011-05-16.

基金项目: 国家863计划项目(2010AA101702)；中央高校基本科研业务费项目(N100604019).

作者简介: 李圣涛(1985−), 男, 博士生, 从事奇异系统控制的研究；井元伟(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性大系统的分析与控制、复杂系统与复杂性科学等研究.

2 问题描述

考虑如下 Lurie 时滞广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d) + B_1 u(t) + \\ \qquad H_1\omega(t) + D\omega_1(t), \\ z(t) = Cx(t) + C_d x(t-d) + \\ \qquad B_2 u(t) + H_2\omega(t), \\ \omega_1(t) = -\varphi(t, z(t)), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-\bar{d}, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, \omega_1(t) \in R^q, z(t) \in R^l$ 分别为系统 (1) 的状态、控制输入、输入和被控输出向量; $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ 为平方可积的扰动输入向量; d 为系统时滞, 且满足 $0 < d \leqslant \bar{d}$; $E \in R^{n\times n}$ 为奇异矩阵, 假设 $\mathrm{rank}E = r \leqslant n$; $A, A_d, B_1, H_1, D, C, C_d, B_2, H_2$ 为具有适当维数的常数矩阵; $\phi(t)$ 为给定的初始向量值连续函数; $\varphi(t, z(t)) : [0, \infty) \times R^m \to R^m$ 为对 t 连续的非线性函数, 对 $z(t)$ 满足 Lipchitz 条件, $\varphi(t, 0) = 0$, 且对 $\forall t \geqslant 0, \forall z(t) \in R^m$ 满足以下扇形约束:

$$[\varphi(t, z(t)) - K_1 z(t)]^{\mathrm{T}}[\varphi(t, z(t)) - K_2 z(t)] \leqslant 0. \tag{2}$$

这里, K_1 和 K_2 为具有适当维数的常数矩阵, 且 $K = K_2 - K_1$ 为对称的正定矩阵. 通常这种非线性函数 $\varphi(t, z(t))$ 属于扇形区域 $[K_1, K_2]$.

首先, 引入以下定义.

定义 1[16] 1) 如果 $\det(sE - A) \neq 0$, 则矩阵对 (E, A) 是正则的; 2) 如果 $\deg(\det(sE - A)) = \mathrm{rank}E$, 则矩阵对 (E, A) 无脉冲.

定义 2[16] 1) 广义系统 (1) 是正则的、无脉冲的, 即广义系统 (1) 的解在 $[0, \infty)$ 上是唯一的、无脉冲的, 如果矩阵对 (E, A) 是正则的、无脉冲的; 2) 广义系统 (1) 对于所有属于扇形区域 $[K_1, K_2]$ 的非线性 $\varphi(t, z(t))$ 全局一致渐近稳定, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\varepsilon) > 0$ 使得对于任意的平滑初始条件 $\phi(t)$, 当 $\sup\limits_{-\bar{d}\leqslant t\leqslant 0} \|\phi(t)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$ 时, 系统 (1) 的解满足 $x(t) \leqslant \varepsilon,\ \forall t \geqslant 0$, 且 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

定义 3[16] Lurie 时滞广义系统 (1) 在 $[K_1, K_2]$ 内是绝对稳定的, 如果当 $u(t) = 0$ 且 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$ 时, Lurie 时滞广义系统是正则的、无脉冲的, 且对于所有属于扇形区域 $[K_1, K_2]$ 的非线性 $\varphi(t, z(t))$ 全局一致渐近稳定.

本文的目的是: 对于给定的 $\gamma > 0$, 设计系统 (1) 的状态反馈 H_∞ 控制器

$$u(t) = Lx(t),\ L \in R^{m\times n}, \tag{3}$$

使得闭环系统

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + A_d x(t-d) + \\ \qquad H_1\omega(t) + D\omega_1(t), \\ z(t) = \tilde{C}x(t) + C_d x(t-d) + H_2\omega(t), \\ \omega_1(t) = -\varphi(t, z(t)), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-\bar{d}, 0], \end{cases} \tag{4}$$

满足:

1) 外界扰动 $\omega(t) = 0$ 时, 系统 (4) 在 $[K_1, K_2]$ 内绝对稳定;

2) 零初始条件下, 系统 (4) 具有给定 H_∞ 性能, 即对于所有非零 $\omega(t) \in L_2[0, \infty)$, 有 $\|z(t)\|_2 \leqslant \gamma\|\omega(t)\|_2$, 这里 $\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t$.

式 (4) 中, $\tilde{A} = (A + B_1 L), \tilde{C} = (C + B_2 L)$.

引理 1[16] 考虑函数 $\varphi(t) : R^+ \to R$, 如果函数 $\dot{\varphi}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 内有界, 即存在一个标量 $\alpha > 0$, 对于所有 $t \in [0, \infty)$, 有 $|\dot{\varphi}(t)| \leqslant \alpha$, 则函数 $\varphi(t)$ 在 $[0, \infty)$ 内是一致连续的.

引理 2[17] 考虑函数 $\varphi(t) : R^+ \to R$, 如果函数 $\dot{\varphi}(t)$ 在 $[0, \infty)$ 内是一致连续的且 $\int_0^\infty \varphi(s)\mathrm{d}s < \infty$, 则 $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

3 主要结果

首先考虑非线性函数 $\varphi(t, z(t))$ 属于扇形区域 $[0, K]$ 的情形, 即满足

$$\varphi^{\mathrm{T}}(t, z(t))[\varphi(t, z(t)) - Kz(t)] \leqslant 0, \tag{5}$$

有如下结论:

定理 1 对于给定标量 $\gamma > 0$ 和 $\bar{d} > 0$, 如果存在适当维数的矩阵 L, 正定矩阵 $P > 0,\ Q > 0, Z > 0$ 以及矩阵 $S, Y_i (i = 1, \cdots, 4)$ 和常数 $\varepsilon \geqslant 0$, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\varSigma = \begin{bmatrix} \varSigma_1 & \varSigma_2 & \varSigma_3 & \varSigma_4 \\ * & -\bar{d}Z & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{d}Z & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{6}$$

其中

$$\varSigma_1 = \begin{bmatrix} \varSigma_{11} & \varSigma_{12} & \varSigma_{13} & \varSigma_{14} \\ * & \varSigma_{22} & \varSigma_{23} & -E^{\mathrm{T}}Y_4^{\mathrm{T}} \\ * & * & -2\varepsilon I & -\varepsilon K H_2 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\varSigma_2 = \bar{d}Y,\ \varSigma_3 = \bar{d}\widehat{A}Z,\ \varSigma_4 = [\ \tilde{C}\ \ C_d\ \ 0\ \ H_2\ ],$$

$$\varSigma_{11} = (PE + RS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}(PE + RS^{\mathrm{T}}) + \\ Q + Y_1 E + E^{\mathrm{T}}Y_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varSigma_{12} = (PE + RS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A_d - Y_1 E + E^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varSigma_{13} = (PE + RS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}D - \varepsilon\tilde{C}^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}} + E^{\mathrm{T}}Y_3^{\mathrm{T}},$$

$$\Sigma_{14} = (PE + RS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} H_1 + E^{\mathrm{T}} Y_4^{\mathrm{T}},$$
$$\Sigma_{22} = -Q - Y_2 E - E^{\mathrm{T}} Y_2^{\mathrm{T}},$$
$$\Sigma_{23} = -\varepsilon C_d^{\mathrm{T}} K^{\mathrm{T}} - E^{\mathrm{T}} Y_3^{\mathrm{T}},$$
$$Y = [\ Y_1^{\mathrm{T}}\ \ Y_2^{\mathrm{T}}\ \ Y_3^{\mathrm{T}}\ \ Y_4^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}},$$
$$\widehat{A} = [\ \tilde{A}\ \ A_d\ \ D\ \ H_1\ ],$$

$R(R \in R^{n\times(n-r)})$ 是任意满足 $E^{\mathrm{T}}R = 0$ 的矩阵, 则 Lurie 时滞广义系统 (4) 在 $[0, K]$ 内绝对稳定且具有 H_∞ 性能界 γ.

证明 首先证明系统 (4) 在 $[0, K]$ 内绝对稳定. 由 $\mathrm{rank}E = r \leqslant n$ 知, 存在两可逆矩阵 $M, N \in R^{n\times n}$, 有 $\bar{E} = MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 因此可取 $R = M^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\Phi} \end{bmatrix}$, 其中 $\bar{\Phi}$ 为属于 $R^{(n-r)\times(n-r)}$ 的任意非奇异矩阵. 按相同结构分块, 定义

$$\bar{A} = M\tilde{A}N = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\bar{P} = M^{-\mathrm{T}} P M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & \bar{P}_{12} \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\bar{Z} = M^{-\mathrm{T}} Z M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\bar{Y}_1 = N^{\mathrm{T}} Y_1 M^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix},$$
$$\bar{S} = N^{\mathrm{T}} S = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{21} \end{bmatrix},\ \bar{R} = M^{-\mathrm{T}} R = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\Phi} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

由 $\Sigma_{11} < 0, Q > 0$ 知, $\psi = (PE + RS^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}(PE + RS^{\mathrm{T}}) + Y_1E + E^{\mathrm{T}}Y_1^{\mathrm{T}} < 0$. 对 ψ 作合同变换, 不等式两边同时左乘 N^{T} 和右乘其转置, 得

$$\begin{aligned}\bar{\psi} = N^{\mathrm{T}}\psi N = (\bar{E}\bar{P} + \bar{S}\bar{R}^{\mathrm{T}})\bar{A} + \\ \bar{A}^{\mathrm{T}}(\bar{P}\bar{E} + \bar{R}\bar{S}^{\mathrm{T}}) + \bar{Y}_1\bar{E} + \bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{Y}_1^{\mathrm{T}} = \\ \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{11} & \bar{\psi}_{12} \\ * & \bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}\bar{\Phi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}} + \bar{S}_{21}\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22} \end{bmatrix} < 0.\end{aligned} \tag{8}$$

故有 $\bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}\bar{\Phi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}} + \bar{S}_{21}\bar{\Phi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22} < 0$, 所以 $\bar{A}_{22}$ 非奇异. 由

$$\begin{aligned}&\det(sE - \tilde{A}) = \\ &\det(M^{-T})\det(s\bar{E} - \bar{A})\det(N^{-1}) = \\ &\det(M^{-T})\det(-\bar{A}_{22})\det(sI_r - \\ &(\bar{A}_{11} - \bar{A}_{12}\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}))\det(N^{-1})\end{aligned}$$

知, $\det(sE - \tilde{A}) \neq 0$, $\deg(\det(sE - \tilde{A})) = r = \mathrm{rank}E$, 因此矩阵对 $(E, \tilde{A})$ 正则、无脉冲. 由定义 2 知, 系统 (4) 正则、无脉冲.

然后证明系统 (4) 全局一致渐近稳定. 由式 (4) 和 (5), 有

$$\begin{aligned}&\omega_1^{\mathrm{T}}(t)\omega_1(t) + \omega_1^{\mathrm{T}}(t)K\times \\ &[\tilde{C}x(t) + C_dx(t-d) + H_2\omega(t)] \leqslant 0.\end{aligned} \tag{9}$$

构造如下形式的 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$\begin{aligned}V(x_t) = x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PEx(t) + \int_{t-d}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s + \\ \int_{-d}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{10}$$

其中: $P > 0, Q > 0, Z > 0$ 为待定矩阵.

计算 $V(x_t)$ 对时间 t 的导数, 结合自由权矩阵方法, 应用 S-procedure[18], 并结合式 (9), 整理得

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x_t) = \\ &2x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PE\dot{x}(t) + x^{T}(t)Qx(t) - \\ &x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d) + d\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{T}ZE\dot{x}(t) - \\ &\int_{t-d}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\mathrm{d}s \leqslant \\ &x^{\mathrm{T}}(t)(E^{\mathrm{T}}P\tilde{A} + \tilde{A}^{\mathrm{T}}PE + Q)x(t) + \\ &2x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}P(A_dx(t-d) + H_1\omega(t) + D\omega_1(t)) - \\ &x^{\mathrm{T}}(t-d)Qx(t-d) + \bar{d}\xi^{\mathrm{T}}(t)\widehat{A}^{\mathrm{T}}Z\widehat{A}\xi(t) - \\ &\int_{t-d}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\mathrm{d}s + 2\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}RS^{\mathrm{T}}x(t) + \\ &2\xi^{\mathrm{T}}(t)Y\Big[Ex(t) - Ex(t-d) - \int_{t-d}^{t}E\dot{x}(s)\mathrm{d}s\Big] - \\ &2\varepsilon\omega_1^{\mathrm{T}}(t)\omega_1(t) - 2\varepsilon\omega_1^{\mathrm{T}}(t)K\times \\ &[\tilde{C}x(t) + C_dx(t-d) + H_2\omega(t)] = \\ &\xi^{\mathrm{T}}(t)[\Sigma_1 + \bar{d}YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}} + \bar{d}\widehat{A}^{\mathrm{T}}Z\widehat{A} + \Sigma_4\Sigma_4^{\mathrm{T}}]\xi(t) + \\ &\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)\ - \int_{t-d}^{t}[\xi^{\mathrm{T}}(t)Y + \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}Z]\times \\ &Z^{-1}[Y^{\mathrm{T}}\xi(t) + ZE\dot{x}(s)]\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi^{\mathrm{T}}(t) = [\ x^{\mathrm{T}}(t)\ \ x^{\mathrm{T}}(t-d)\ \ \omega_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ \omega^{\mathrm{T}}(t)\ ] = \\ [\ \zeta^{\mathrm{T}}(t)\ \ \omega^{\mathrm{T}}(t)\ ].\end{aligned}$$

由上可知, 使系统 (4) 绝对稳定的一个充分条件是: 存在一个标量 $\varepsilon \geqslant 0$, 使得当 $\omega(t) = 0$ 时, 有 $\dot{V}(x_t) \leqslant \xi^{\mathrm{T}}(t)[\Sigma_1 + \bar{d}YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}} + \bar{d}\widehat{A}^{\mathrm{T}}Z\widehat{A} + \Sigma_4\Sigma_4^{\mathrm{T}}]\xi(t) < 0$, 对所有满足扇形区域 (2) 的 $\xi(t) \neq 0$ 成立. 由 Schur 补引理, $Z > 0$ 及式 (6) 易知, 当 $\omega(t) = 0$ 时, 有 $V(x_t)$ 负定成立. 因此, 有

$$\begin{aligned}&\lambda_1\|x(t)\|^2 - V(x_0) \leqslant \\ &x^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}PEx(t) - V(x_0) \leqslant \\ &V(x_t) - V(x_0) = \\ &\int_0^t \dot{V}(x_s)\mathrm{d}s \leqslant -\lambda_2\int_0^t \|x(s)\|^2\mathrm{d}s < 0.\end{aligned}$$

其中

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(E^{\mathrm{T}}PE) > 0,$$
$$\lambda_2 = -\lambda_{\max}(\Sigma_{11} + \bar{d}Y_1Z^{-1}Y_1^{\mathrm{T}} + \bar{d}\tilde{A}^{\mathrm{T}}Z\tilde{A}) > 0.$$

因此, $\lambda_1\|x(t)\|^2+\lambda_2\int_0^t\|x(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant V(x_0)$. 进一步有

$$0<\|x(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}V(x_0),\ 0<\|x(t)\|^2\leqslant\frac{1}{\lambda_1}V(x_0),$$

所以 $0<\|x(t)\|^2\leqslant\dfrac{1}{\lambda_1}V(x_0)$ 有界. 类似地, $\|\dot{x}(t)\|$ 有界. 由引理1知, $\|\dot{x}(t)\|^2$ 一致连续, 由 $\int_0^t\|x(s)\|^2\mathrm{d}s$ 有界并结合引理2知, $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$. 按照定义2, 广义系统(1)对于所有属于扇形区域 $[K_1,K_2]$ 的非线性 $\varphi(t,z(t))$ 全局一致渐近稳定. 因此, 由定义3知, 当外界扰动 $\omega(t)=0$ 时, 闭环系统(4)在 $[0,K]$ 内绝对稳定.

最后证明系统(4)具有 H_∞ 性能 γ. 在零初始条件下, 对于给定 $\gamma>0$, 引入泛函

$$J(t)=\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)]\mathrm{d}t,$$

将不等式(11)代入该泛函被积函数中, 得到

$$J\leqslant\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2\omega^{\mathrm{T}}(t)\omega(t)+\dot{V}(x_t)]\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^\infty\xi^{\mathrm{T}}(t)[\varSigma_1+\bar{d}YZ^{-1}Y^{\mathrm{T}}+\bar{d}\widehat{A}^{\mathrm{T}}Z\widehat{A}+\varSigma_4\varSigma_4^{\mathrm{T}}]\xi(t)\mathrm{d}t.$$

根据Schur补引理, 由式(6)有 $J<0$, 即 $\|z(t)\|_2^2\leqslant\gamma^2\|\omega(t)\|_2^2$. 综上结论成立. □

注1 在定理1中, 若只考虑系统(4)的绝对稳定性, 令 $Y_1=-\dfrac{1}{2}E^{\mathrm{T}}Z$, 即得文献[10]的结论.

定理2 对于给定标量 $\gamma>0$ 和 $\bar{d}>0$, 如果正定矩阵 $\bar{Q}>0,\bar{Z}>0,Z_1>0$ 以及矩阵 $\bar{Y}_i=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{i11}&0\\\bar{Y}_{i21}&0\end{bmatrix}(i=1,\cdots,4)$, $\bar{L}$ 和非奇异矩阵 $\bar{\varPi}$ 及常数 $\varepsilon\geqslant0$, 使得

$$\bar{\varPi}\bar{Z}^{-1}\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}=Z_1\tag{12}$$

以及如下线性矩阵不等式成立:

$$\varOmega=\begin{bmatrix}\varOmega_1&\varOmega_2&\varOmega_3&\varOmega_4\\ *&-\bar{d}\bar{Z}&0&0\\ *&*&-\bar{d}Z_1&0\\ *&*&*&-I\end{bmatrix}<0.\tag{13}$$

其中

$$\varOmega_1=\begin{bmatrix}\varOmega_{11}&\varOmega_{12}&\varOmega_{13}&H_1+\bar{Y}_4^{\mathrm{T}}\\ *&\varOmega_{22}&\varOmega_{23}&-\bar{Y}_4^{\mathrm{T}}\\ *&*&-2\varepsilon I&-\varepsilon KH_2\\ *&*&*&-\gamma^2I\end{bmatrix},$$

$$\varOmega_2=\bar{d}\bar{Y},\quad\varOmega_3=\bar{d}\begin{bmatrix}(A\bar{\varPi}+B_1\bar{L})^{\mathrm{T}}\\(A_d\bar{\varPi})^{\mathrm{T}}\\D^{\mathrm{T}}\\H_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$\varOmega_4=[\,(C\bar{\varPi}+B_2\bar{L})\ \ (C_d\bar{\varPi})\ \ 0\ \ H_2\,]^{\mathrm{T}},$$
$$Y=[\,\bar{Y}_1^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_2^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_3^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_4^{\mathrm{T}}\,]^{\mathrm{T}},$$
$$\varOmega_{11}=(A\bar{\varPi}+B_1\bar{L})+(A\bar{\varPi}+B_1\bar{L})^{\mathrm{T}}+\bar{Q}+\bar{Y}_1+\bar{Y}_1^{\mathrm{T}},$$
$$\varOmega_{12}=A_d\bar{\varPi}-\bar{Y}_1+\bar{Y}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\varOmega_{13}=D-\varepsilon(C\bar{\varPi}+B_2\bar{L})^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}+\bar{Y}_3^{\mathrm{T}},$$
$$\varOmega_{22}=-Q-\bar{Y}_2-\bar{Y}_2^{\mathrm{T}},$$
$$\varOmega_{23}=-\varepsilon\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}C_d^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}-\bar{Y}_3^{\mathrm{T}},$$

$R(R\in R^{n\times(n-r)})$ 是任意满足 $E^{\mathrm{T}}R=0$ 的矩阵. 则 $u(t)=\bar{L}\bar{\varPi}^{-1}x(t)$ 是Lurie时滞广义系统(1)在扇形区域 $[0,K]$ 内的一个状态反馈 H_∞ 控制律.

证明 从定理1的证明易知式(8)成立, 因此 $\bar{A}_{22}^{\mathrm{T}}\bar{\varPhi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}}+\bar{S}_{21}\bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\bar{A}_{22}<0$, 故 $\bar{\varPhi}\bar{S}_{21}^{\mathrm{T}}$ 非奇异. 由 $\bar{E}\bar{P}+\bar{S}\bar{R}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\bar{P}_{11}&\bar{P}_{12}+\bar{S}_{11}\bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\\0&\bar{S}_{21}\bar{\varPhi}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 知, $EP+SR^{\mathrm{T}}=M^{-1}\times(\bar{E}\bar{P}+\bar{S}\bar{R}^{\mathrm{T}})M$ 非奇异. 定义 $\varPi=PE+RS^{\mathrm{T}},\bar{\varPi}=\varPi^{-1}$, 对式(6)左乘 $\mathrm{diag}(\ \bar{\varPi}^{\mathrm{T}}\ \ \bar{\varPi}^{\mathrm{T}}\ \ I\ \ I\ \ \bar{\varPi}^{\mathrm{T}}\ \ Z^{-1}\ \ I\ )$ 和右乘其转置, 并定义 $\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}Q\bar{\varPi}=\bar{Q}$, $\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}Z\bar{\varPi}=\bar{Z}$, $Z_1=Z^{-1}$, $\bar{L}=B_1L$, $\bar{Y}_i=\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}Y_iE\bar{\varPi}$, $\bar{Y}_j=Y_jE\bar{\varPi}$ $(i=1,2;\ j=3,4)$. 结合式(7), 由式(6)即可得知结论成立. □

针对非线性函数 $\varphi(t,z(t))$ 在扇形区域 $[K_1,K_2]$ 中的情形, 通过应用反馈环的变换, 可得系统(1)在扇形区域 $[K_1,K_2]$ 内的绝对稳定性等价于如下系统在扇形区域 $[0,K_2-K_1]$ 内的绝对稳定性:

$$\begin{cases}E\dot{x}(t)=(A-DK_1C)x(t)+(A_d-DK_1C_d)\times\\ \qquad x(t-d)+(B_1-DK_1B_2)u(t)+\\ \qquad (H_1-DK_1H_2)\omega(t)+D\omega_1(t),\\ z(t)=Cx(t)+C_dx(t-d)+B_2u(t)+H_2\omega(t),\\ \omega_1(t)=-\varphi(t,z(t)),\\ x(t)=\phi(t),\ t\in[-\bar{d},0].\end{cases}\tag{14}$$

因此, 由定理2可得如下定理:

定理3 对于给定标量 $\gamma>0$ 和 $\bar{d}>0$, 如果正定矩阵 $\bar{Q}>0,\bar{Z}>0,Z_1>0$ 以及矩阵 $\bar{Y}_i=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{i11}&0\\\bar{Y}_{i21}&0\end{bmatrix}(i=1,\cdots,4)$, $\bar{L}$ 和非奇异矩阵 $\bar{\varPi}$ 及常数 $\varepsilon\geqslant0$, 使得

$$\bar{\varPi}\bar{Z}^{-1}\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}=Z_1\tag{15}$$

以及如下线性矩阵不等式成立:

$$\varXi=\begin{bmatrix}\varXi_1&\varXi_2&\varXi_3&\varXi_4\\ *&-\bar{d}\bar{Z}&0&0\\ *&*&-\bar{d}Z_1&0\\ *&*&*&-I\end{bmatrix}<0,\tag{16}$$

则 $u(t)=\bar{L}\bar{\varPi}^{-1}x(t)$ 是Lurie时滞广义系统(1)在扇形区域 $[K_1,K_2]$ 内的一个状态反馈 H_∞ 控制律.

式(16)中

$$\varXi_1 = \begin{bmatrix} \varXi_{11} & \varXi_{12} & \varXi_{13} & \varXi_{14} \\ * & \varXi_{22} & \varXi_{23} & -\bar{Y}_4^{\mathrm{T}} \\ * & * & -2\varepsilon I & -\varepsilon(K_2-K_1)H_2 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\varXi_3 = \bar{d}\begin{bmatrix} ((A-DK_1C)\bar{\varPi}+(B_1-DK_1B_2)\bar{L})^{\mathrm{T}} \\ ((A_d-DK_1C_d)\bar{\varPi})^{\mathrm{T}} \\ D^{\mathrm{T}} \\ (H_1-DK_1H_2)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$\varXi_2 = \bar{d}\bar{Y},\ Y = [\ \bar{Y}_1^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_2^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_3^{\mathrm{T}}\ \ \bar{Y}_4^{\mathrm{T}}\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_4 = [\ (C\bar{\varPi}+B_2\bar{L})\ \ (C_d\bar{\varPi})\ \ 0\ \ H_2\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{11} = ((A-DK_1C)\bar{\varPi}+(B_1-DK_1B_2)\bar{L})+ ((A-DK_1C)\bar{\varPi}+(B_1-DK_1B_2)\bar{L})^{\mathrm{T}}+ \bar{Q}+\bar{Y}_1+\bar{Y}_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{12} = (A_d-DK_1C_d)\bar{\varPi}-\bar{Y}_1+\bar{Y}_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{13} = D-\varepsilon(C\bar{\varPi}+B_2\bar{L})^{\mathrm{T}}(K_2-K_1)^{\mathrm{T}}+\bar{Y}_3^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{14} = (H_1-DK_1H_2)+\bar{Y}_4^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{22} = -Q-\bar{Y}_2-\bar{Y}_2^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{23} = -\varepsilon\bar{\varPi}^{\mathrm{T}}C_d^{\mathrm{T}}(K_2-K_1)^{\mathrm{T}}-\bar{Y}_3^{\mathrm{T}},$$

$R(R\in R^{n\times(n-r)})$ 是任意满足 $E^{\mathrm{T}}R=0$ 的矩阵.

注2　对于线性矩阵不等式(16)在非凸约束(15)下的求解问题, 可利用调整参数法来求解[20].

4　数值算例

考虑Lurie时滞广义系统(1), 其中

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}-2&1\\1.5&-3\end{bmatrix},$$

$$A_d=\begin{bmatrix}0.5&0.2\\0.3&-0.4\end{bmatrix},\ B_1=\begin{bmatrix}-4&0.2\\0&3\end{bmatrix},$$

$$H_1=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.1\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0.4&0\\0&0.5\end{bmatrix},\ C_d=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.1\end{bmatrix},$$

$$B_2=\begin{bmatrix}-3&0.1\\0&2\end{bmatrix},\ H_1=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.2\end{bmatrix},$$

$$K_1=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.2\end{bmatrix},\ K_2=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.5\end{bmatrix}.$$

针对本例选取 $R=[\ 0\ \ 1\ ]^{\mathrm{T}}$. 对于给定的 $\gamma=1>0$, 选取 $\varepsilon=0.2>0$. 根据定理3, 利用Matlab软件中的LMI工具箱可求得使系统(1)绝对稳定的相应最大可允许时滞上界 $\bar{d}=240.4290$. 如果已知时滞上界 $\bar{d}=1.8$, 选取 $\varepsilon=0.2>0$, 相应的最小可允许抑制度 $\gamma=0.0232$. 对于不同的 $\bar{d}$, 可类似求取相应的最小可允许抑制度 γ; 对于不同的 γ, 可求取相应的最大可允许的时滞上界 $\bar{d}$.

对于给定 $\gamma=1>0, \bar{d}=1.8>0$, 选取 $\varepsilon=0.2>0$, 求解上述系统 H_∞ 控制问题, 可得系统(1)的一个状态反馈 H_∞ 控制律为

$$u(t)=\begin{bmatrix}0.2927&0.0506\\-0.2026&-0.0033\end{bmatrix}x(t).$$

选择连续初始值函数为 $\phi(t)=[\ -1\ \ 1\ ]^{\mathrm{T}}, t\in[\ -1.8\ \ 0\ ]$ 时, 图1给出了上述控制律曲线; 图2为在上述控制律下相应的闭环系统的状态轨迹曲线图. 从图2可见, 闭环系统状态渐近地趋于零, 由此可知系统是渐近稳定的.

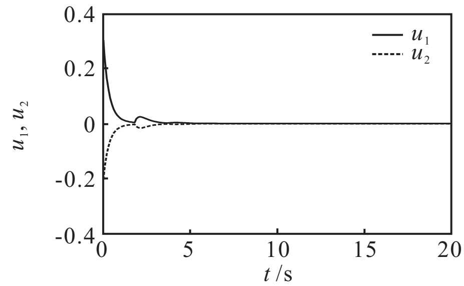

图1　控制律曲线

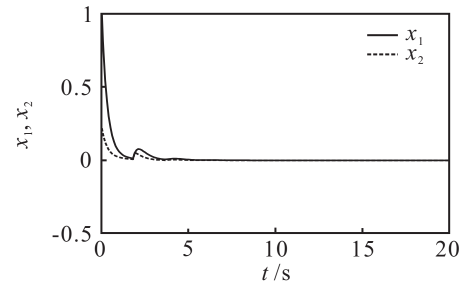

图2　闭环系统的状态轨迹

5　结　论

针对一类状态常时滞Lurie广义系统, 基于Lyapunov稳定性定理和线性矩阵不等式, 本文不采用模型变换方法和交叉项界定技巧, 给出了状态反馈 H_∞ 控制器存在的时滞相关条件及设计方法. 仿真算例表明了该方法的有效性. 本文的结论很容易推广至不确定、多时滞、时变时滞等情形.

参考文献(References)

[1] Rosenbroek H H. Structural properties of linear dynamical systems[J]. Int J of Control, 1974, 20(2): 191-202.

[2] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[3] Popov V M. Absolute stability of nonlinear systems of automatic control[J]. Automation and Remote Control, 1962, 22(8): 857-875.

[4] 俞立. 一类时滞系统的绝对稳定性问题研究[J]. 自动化学报, 2003, 29(5): 780-784.

(Yu L. On the absolute stability of a class of time-delay systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 780-784.)

[5] Liao X X, Yu P. Sufficient and necessary conditions for absolute stability of time-delayed Lurie control systems[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323(2): 876-890.

[6] 吴敏, 冯智勇, 何勇. 基于增广 Lyapunov 泛函的 Lurie 时滞系统的绝对稳定性[J]. 自动化学报, 2008, 34(8): 1003-1007.
(Wu M, Feng Z Y, He Y. Absolute stability of Lurie systems with time-delay based on augmented Lyapunov functional[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(8): 1003-1007.)

[7] Han Q L. Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity[J]. Automatica, 2005, 41(12): 2171-2176.

[8] Yu L, Han Q L, Yu S, et al. Delay-dependent conditions for robust absolute stability of uncertain time-delay systems[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii, 2003: 6033-6037.

[9] He Y, Wu M. Absolute stability for multiple delay general Lur'e control systems with multiple nonlinearities[J]. J of Computational and Applied Mathematics, 2003, 159(2): 241-248.

[10] Wang H J, Xue A K, Lu R Q. Absolute stability criteria for a class of nonlinear singular systems[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70(2): 621-630.

[11] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust control for uncertain systems with a state-delay[J]. Automatica, 2004, 40(1): 65-72.

[12] Gao J F, Su H Y, Ji X F, et al. New delay-dependent absolute stability criteria for Lurie control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(10): 1275-1280.

[13] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and control: Constant and time-varying delays[J]. Int J of Control, 2003, 76(1): 48-60.

[14] He Y, Wang Q G, Lin C, et al. Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay[J]. Automatica, 2007, 43(2): 371-376.

[15] 鲁仁全, 黄文君, 苏宏业, 等. 一类不确定时滞奇异系统的鲁棒控制[J]. 自动化学报, 2004, 30(6): 920-927.
(Lu R Q, Huang W J, Su H Y, et al. Robust control for a class of uncertain Lurie singular systems with time-delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(6): 920-927.)

[16] Xu S Y, Dooren V, Stefan P, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

[17] Krstic M, Deng H. Stabilization of nonlinear uncertain systems[M]. London: Springer-Verlag, 1998.

[18] Boyd S, Ghaoui L E. Linear matrix inequalities in system and control theory[M]. Philadelphia, 1994.

[19] Khalil H K. Nonlinear systems[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[20] 郑敏, 费树岷. 区间变时滞不确定线性系统带记忆状态反馈控制[J]. 自动化学报, 2007, 33(11): 1211-1215.
(Zheng M, Fei S M. State feedback control with memory foe uncertain linear systems with internal time-varying delay[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(11): 1211-1215.)

(上接第34页)

[10] Veinott A F J R. Optimal policy for a multi-product, dynamic, nonstationary inventory problem[J]. Management Science, 1965, 12(3): 206-222.

[11] Topkis D M. Optimal ordering and rationing policies in a nonstationary dynamic inventory model with n demand classes[J]. Management Science, 1968, 15(3): 160-176.

[12] Deshpande V, Cohen M A, Donohue K. A threshold inventory rationing policy for service-differentiated demand classes[J]. Management Science, 2003, 49(6): 683-703.

[13] Arslan H, Graves S C, Roemer T A. A single-product inventory model for multiple demand classes[J]. Management Science, 2007, 53(9): 1486-1500.

[14] Ding Q, Kouvelis P, Milner J M. Dynamic pricing through discounts for optimizing multiple-class demand fulfillment[J]. Operations Research, 2006, 54(1): 169-183.

[15] Ding Q, Kouvelis P, Milner J M. Dynamic pricing for multiple class deterministic demand fulfillment[J]. IIE Trans, 2007, 39(11): 997-1013.

[16] Shumsky R A, Zhang F. Dynamic capacity man-agement with substitution[J]. Operations Research, 2009, 57(3): 671-684.

[17] Kleijn M J, Dekker R. An overview of inventory systems with several demand classes[R]. Rotterdam: Erasmus University, 1998.