第 26 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2011 年 12 月
Vol. 26 No. 12 Control and Decision Dec. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 12-1865-07

考虑有限字长影响的离散时间模糊系统的非脆弱 H_∞ 滤波器设计

杨晓芳[1,2], 杨 维[1,2], 刘建昌[1]

(1. 东北大学 信息科学与工程学院，沈阳 110819；2. 本溪钢铁集团有限责任公司，辽宁 本溪 117000)

摘 要: 研究了受加性增益变量影响的离散时间模糊系统的非脆弱 H_∞ 滤波问题. 该加性增益反映了滤波器实际执行过程中有限字长的影响. 模糊性质的引入增加了滤波器设计的复杂性, 使问题变得更具有挑战性. 采用结构的顶点分离器方法解决该问题, 从而提出了基于线性矩阵不等式的模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计的充分条件. 该设计结果保证误差系统渐近稳定的同时具有指定的 H_∞ 性能指标. 最后通过一个例子验证了所提出方法的有效性.

关键词: 模糊系统；非脆弱；区间型增益变量；线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Non-fragile H_∞ filter design for fuzzy discrete-time systems with FWL consideration

YANG Xiao-fang[1,2], *YANG Wei*[1,2], *LIU Jian-chang*[1]

(1. College of Information Science and Engineering，Northeastern University，Shenyang 110819，China；2. Benxi Iron & Steel Group Co Ltd，Benxi 117000，China. Correspondent：LIU Jian-chang，E-mail：liujianchang@ise.neu.edu.cn)

Abstract: This paper considers the problem of non-fragile H_∞ filtering for fuzzy discrete-time systems with the consideration of the additive gain variations, which reflects the FWL effects in filter implementation. The introduction of the fuzzy property results in a more complex numerical computation problem. A notion of structured vertex separator is employed to approach the problem, and exploited to develop sufficient conditions for the non-fragile H_∞ filter design in terms of solutions to a set of linear matrix inequalities(LMIs). The design renders the augmented system asymptotically stable and guarantees the H_∞ attenuation level less than a prescribed level. A numerical example shows the effectivness of the proposed method.

Key words: fuzzy systems；non-fragile；interval gain variations；linear matrix inequality

1 引 言

Takagi-Sugeno (T-S) 模糊模型能够无限地逼近广泛的一类非线性系统[1], 它是由一组局部线性子模型利用 IF-THEN 规则通过模糊隶属度函数光滑连接而成. 传统的线性系统控制技术能够应用于基于 T-S 模糊模型的非线性系统的各种控制问题, 其中包括稳定性分析和控制综合[2-3].

近年来, 关于 T-S 模糊模型的 H_∞ 控制和滤波问题越来越受到广泛的关注[2-5]. 但是上述工作都是在控制器或滤波器精确执行的假定下完成的. 然而, 许多研究结果表明, 滤波器执行过程依赖于不同的设计算法, 并且这些滤波器对其参数非常敏感[6]. 文献 [7] 通过大量例子表明, 在控制器的设计中, 非常小的控制器参数扰动便能导致闭环系统性能下降甚至不稳定. 因此, 如何设计滤波器或控制器使之对其参数摄动不敏感具有重要的意义.

近年来, 对于具有加性范数有界型控制器增益变量的情况, 人们应用黎卡提不等式方法分别得到了状态反馈[8]和输出反馈[9]的结果. 相应地, 文献 [10] 阐述了具有乘性增益变量的控制器设计结果; [6] 将这一方法推广到弹性卡尔曼滤波问题; [11] 考虑了一类连续时间系统具有范数有界型增益变量的弹性线性滤波问题. 由于范数有界型增益变量只能粗糙地刻画控制器或滤波器增益的不确定信息, 导致设计结果具有

收稿日期: 2010-09-02；**修回日期:** 2010-12-02.

作者简介: 杨晓芳(1964−), 男, 高级工程师, 博士生, 从事故障诊断、轧制过程自动化等研究；刘建昌(1960−), 男, 教授, 博士生导师, 从事故障诊断、控制与优化等研究.

一定的保守性. 相对而言, 区间有界型增益变量[12]能比范数有界型增益变量更精确地刻画不确定信息, 但是区间有界型增益变量导致设计条件中包含的线性矩阵不等式个数大大增加, 当系统维数高于3阶时便会引起数值计算问题. 对此, [13] 研究了具有区间型增益变量的非脆弱 H_∞ 滤波问题, 并提出了结构的顶点分离器的方法解决了这一数值计算问题. 然而上述结果都是针对线性系统, 对于非线性系统的具有区间型增益变量的非脆弱问题目前还没有相应的结果.

本文考虑非线性系统的具有区间型增益变量的非脆弱 H_∞ 滤波问题. 利用 T-S 模糊模型来逼近该非线性系统, 进而针对模糊离散时间系统, 考虑受有限字长影响的模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计问题. 采用文献 [13] 中提出的结构顶点分离器的方法, 给出基于线性矩阵不等式的模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计的充分条件. 设计的结果保证了误差系统渐近稳定并具有指定的 H_∞ 性能指标. 本文从理论上和数值仿真分别给出了所提出方法与已有方法的比较, 取得了满意的结果.

2 问题描述和预备知识

T-S 模糊系统是 IF-THEN 模糊规则描述, 该模型能够局部地描述非线性系统线性输入输出的关系. 离散时间模糊 T-S 系统具有如下形式:

$$\begin{aligned}
&\text{if } v_1 \text{ is } M_{s1},\ v_2 \text{ is } M_{s2},\ \cdots,\ v_t \text{ is } M_{st},\ \text{then}\\
&x(k+1) = A_s x(k) + B_{1s}\omega(k),\\
&z(k) = C_{1s}x(k),\\
&y(k) = C_{2s}x(k) + D_s\omega(k).
\end{aligned} \tag{1}$$

其中: $s = 1, 2, \cdots, u$, u 是模糊规则的数量; $v_l(k)(l = 1, 2, \cdots, t)$ 是前件变量并假设可测, t 是前件变量的个数; M_{sl} 是模糊集; $x(k) \in R^n$ 是状态; $y(k) \in R^p$ 是测量输出; $\omega(k) \in R^r$ 是扰动输入; $z(k) \in R^q$ 是调节输出; $A_s, B_{1s}, C_{1s}, C_{2s}$ 和 D_s 是适当维数的已知常阵. 利用标准的模糊推理方法, 即单点模糊化方法、乘积模糊推理方法以及加权平均解模糊方法, 可以得到如下的全局动态模型:

$$x(k+1) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))(A_s x(k) + B_{1s}\omega(k))}{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))},$$

$$z(k) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))(C_{1s}x(k))}{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))},$$

$$y(k) = \frac{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))(C_{2s}x(k) + D_i\omega(k))}{\sum\limits_{s=1}^{u} w_s(v(k))}. \tag{2}$$

其中

$$v(k) = [v_1(k) \quad v_2(k) \quad \cdots \quad v_t(k)]^{\mathrm{T}},$$

$$w_s(v(k)) = \prod_{j=1}^{t} M_{sj}(v_j(k)),$$

$M_{sj}(v_j(k))$ 是 $v_j(k)$ 属于模糊集合 M_{sj} 中的隶属度函数, 并具有如下性质:

$$\sum_{s=1}^{u} w_s(v(k)) > 0,\ w_s(v(k)) \geqslant 0,\ s = 1, \cdots, u. \tag{3}$$

进一步规范化隶属度函数, 得

$$\alpha_s(v(k)) = w_s(v(k)) \Big/ \sum_{s=1}^{u} w_s(v(k)),$$

则有

$$0 \leqslant \alpha_s(v(k)) \leqslant 1,\ \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(v(k)) = 1. \tag{4}$$

且 $\alpha(v(k)) = [\alpha_1(v(k)), \alpha_2(v(k)), \cdots, \alpha_u(v(k))]^{\mathrm{T}}$. 为方便描述, 记 $\alpha_s(k) = \alpha_s(v(k))$, $\alpha(k) = \alpha(v(k))$. 进而 T-S 模糊系统 (1) 可写为

$$\begin{aligned}
&x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B_1(\alpha)\omega(k),\\
&z(k) = C_1(\alpha)x(k)),\\
&y(k) = C_2(\alpha)x(k) + D(\alpha)\omega(k).
\end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
&A(\alpha) = \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(k)A_s,\ B_1(\alpha) = \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(k)B_{1s},\\
&C_1(\alpha) = \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(k)C_{1s},\ C_2(\alpha) = \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(k)C_{2s},\\
&D(\alpha) = \sum_{s=1}^{u} \alpha_s(k)D_s.
\end{aligned} \tag{6}$$

考虑如下模糊滤波器:

$$\begin{aligned}
&\xi(k+1) = (A_F(\alpha) + \Delta A_F(\alpha))\xi(k) + \\
&\qquad (B_F(\alpha) + \Delta B_F(\alpha))y(k),\\
&z_F(k) = (C_F(\alpha) + \Delta C_F(\alpha))\xi(k).
\end{aligned} \tag{7}$$

其中: $\xi(k) \in R^n$ 是滤波器状态, $z_F(k)$ 是 $z(k)$ 的估计, 且

$$A_F(\alpha) = \sum_{s=1}^{u}\sum_{t=1}^{u} \alpha_s\alpha_t(k)A_{Fst},$$

$$\Delta A_F(\alpha) = \sum_{s=1}^{u}\sum_{t=1}^{u} \alpha_s\alpha_t(k)\Delta A_{Fst},$$

$$B_F(\alpha) = \sum_{t=1}^{u} \alpha_t B_{Ft},$$

$$\Delta B_F(\alpha)=\sum_{t=1}^{u}\alpha_t\Delta B_{Ft},$$
$$C_F(\alpha)=\sum_{t=1}^{u}\alpha_t C_{Ft},$$
$$\Delta C_F(\alpha)=\sum_{t=1}^{u}\alpha_t\Delta C_{Ft}.\tag{8}$$

常数矩阵 A_{Fst},B_{Ft} 和 C_{Ft} 是需要设计的滤波器矩阵; $\Delta A_{Fst},\Delta B_{Ft}$ 和 ΔC_{Ft} 表示具有如下形式的加性区间型增益变量:

$$\begin{aligned}&\Delta A_{Fst}=[\delta_{aij}^{st}]_{n\times n},\ |\delta_{aij}^{st}|\leqslant\delta_a^t,\\&i,j=1,2,\cdots,n;\ s,t=1,2,\cdots,u.\\&\Delta B_{Ft}=[\delta_{bij}^{t}]_{n\times p},\ |\delta_{bij}^{t}|\leqslant\delta_a^t,\\&i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,p;\ s=1,2,\cdots,u.\\&\Delta C_{Ft}=[\delta_{cij}^{t}]_{q\times n},\ |\delta_{cij}^{t}|\leqslant\delta_a^t,\\&i=1,2,\cdots,q;\ j=1,2,\cdots,n;\ s=1,2,\cdots,u.\end{aligned}\tag{9}$$

令 $e_k\in R^n,h_k\in R^p$ 和 $g_k\in R^q$ 表示列向量, 且该列向量的第 k 个元素为 1, 其他元素为 0, 则模型 (9) 的增益变量可表示为

$$\Delta A_{Fst}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{aij}^{st}e_ie_j^{\mathrm T},$$
$$\Delta B_{Ft}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\delta_{bij}^{t}e_ih_j^{\mathrm T},$$
$$\Delta C_{Ft}=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\delta_{cij}^{t}g_ie_j^{\mathrm T}.$$

将滤波器 (7) 和 (5) 相结合, 得到如下滤波误差系统:

$$\begin{aligned}&x_e(k+1)=A_e(\alpha)x_e(k)+B_e(\alpha)\omega(k),\\&z_e(k)=C_e(\alpha)x_e(k).\end{aligned}\tag{10}$$

其中: $x_e(k)=[x(k)^{\mathrm T},\xi(k)^{\mathrm T}]^{\mathrm T}$, $z_e(k)=z(k)-z_F(k)$ 是估计误差, 且

$$A_e(\alpha)=\begin{bmatrix}A(\alpha)&0\\(B_F(\alpha)+\Delta B_F(\alpha))C_2(\alpha)&A_F(\alpha)+\Delta A_F(\alpha)\end{bmatrix},$$
$$B_e(\alpha)=\begin{bmatrix}B_1(\alpha)(\alpha)\\(B_F(\alpha)+\Delta B_F(\alpha))D(\alpha)\end{bmatrix},$$
$$C_e=[\,C_1(\alpha)\ \ -C_F(\alpha)-\Delta C_F(\alpha)\,].$$

误差系统 (2) 从 ω 到 z_e 的传递函数矩阵为

$$G_{z_e\omega}(z)=C_e(\alpha)(zI-A_e(\alpha))^{-1}B_e(\alpha).$$

本文所考虑的问题是模糊非脆弱 H_∞ 滤波问题. 即: 对于给定的正常数 γ, 设计受加性增益变量 (9) 影响的具有形式 (7) 的模糊滤波器, 使得模糊系统 (2) 渐近稳定且 $\|G_{z_e\omega}(z)\|<\gamma$.

3　模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计

本节将给出容忍加性增益变量的非脆弱 H_∞ 滤波器的基于线性矩阵不等式的设计方法, 并将所提出方法与已有方法进行比较.

3.1　非脆弱 H_∞ 滤波器设计方法

为便于叙述, 记

$$M_0(\Delta A_{Fst},\Delta B_{Ft},\Delta C_{Ft})=\begin{bmatrix}\Xi_1&\Xi_2&0&S^{\mathrm T}A_s&S^{\mathrm T}A_s&S^{\mathrm T}B_{1s}\\ *&\Xi_3&0&\Xi_{5st}&\Xi_{6st}&\Xi_{7st}\\ *&*&-I&\Xi_{4st}&C_{1s}&0\\ *&*&*&-\bar P_{11}&-\bar P_{12}&0\\ *&*&*&*&-\bar P_{22}&0\\ *&*&*&*&*&-\gamma^2I\end{bmatrix}.\tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Xi_1=\bar P_{11}-S-S^{\mathrm T},\\&\Xi_2=\bar P_{12}-S-S^{\mathrm T},\\&\Xi_3=\bar P_{22}-S-S^{\mathrm T}+N+N^{\mathrm T},\\&\Xi_{4st}=C_{1s}-C_{Ft}-\Delta C_{Ft},\\&\Xi_{5st}=(S-N)^{\mathrm T}A_s+F_{Bt}C_{2s}+\\&\qquad N^{\mathrm T}(\Delta B_{Ft}C_{2s}+\Delta A_{Fst})+F_{Ast},\\&\Xi_{6st}=(S-N)^{\mathrm T}A_s+F_{Bt}C_{2s}+N^{\mathrm T}\Delta B_{Ft}C_{2s},\\&\Xi_{7st}=(S-N)^{\mathrm T}B_{1s}+F_{Bt}D_s+N^{\mathrm T}\Delta B_{Ft}D_s.\end{aligned}\tag{12}$$

下面的定理给出了解决具有加性增益变量的非脆弱 H_∞ 滤波问题的充分条件.

定理 1　考虑系统 (1), $\gamma>0$ 和 $\delta_a>0$ 是给定的常数. 如果存在矩阵 $F_{Ast},F_{Bt},C_{Ft},S,N,\bar P_{12}$ 和 $\bar P_{11}>0,\bar P_{22}>0$, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{aligned}&M_0(\Delta A_{Fst},\Delta B_{Ft},\Delta C_{Ft})<0,\\&\delta_{aij}^{st},\delta_{bik}^{t},\delta_{clj}^{t}\in\{-\delta_a^t,\delta_a^t\},\\&i,j=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots,p;l=1,2,\cdots,q.\end{aligned}\tag{13}$$

则具有加性增益变量 (9) 和如下滤波器增益的滤波器 (7) 使得系统 (1) 渐近稳定且具有 H_∞ 性能指标 γ:

$$A_{Fst}=(N^{\mathrm T})^{-1}F_{Ast},\ B_{Ft}=(N^{\mathrm T})^{-1}F_{Bt},\ C_{Ft}=C_{Ft}.\tag{14}$$

证明　通过文献 [14] 中引理 3 可知, 使得系统 (2) 渐近稳定且 $\|G_{z_e\omega}(z)\|<\gamma$ 的充分条件是: 存在具有结构

$$G=\begin{bmatrix}Y&N\\N&-N\end{bmatrix}$$

的矩阵 G 和一个对称正定矩阵

$$P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}^{\mathrm T}&P_{22}\end{bmatrix}>0,$$

使得

$$M_1 = \begin{bmatrix} P-G-G^{\mathrm{T}} & 0 & G^{\mathrm{T}}A_e(\alpha) & G^{\mathrm{T}}B_e(\alpha) \\ * & -I & C_e(\alpha) & 0 \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

对于所有满足式(9)的摄动 $\delta_{aij}^{st}, \delta_{bik}^{t}$ 和 δ_{clj}^{t} 成立.

记

$$S = Y + N,\ \varGamma_1 = \begin{bmatrix} I & I \\ I & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\varGamma}_1 = \mathrm{diag}\{\varGamma_1, I, \varGamma_1, I\},$$

$$\bar{P}_{11} = P_{11} + P_{12} + P_{12}^{\mathrm{T}} + P_{22},$$

$$\bar{P}_{12} = P_{11} + P_{12}^{\mathrm{T}},\ \bar{P}_{22} = P_{11}.$$

则式(15)等价于

$$M_2 = \bar{\varGamma}_1 M_1 \bar{\varGamma}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \varXi_1 & \varXi_2 & 0 & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}B_1(\alpha) \\ * & \varXi_3 & 0 & \varPi_1 & \varPi_2 & \varPi_3 \\ * & * & -I & \varPi_4 & C_1 & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{11} & -\bar{P}_{12} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{P}_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

对于所有满足式(9)的摄动 $\delta_{aij}^{st}, \delta_{bik}^{t}$ 和 δ_{clj}^{t} 成立. 其中: $\varXi_1, \varXi_2, \varXi_3, \varXi_4$ 由式(12)定义, 且

$$\varPi_1 = (S-N)^{\mathrm{T}}A(\alpha) + N^{\mathrm{T}}(B_F(\alpha)C_2(\alpha) + \Delta B_F(\alpha)C_2(\alpha) + A_F(\alpha) + \Delta A_F(\alpha)),$$

$$\varPi_2 = (S-N)^{\mathrm{T}}A(\alpha) + N^{\mathrm{T}}B_F(\alpha)C_2(\alpha) + N^{\mathrm{T}}\Delta B_F(\alpha)C_2(\alpha),$$

$$\varPi_3 = (S-N)^{\mathrm{T}}B_1(\alpha) + N^{\mathrm{T}}B_F(\alpha)D(\alpha) + N^{\mathrm{T}}\Delta B_F(\alpha)D(\alpha),$$

$$\varPi_4 = C_1(\alpha) - C_F(\alpha) - \Delta C_F(\alpha).$$

显然, M_2 对于每一个满足式(9)的 $\delta_i, \delta_i \in \{\delta_{aij}^{st}, \delta_{bik}^{t}, \delta_{clj}^{t}\}$ 都是凸的, 因此式(16)成立且等价于

$$M_3 = \begin{bmatrix} \varXi_1 & \varXi_2 & 0 & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}B_1(\alpha) \\ * & \varXi_3 & 0 & \varPi_1 & \varPi_2 & \varPi_3 \\ * & * & -I & \varPi_4 & C_1 & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{11} & -\bar{P}_{12} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{P}_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{17}$$

对于所有的 $\delta_{aij}^{st}, \delta_{bik}^{t}, \delta_{clj}^{t} \in \{-\delta_a^t, \delta_a^t\}(i,j = 1,2,\cdots,n;\ k = 1,2,\cdots,p;\ l = 1,2,\cdots,q)$ 成立.

另一方面, 将式(13)乘以 $\alpha_s\alpha_t$ 并累加起来, 可得

$$\begin{bmatrix} \varXi_1 & \varXi_2 & 0 & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}A(\alpha) & S^{\mathrm{T}}B_1(\alpha) \\ * & \varXi_3 & 0 & \bar{\varXi}_5 & \bar{\varXi}_6 & \bar{\varXi}_7 \\ * & * & -I & \varPi_4 & C_1(\alpha) & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{11} & -\bar{P}_{12} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{P}_{22} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\delta_{aij}^{st},\ \delta_{bik}^{t},\ \delta_{clj}^{t} \in \{-\delta_a^t, \delta_a^t\},$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n;\ k = 1,2,\cdots,p;\ l = 1,2,\cdots,q. \tag{18}$$

其中

$$\bar{\varXi}_5 = (S-N)^{\mathrm{T}}A(\alpha) + F_B(\alpha)C_2(\alpha) + N^{\mathrm{T}}(\Delta B_F(\alpha)C_2(\alpha) + \Delta A_F(\alpha)) + F_A(\alpha),$$

$$\bar{\varXi}_6 = (S-N)^{\mathrm{T}}A(\alpha) + F_B(\alpha)C_2(\alpha) + N^{\mathrm{T}}\Delta B_F(\alpha)C_2(\alpha),$$

$$\bar{\varXi}_7 = (S-N)^{\mathrm{T}}B_1(\alpha) + F_B(\alpha)D(\alpha) + N^{\mathrm{T}}\Delta B_F(\alpha)D(\alpha).$$

由式(13), (14)和Schur补引理可知, (16)的充分条件是(17), 即(15)的充分条件是(13). □

类似文献[13-14], 本文考虑的模糊非脆弱 H_∞ 滤波问题对于维数高于3维的系统同样存在数值计算问题. 为此, 给出如下方法.

记

$$F_{ai}^s = [f_{ai1}^s\ f_{ai2}^s\ \cdots\ f_{ail_a}^s],\ i = 1,2. \tag{19}$$

其中: $l_a = n^2 + np + nq$, 且

$$f_{a1k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ (N^{\mathrm{T}}e_i)^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$f_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ e_j^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ],$$

$$k = (i-1)n + j;\ i,j = 1,2,\cdots,n.$$

$$f_{a1k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ (N^{\mathrm{T}}e_i)^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$f_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ h_j^{\mathrm{T}}C_{2s}\ \ h_j^{\mathrm{T}}C_{2s}\ \ h_j^{\mathrm{T}}D_s\ ],$$

$$k = n^2 + (i-1)p + j;\ i = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,p.$$

$$f_{a1k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ -g_i^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}},$$

$$f_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ e_j^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ],$$

$$k = n^2 + np + (i-1)n + j;$$

$$i = 1,2,\cdots,q; j = 1,2,\cdots,n.$$

令 $k_0, k_1, \cdots, k_{s_a}$ 为满足

$$k_0 = 0 < k_1 < \cdots < k_{s_a} = l_a$$

的整数, 且矩阵 $\varTheta_{st}$ 具有如下结构:

$$\Theta_{st} = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}[\theta_{11}^{1st}\cdots\theta_{11}^{s_a st}] & \mathrm{diag}[\theta_{12}^{1st}\cdots\theta_{12}^{s_a st}] \\ \mathrm{diag}[\theta_{12}^{1st}\cdots\theta_{12}^{s_a st}]^{\mathrm{T}} & \mathrm{diag}[\theta_{22}^{1st}\cdots\theta_{22}^{s_a st}] \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $\theta_{11}^{ist}, \theta_{12}^{ist}, \theta_{22}^{ist} \in R^{(k_i-k_{i-1})\times(k_i-k_{i-1})}, i = 1, 2, \cdots, s_a$. 则可得到如下定理:

定理 2　考虑系统 (1), 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和 $\delta_a > 0$, 如果存在矩阵 $F_{Ast}, F_{Bt}, C_{Ft}, S, N, \bar{P}_{12}, \bar{P}_{11} > 0, \bar{P}_{22} > 0$ 和具有结构 (19) 的矩阵 Θ, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} Q_{st} & F_{a1}^s \\ (F_{a1}^s)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{a2}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Theta_{st} \begin{bmatrix} F_{a2}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \mathrm{diag}[\delta_{k_{i-1}+j}\cdots\delta_{k_i}] \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \theta_{11}^{ist} & \theta_{12}^{ist} \\ (\theta_{12}^{ist})^{\mathrm{T}} & \theta_{22}^{ist} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I \\ \mathrm{diag}[\delta_{k_{i-1}+j}^t\cdots\delta_{k_i}] \end{bmatrix} \geqslant 0,\ \ \delta_{k_{i-1}+j} \in \{-\delta_a^t, \delta_a^t\},$$

$$j = 1, 2, \cdots, k_i - k_{i-1},\ i = 1, 2, \cdots, s_a. \tag{22}$$

则具有加性增益变量 (9) 和滤波器增益 (14) 的滤波器 (7) 使得系统 (1) 渐近稳定且具有 H_∞ 性能指标 γ. 其中

$$Q_{st} = \begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2 & 0 & S^{\mathrm{T}}A_s \\ * & \Xi_3 & 0 & (S-N)^{\mathrm{T}}A_s + F_{Bt}C_{2s} + F_{Ast} \\ * & * & -I & C_{1s} - C_{Ft} \\ * & * & * & -\bar{P}_{11} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} S^{\mathrm{T}}A_s & S^{\mathrm{T}}B_{1s} \\ (S-N)^{\mathrm{T}}A_s + F_{Bt}C_{2s} & (S-N)^{\mathrm{T}}B_{1s} + F_{Bt}D_s \\ C_{1s} & 0 \\ -\bar{P}_{12} & 0 \\ -\bar{P}_{22} & 0 \\ * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

且 Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 由式 (12) 定义.

证明过程与文献 [14] 中的定理 2 证明类似, 此处省略.

3.2　与已有方法的比较

类似于文献 [6] 和 [11], 范数有界型增益变量 $\Delta A_{Fst}, \Delta B_{Ft}$ 和 ΔC_{Ft} 可由如下范数有界型不确定性界定:

$$\Delta A_{Fst} = M_a F_{1st}(t) E_a,\ \ \Delta B_{Ft} = M_b F_{2t}(t) E_b,$$
$$\Delta C_{Ft} = M_c F_{3t}(t) E_c. \tag{23}$$

其中

$$M_a = [M_{a1}\cdots M_{an^2}],\ E_a = [E_{a1}^{\mathrm{T}}\cdots E_{an^2}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$M_b = [M_{b1}\cdots M_{bnp}],\ E_b = [E_{b1}^{\mathrm{T}}\cdots E_{bnp}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$
$$M_c = [M_{c1}\cdots M_{cnq}],\ E_c = [E_{c1}^{\mathrm{T}}\cdots E_{cnq}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

且

$M_{ak} = e_i,\ E_{ak} = e_j^{\mathrm{T}},$

$k = (i-1)n + j,\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$

$M_{bk} = e_i,\ E_{bk} = h_j^{\mathrm{T}},$

$k = n^2 + (i-1)p + j,\ i = 1, 2, \cdots, n,\ j = 1, 2, \cdots, p.$

$M_{ck} = g_i,\ E_{ck} = e_j^{\mathrm{T}},$

$k = n^2 + np + (i-1)n + j,$

$i = 1, 2, \cdots, q,\ j = 1, 2, \cdots, n.$

此处 $F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t) \leqslant (\delta_a^t)^2 I (i = 1, 2, 3)$ 表示不确定参数, 这里 δ_a^t 与前面的定义相同. 记

$$\bar{F}_A = \bar{N}A_{Fst},\ \bar{F}_B = \bar{N}B_{Ft},$$

$$M_{a1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}M_a & \bar{N}M_b & 0 \\ 0 & 0 & -M_c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_{a2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_bC_{2s} & E_bC_{2s} & E_bD_s \\ 0 & 0 & 0 & E_c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

利用文献 [6, 11] 的方法, 该具有范数有界型增益变量的模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计问题可降为求解如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{st} & M_{a1} & \delta_a\varepsilon M_{a2}^{\mathrm{T}} \\ * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0, \tag{24}$$

且矩阵变量 $\bar{S} > 0, \bar{N} < 0$ 和纯量 $\varepsilon > 0$. 其中

$$\bar{Q}_{st} = \begin{bmatrix} -\bar{S} & -\bar{S} & 0 & \bar{S}A_s & \bar{S}A_s & \bar{S}B_{1s} \\ * & -\bar{S}+\bar{N} & 0 & Q_{1st} & Q_{2st} & Q_{3st} \\ * & * & -I & C_{1s}-C_{Ft} & C_{1s} & 0 \\ * & * & * & -\bar{S} & -\bar{S} & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{S}+\bar{N} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

且

$$Q_{1st} = (\bar{S} - \bar{N})A_s + \bar{F}_{Ast} + \bar{F}_{Bt}C_{2s},$$
$$Q_{2st} = (\bar{S} - \bar{N})A_s + \bar{F}_{Bt}C_{2s},$$
$$Q_{3st} = (\bar{S} - \bar{N})B_{1s} + \bar{F}_{Bt}D_s.$$

引理 1　考虑系统 (1), 如果条件 (24) 可行, 则定理 2 给出的模糊非脆弱滤波器设计条件也可行.

证明与文献 [14] 中的引理 5 证明类似, 省略.

3.3 H_∞ 性能指标估计

当滤波器参数矩阵 A_{Fst}, B_{Ft} 和 C_{Ft} 已知时, 在限制条件 (9) 和 $\| G_{z_e\omega}(z) \| < \gamma$ 下, 最小化 γ 问题可转化为如下问题: 最小化 γ^2 在不等式

$$\begin{bmatrix} P-G-G^{\mathrm{T}} & 0 & G^{\mathrm{T}}A_e(\alpha) & G^{\mathrm{T}}B_e(\alpha) \\ * & -I & C_e(\alpha) & 0 \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

的限制下, 对于所有的 δ_{aij}^{st}, δ_{bik}^{t}, $\delta_{clj}^{t} \in \{-\delta_a^t, \delta_a^t\}(i,j = 1,2,\cdots,n;\ k = 1,2,\cdots,p;\ l = 1,2,\cdots,q)$, 与定理 1 类似, 也存在数值计算问题. 下面将解决这一问题. 记

$$G_{ai}^s = [g_{ai1}^s\ g_{ai2}^s\ \cdots\ g_{ail_a}^s],\ i = 1,2. \quad (26)$$

其中

$$g_{a1k}^s = [\ (\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ e_i^{\mathrm{T}}\ )G\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}};$$

$$g_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ e_j^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ ],$$

$$k = (i-1)n + j,\ i,j = 1,2,\cdots,n;$$

$$g_{a1k}^s = [\ (\ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ e_i^{\mathrm{T}}\ )G\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}};$$

$$g_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ h_j^{\mathrm{T}}C_{2s}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ h_j^{\mathrm{T}}D_s\ ],$$

$$k = n^2 + (i-1)p + j,$$

$$i = 1,2,\cdots,n,\ j = 1,2,\cdots,p;$$

$$g_{a1k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ -g_i^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times r}\ ]^{\mathrm{T}};$$

$$g_{a2k}^s = [\ \mathbf{0}_{1\times 2n}\ \ \mathbf{0}_{1\times q}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ \ e_j^{\mathrm{T}}\ \ \mathbf{0}_{1\times n}\ ],$$

$$k = n^2 + np + (i-1)n + j,$$

$$i = 1,2,\cdots,q,\ j = 1,2,\cdots,n.$$

于是可以得到如下引理:

引理 2 考虑系统 (1), 令 $\gamma > 0$, $\delta_a > 0$ 为常数, 且滤波器参数矩阵 A_{Fst}, B_{Ft}, C_{Ft} 为给定. 则 $\| G_{z_e\omega}(z) \| < \gamma$ 对于所有满足式 (9) 的摄动 δ_{aij}^{st}, δ_{bik}^{t} 和 δ_{clj}^{t} 成立, 如果存在矩阵 G, 正定矩阵 $P > 0$ 和一个具有结构 (19) 的对称矩阵 Θ, 使得式 (21) 和如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Q}_{st} & G_{a1}^s \\ (G_{a1}^s)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{a2}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \Theta \begin{bmatrix} G_{a2}^s & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

其中

$$\tilde{Q}_{st} = \begin{bmatrix} P-G-G^{\mathrm{T}} & 0 & G^{\mathrm{T}}A_{est} & G^{\mathrm{T}}B_{est} \\ * & -I & C_{est} & 0 \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{bmatrix}.$$

证明过程与定理 2 证明类似, 此处省略.

4 例 子

离散时间模糊系统 (1) 具有 $u = 2$ 和

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0.5 \\ -1 & -0.5 & 1 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = C_{12} = [\ 1\ \ -1\ \ 1\ ],\ D_1 = [\ 0\ \ 0.6\ ],$$

$$C_{21} = C_{22} = [\ -1\ \ 0.5\ \ 2\ ],\ D_2 = [\ 0\ \ 0.9\ ],$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

当所设计的滤波器不含有增益变量时, 可以得到标准的闭环模糊系统最优 H_∞ 性能指标为 $\gamma_{\mathrm{opt}} = 4.1777$. 首先设定 $\delta_a^1 = \delta_a^2 = 0.05$. 一方面假定所设计的滤波器具有形如式 (23) 的加性范数有界型增益变量, 利用设计条件 (24) 设计滤波器, 定义所设计的控制器为 K_{nm}; 另一方面, 假定所设计的滤波器具有形如式 (9) 所描述的加性增益变量. 利用定理 2, 分别取 $s_a = 15$ 和 $s_a = 5$ 设计滤波器, 定义所得到的控制器分别为 $F_{\mathrm{in}15}(s_a = 15)$ 和 $F_{\mathrm{in}5}(s_a = 5)$, 两种设计方法得到的 H_∞ 性能由表 1 和表 2 给出并进行比较.

表 1 由设计得到的性能指标

	已有方法	本文方法 ($s_a = 15$)	本文方法 ($s_a = 5$)
γ	5.1134	4.5332	4.5210

表 2 由引理 2 得到的 H_∞ 性能估计

	F_{norm}	$F_{\mathrm{in}15}$	$F_{\mathrm{in}5}$
$\gamma\ (s_a = 15)$	4.6946	4.4228	–
$\gamma\ (s_a = 5)$	4.6836	–	4.4131

从表 1 和表 2 可以看出, 即使本文所提出的定理 2 的最差情况 ($s_a = 15$) 也要比已有非脆弱 H_∞ 滤波器设计条件 (24) 的保守性小. 这表明了本文设计方法的有效性.

5 结 论

本文研究了线性离散时间系统模糊非脆弱 H_∞ 滤波器设计问题, 所设计的滤波器假定具有由有限字长影响的加性区间型增益变量. 采用文献 [13] 提出的结构定点分离器的方法来解决由区间型增益变量引起的数值计算问题. 进而给出了基于线性矩阵不等式的模糊非脆弱 H_∞ 滤波器的设计方法. 另外, 为了减小设计条件的保守性, 通过引入松弛变量将系统矩阵与 Lyapunov 矩阵进行解耦, 所得到的设计结果可保证估计误差渐近稳定且具有指定的 H_∞ 性能指标界. 最后通过数值例子验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Tuan H D, Apkarian P, Narikiyo T, et al. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 324-332.

[3] Chen B, Liu X. Reliable control design of fuzzy dynamic systems with time-varying delay[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(3): 349-374.

[4] Yang G H, Dong J X. H_∞ filtering for fuzzy singularly perturbed systems[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(5): 1371-1389.

[5] Dong J X, Yang G H. H_∞ controller synthesis via switched PDC scheme for discrete-time T–S fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2009, 17(3): 544-555.

[6] Yang G H, Wang J L. Robust resilient Kalman filtering for uncertain linear systems with estimation gain uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 343-348.

[7] Keel L H, Bhatacharyya S P. Robust, fragile, or optimal?[C]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.

[8] Yang G H, Wang J L, Lin C. Non-fragile H_∞ control for linear systems with additive controller gain variations[J]. Int J of Control, 2000, 73(16): 1500-1506.

[9] Yang G H, Wang J L. Non-fragile H_∞ output feedback controller design for linear systems[J]. ASME J of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2003, 125(1): 117-125.

[10] Yang G H, Wang J L. Non-fragile H_∞ control for linear systems with multiplicative controller gain variations[J]. Automatica, 2001, 37(5): 727-737.

[11] Mahmoud M S. Resilient $L_2 - L_1$ filtering of polytopic systems with state delays[J]. IET Control Theory and Applications, 2007, 1(1): 141-154.

[12] Li G. On the structure of digital controller with finite word length consideration[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(5): 689-693.

[13] Yang G H, Che W W. Non-fragile H_∞ filter design for linear continuous-time systems[J]. Automatica, 2008, 44(11): 2849-2856

[14] Che W W, Yang G H. Non-fragile H_∞ filtering for discrete-time systems with finte word length consideration[J]. Acta Automatic Sinica, 2008, 34(8): 886-892.

[15] Scherer C W. A full block S-procedure with applications[C]. Proc of the 36th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 1997: 2602-2607.

[16] Grigoriadis K M, Watson J T. Reduced order H_∞ and L_2-L_∞ filtering via linear matrix inequalities[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(4): 1326-1338.

(上接第1864页)

[5] Sepulchre R, Paley D A, Leonard N E. Stabilization of planar collective motion with limited communication[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(3): 706-719.

[6] Ren W. Distributed attitude alignment in spacecraft formation flying[J]. Int J of Adaptive Control and Signal Processing, 2007, 21(2/3): 95-113.

[7] Wu C W. Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems coupled via a directed graph[J]. Nonlinearity, 2005, 18(3): 1057-1064.

[8] Yu W W, Chen G, Cao M, et al. Second-order consensus for multi-agent systems with directed topologies and nonlinear dynamics[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2010, 40(3): 881-891.

[9] Liu X W, Chen T P, Lu W L. Consensus problem in directed networks of multi-agents via nonlinear protocols[J]. Physics Letters A, 2009, 373(35): 3122-3127.

[10] Moreau L. Stability of multi-agent systems with time-dependent communication links[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(2): 169-182.

[11] Lin Z Y, Francis B, Maggiore M. State agreement for continuous-time coupled nonlinear systems[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2007, 46(1): 288-307.

[12] Arcak M. Passivity as a design tool for group coordination[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(8): 1380-1390.

[13] Chen F, Chen Z Q, Xia L Y, et al. Reaching a consensus via pinning control[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1215-1220.

[14] Khalil H K. Nonlinear Systems[M]. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

[15] Royle G, Godsil C. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer Graduate Texts in Mathematics, 2001.

[16] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, 1985.