

文章编号: 1001-0920(2011)10-1485-08

具有多个通信时延的一类二阶多智能体系统平均一致性

张庆杰, 沈林成, 朱华勇

(国防科学技术大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

摘要: 讨论具有多个通信时延的二阶多智能体系统平均一致性问题. 采用构造 Lyapunov-Krasovskii 函数的方法来分析系统的时延依赖稳定判据, 并通过求解线性不等式来获取最大时延上界. 为了最大限度地降低判据的保守性, 在主要结论中引入了自由权矩阵思想. 数值实例和仿真结果表明了所提出方法的有效性.

关键词: 平均一致性; Lyapunov-Krasovskii 泛函; 线性矩阵不等式; 自由权矩阵

中图分类号: TP18

文献标识码: A

Average consensus of a class of second order multi-agent systems with multiple communication delays

ZHANG Qing-jie, SHEN Lin-cheng, ZHU Hua-yong

(College of Mechatronic Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: ZHANG Qing-jie, E-mail: nudtzhang@hotmail.com)

Abstract: This paper discusses the average consensus problem of multi-agent systems with multiple communication delays. The stability criteria of the network dynamic is analyzed by constructing Lyapunov-Krasovskii function, and the tolerant upper bounds of communication delays can be obtained through solving feasible linear matrix inequalities(LMIs). In order to relax the conservativeness, free-weighting matrices method is employed in the main results. Numerical examples and simulations results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: average consensus; Lyapunov-Krasovskii functional; linear matrix inequality; free-weighting matrices

1 引言

近年来, 多智能体一致性理论已逐渐成为多机器人协调领域中的研究热点之一, 其基本任务是基于多个智能体可能相冲突的输入信息, 采用一致性协议协调多智能体系统产生一致的公共输出, 并且在理论上证明了达到一致所需协调次数的上界和下界相同. 由于一致性理论具有无中心控制、局部信息交换的特点, 多智能体系统可通过简单的行为协调涌现出整体的自治行为, 受到学术界的极大关注. 目前, 一致性理论已在多机器人系统编队控制^[1]、蜂拥^[2]和聚集^[3]、信息融合^[4]、协同决策^[5]以及耦合振荡器同步^[6]等多个领域得到了广泛应用. 但在很多应用中, 由于智能体移动、通信拥塞或传输距离受限等因素的存在, 研究一致性问题时不得不考虑时延对系统收敛性能的影响. 目前已有大量文献研究具有通信时延的多智能体系统取得一致性的条件^[7-12], 大体分

为频域和时域两种分析方法. 在频率分析方法中, 文献[7]讨论了含有对称、常数时延情况下无向多智能体网络的平均一致性问题, 并利用 Geršgorin 圆盘定理给出系统实现一致的充要条件. 进一步, [8]将这一结果作了推广, 研究了对称时变时延和非对称时变时延情况下多智能体一致收敛的稳定判据. 尽管上述频域方法能够给出系统实现一致所允许通信时延上界的解析表达, 但通常仅适用于固定拓扑结构, 这是因为分析切换拓扑结构需要寻找公共的/多个 Lyapunov 函数, 而事实上这是十分困难的^[13]. 在时域分析中, [9]基于压缩理论和波形变量设计方法构造了 Lyapunov-Krasovskii 函数, 并基于此给出了对称加权无向连通网络的稳定判据. 由于 Matlab 等数学工具在判断 Lyapunov-Krasovskii 函数时具有存在性方面的优势, [10-11]采用 LMI 方法分别讨论了无向和有向多智能体网络所允许的最大通信时延上界. 由于这类方法给出的稳定判据都是充分条件, 在判据的保守

收稿日期: 2010-06-04; 修回日期: 2010-08-07.

基金项目: 国防基础研究项目(A2820080247); 国家安全基础研究项目(6138101001).

作者简介: 张庆杰(1981-), 男, 博士生, 从事多智能体一致性理论与应用的研究; 沈林成(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞行器导航与规划、智能控制等研究.

性方面存在进一步改善的可能. [12] 对二阶多智能体系统存在单个对称时延情况下的平均一致性进行了讨论. 此外, 还有一些文献探讨了含有时延情况下一致性的相关问题, 如输入时延^[13]、离散系统^[14]以及联合连通拓扑^[15]等.

本文采用 LMI 方法研究无相对速度信息的二阶多智能体系统平均一致性问题, 对文献 [12] 中未开展研究的多个通信时延问题展开进一步的讨论, 并尝试使用新的 Lyapunov-Krasovskii 函数构造方法以降低时延依赖稳定判据的保守性问题. 为了获得相对较低的保守性, 引入自由权矩阵思想^[16]以保证更大范围的时延界限.

为了研究方便, 文中的符号*表示对称矩阵中的对称部分, $\mathcal{D} > 0$ 表示矩阵 \mathcal{D} 是正定的, $\mathbf{1}$ 表示向量 $[1, 1, \dots, 1]^T$, 符号 \otimes 表示 Kronecker 乘积. 此外, 文中所讨论的时变时延 $\tau(t)$ 均简写为 τ .

2 数学描述

2.1 图论基础

通常, 多智能体间的交互关系可以由一个加权的有向图 $G = (\gamma, \varepsilon, \mathcal{A})$ 来描述. 其中: $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为图的节点集, 且节点序号属于有限集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, n\}$; $\varepsilon \subset \gamma \times \gamma$ 为图的边集, (v_i, v_j) 为图的边; $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ 为邻接矩阵, 其非负元素 a_{ij} 的取值与图中的边相对应, 例如 $(v_i, v_j) \in \varepsilon \iff a_{ij} > 0$. 假设 $\forall i \in \mathcal{I}, a_{ii} = 0$, 若对于任意 $i, j \in \mathcal{I}$, 且 $i \neq j$, 有 $a_{ij} = a_{ji}$ 成立, 则有向图转变为无向图. 此时, 无向图也可以看作是有向图的一种特例.

若节点 v_i 的紧邻节点的集合定义为

$$\mathcal{N}_i = \{v_j \in \gamma : (v_i, v_j) \in \varepsilon\}, \quad (1)$$

令 $x_i \in \mathbf{R}$ 为节点 v_i 的状态值 (如位置或状态等信息), 则 $G_x = (G, \mathbf{x})$ 指状态值为 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 拓扑结构为 G 的多智能体系统.

2.2 平均一致性与一致性协议

本文将讨论连续时间域下具有时延的二阶智能体系统平均一致性问题. 假定智能体 i 的动态描述为

$$\dot{x}_i = \zeta_i, \quad \dot{\zeta}_i = u_i. \quad (2)$$

采用无相对速度信息的输入或协议为

$$u_i(t) = -k_1 \zeta_i + \sum_{v_j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} [x_j(t - \tau_{ij}) - x_i(t - \tau_{ij})], \quad (3)$$

其中 τ_{ij} 为智能体 j 和智能体 i 间的通信延时. 一致性协议 (3) 能够渐近求解二阶智能体 (2) 系统的平均一致性问题当且仅当智能体状态满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta_i(t) - \zeta_j(t)\| = 0, \quad i, j \in \mathcal{I}, \quad (4)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i(0) + \frac{\zeta_j(0)}{k_1} \right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \zeta_i(t) = 0, \quad i \in \mathcal{I}. \quad (5)$$

令 $\bar{\zeta}_i = 2\zeta_i/k_1 + x_i$, 取 $\bar{\mathbf{x}} = [x_1, \bar{\zeta}_1, x_2, \bar{\zeta}_2, \dots, x_n, \bar{\zeta}_n]$, 则二阶多智能体系统的动态描述可表示为如下矩阵形式^[15]:

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (I_n \otimes \Gamma) \bar{\mathbf{x}} - \sum_{k=1}^m (L_k \otimes U) \bar{\mathbf{x}}(t - \tau_k). \quad (6)$$

其中

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -k_1/2 & k_1/2 \\ k_1/2 & -k_1/2 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2/k_1 & 0 \end{bmatrix};$$

非对称多时延为 $\tau_k \in \tau_{ij}$, $i, j \in \mathcal{I}$. 此外, $L_k = [l_{kij}]$ 与邻接矩阵的关系为: 当 $i \neq j, \tau_k = \tau_{ij}$ 时, $l_{kij} = -a_{ij}$; 当 $i \neq j, \tau_k \neq \tau_{ij}$ 时, $l_{kij} = 0$; 当 $i = j$ 时, $l_{kij} = \sum_{j=1}^n l_{kij}$.

对于切换拓扑情况, 多智能体系统的动态描述为

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (I_n \otimes \Gamma) \bar{\mathbf{x}} - \sum_{k=1}^m (L_{ks} \otimes U) \bar{\mathbf{x}}(t - \tau_k), \quad (7)$$

$$s = \sigma(t).$$

其中: $\sum_{k=1}^m L_{ks} = L_s$ 属于一组有向图的 Laplacian 矩阵, $\sigma(t)$ 为决定拓扑结构的切换信号.

定义 1^[7] (强连通) 若图中每个节点与其他任意节点间存在一个有向路径, 则该图是强连通的.

定义 2^[7] (平衡图) 有向图 $G = (\gamma, \varepsilon, \mathcal{A})$ 中的节点 v_i 是平衡的, 当且仅当其入度和出度相等, 例如 $\deg_{\text{out}}(v_i) = \deg_{\text{in}}(v_i)$. 若图 $G = (\gamma, \varepsilon, \mathcal{A})$ 是平衡的, 当且仅当其所有节点是平衡的, 或者满足

$$\sum_j a_{ij} = \sum_j a_{ji}, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

定义 3^[11] (平衡矩阵) 若方阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为平衡矩阵, 当且仅当 $\mathbf{1}_n^T F = 0$ 和 $F \mathbf{1}_n = 0$ 成立.

引理 1^[7] 若多智能体系统的图 G 是强连通的, 则其 Laplacian 矩阵 L 满足: 1) 矩阵 L 的秩为 $n - 1$; 2) 零为矩阵 L 的一个特征值, 其相应的特征向量为 $\mathbf{1}_n$; 3) 其余 $n - 1$ 个特征值具有正实部, 特别地, 若 G 为无向图, 则其特征值均为正实数.

引理 2^[11] 对于完全图的 Laplacian 矩阵

$$L = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix},$$

若 E_c 为 L 的特征向量所组成的矩阵, 则它为一个正

交矩阵. 对于给定的任意平衡矩阵 $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 存在

$$E_c^T F E_c = \begin{bmatrix} \tilde{F} & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 \tilde{F} 是正定矩阵.

3 时延相关稳定判据

本节将讨论二阶智能体系统 (6) 实现平均一致性的稳定判据. 在给出主要结论之前, 作如下假设:

假设 1 二阶多智能体系统的图拓扑是强连通的, 且为平衡有向图.

假设 2 存在 m 个通信时延 ($1 \leq m \leq n(n-1)$), 且有 $0 \leq \tau_i \leq \bar{\tau}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, 为了方便讨论, 假定 $0 < \bar{\tau}_1 < \bar{\tau}_2 < \dots < \bar{\tau}_m$.

假设 3 存在单个时变通信时延 ($\tau = \tau_{ji} = \tau_{ij}$, $i, j \in \mathcal{D}$), 时延范围为 $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$, 时延变化率范围为 $0 \leq \mu \leq \bar{\mu}$.

定理 1 对于存在多个时延的二阶多智能体系统 (6), 满足假设 1 和假设 2. 给定常量 $\bar{\tau}_i$ 及 $\bar{\mu}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), 若存在合适维矩阵

$$\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\tilde{R}^{(ij)} = [\tilde{R}^{(ij)}]^T \geq 0,$$

$$\tilde{M}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00}^{(ij)} & \tilde{M}_{01}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{0m}^{(ij)} \\ * & \tilde{M}_{11}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{1m}^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \tilde{M}_{mm}^{(ij)} \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j,$$

以及自由权矩阵 $\tilde{N}_p^{(ij)}$ ($p = 0, 1, \dots, m, i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j$), 使得如下 LMI 成立:

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{00} & \tilde{\Omega}_{01} & \dots & \tilde{\Omega}_{0m} \\ * & \tilde{\Omega}_{11} & \dots & \tilde{\Omega}_{1m} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \tilde{\Omega}_{mm} \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

$$\tilde{\Phi}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00}^{(ij)} & \tilde{M}_{01}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{0m}^{(ij)} & \tilde{N}_0^{(ij)} \\ * & \tilde{M}_{11}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{1m}^{(ij)} & \tilde{N}_1^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & \tilde{M}_{mm}^{(ij)} & \tilde{N}_m^{(ij)} \\ * & * & \dots & * & \tilde{R}^{(ij)} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{00} &= \tilde{P}\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T\tilde{P} + \sum_{i=1}^m \tilde{Q}_i + \sum_{j=1}^m \tilde{N}_0^{(0j)} + \\ &\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{\Gamma}^T \tilde{R}^{(ij)} \tilde{\Gamma} + \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{M}_{00}^{(ij)} + \sum_{j=1}^m [\tilde{N}_0^{(0j)}]^T;$$

$$\tilde{\Omega}_{0k} =$$

$$- \tilde{P}\tilde{U}_k + \sum_{j=k+1}^m \tilde{N}_0^{(kj)} + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{N}_0^{(ik)} + \sum_{k=1}^m [\tilde{N}_k^{(0i)}]^T +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{\Gamma}^T \tilde{R}^{(ij)} \tilde{U}_k +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{M}_{0k}^{(ij)}, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\tilde{\Omega}_{kk} = \tilde{Q}_k + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{N}_k^{(ik)} + \sum_{i=0}^{k-1} [\tilde{N}_k^{(ik)}]^T +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{U}_k^T \tilde{R}^{(ij)} \tilde{U}_k +$$

$$\sum_{j=k+1}^m \tilde{N}_k^{(kj)} + \sum_{j=k+1}^m [\tilde{N}_k^{(kj)}]^T +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{M}_{kk}^{(ij)}, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\tilde{\Omega}_{lk} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{U}_l^T \tilde{R}^{(ij)} \tilde{U}_k + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{N}_l^{(ik)} -$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} [\tilde{N}_k^{(il)}]^T + \sum_{j=k+1}^m \tilde{N}_l^{(kj)} + \sum_{j=l}^m [\tilde{N}_k^{(lj)}]^T +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \tilde{M}_{lk}^{(ij)},$$

$$l = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, m, \forall l < m, l < k;$$

$$\tilde{\Gamma} = E_{c1}^T (I_n \otimes \Gamma) E_{c1},$$

$$\tilde{U}_k = E_{c1}^T (L_k \otimes U) E_{c1}, k = 1, 2, \dots, m,$$

E_{c1} 为完全图 Laplacian 矩阵非零特征值所对应特征向量的矩阵. 则采用一致性协议 (3) 的多智能体系统 (6) 能够渐近实现平均一致.

证明 借鉴文献 [7] 的思想, 认为 $\text{Ave}(\bar{\mathbf{x}})$ 为 1 个不变量, 可将 $\bar{\mathbf{x}}$ 分解为 $\bar{\mathbf{x}}(t) = \text{Ave}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{1} + \delta(t)$. 其中: $\text{Ave}(\bar{\mathbf{x}})$ 为均值向量 (式 (5)), $\delta(t)$ 为不一致向量. 因此可以得到如下结论: 多智能体系统 (6) 渐近收敛到 $\text{Ave}(\bar{\mathbf{x}})$ 与不一致向量 $\delta(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ 相等价. 进而对多智能体系统稳定性分析可以转变为判断下式是否具有稳定的零平衡点:

$$\dot{\delta}(t) = (I_n \otimes \Gamma)\delta(t) - \sum_{k=1}^m (L_k \otimes U)\delta(t - \tau_k). \quad (11)$$

为此, 构造如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(t, \delta) =$$

$$\delta^T(t) P \delta(t) + \sum_{i=1}^m \int_{t-\bar{\tau}_i}^t \delta^T(s) Q_i \delta(s) ds +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{-\bar{\tau}_j}^{-\bar{\tau}_i} \int_{t+\vartheta}^t \delta^T(s) R^{(ij)} \dot{\delta}(s) ds d\vartheta. \quad (12)$$

其中

$$P = P^T > 0, Q_i = Q_i^T \geq 0, i = 1, 2, \dots, m;$$

$$R^{(ij)} = [R^{(ij)}]^T \geq 0, i = 0, 1, \dots, m,$$

$$j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j$$

是合适维待平衡矩阵.

根据 Newton-Leibniz 公式, 对于合适维自由权矩阵 $N_p^{(ij)} (p = 0, 1, \dots, m)$, 有下式成立:

$$2 \left[\sum_{p=0}^m \delta^T(t - \bar{\tau}_p) N_p^{(ij)} \right] \times \left[\delta(t - \bar{\tau}_i) - \delta(t - \bar{\tau}_j) - \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \dot{\delta}(s) ds \right] = 0. \quad (13)$$

这里令 $\bar{\tau}_0 = 0$. 此外, 对于任意合适维矩阵

$$M^{(ij)} = \begin{bmatrix} M_{00}^{(ij)} & M_{01}^{(ij)} & \cdots & M_{0m}^{(ij)} \\ * & M_{11}^{(ij)} & \cdots & M_{1m}^{(ij)} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & M_{mm}^{(ij)} \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j,$$

有

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \xi_1^T(t) [M^{(ij)} - M^{(ij)}] \xi_1(t) = 0, \quad (14)$$

其中

$$\xi_1(t) = [\delta^T(t), \delta^T(t - \bar{\tau}_1), \dots, \delta^T(t - \bar{\tau}_m)]^T.$$

由于 $r f(t) = \int_{t-r}^t f(t) ds$ 成立, 有

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \xi_1^T(t) M^{(ij)} \xi_1(t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \xi_1^T(t) M^{(ij)} \xi_1(t) ds. \quad (15)$$

对 $V(t, \delta)$ 求导, 再加上式 (13) 和 (14) 中等式的左边项, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \delta) = & 2\delta^T(t) P \dot{\delta}(t) + \sum_{i=1}^m \delta^T(t) Q_i \delta(t) - \\ & \sum_{i=1}^m (1 - \dot{\bar{\tau}}_i) \delta^T(t - \bar{\tau}_i) Q_i \delta(t - \bar{\tau}_i) + \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \left[(\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \delta^T(t) R^{(ij)} \dot{\delta}(t) - \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \dot{\delta}^T(s) R^{(ij)} \dot{\delta}(s) ds \right] = \\ & 2\delta^T(t) P \left[(I_n \otimes \Gamma) \delta(t) - \sum_{k=1}^m (L_k \otimes U) \delta(t - \bar{\tau}_k) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m [\delta^T(t) Q_i \delta(t) - \delta^T(t - \bar{\tau}_i) Q_i \delta(t - \bar{\tau}_i)] - \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \dot{\delta}^T(s) R^{(ij)} \dot{\delta}(s) ds + \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \times \\ & \left[(I_n \otimes \Gamma) \delta(t) - \sum_{k=1}^m (L_k \otimes U) \delta(t - \bar{\tau}_k) \right]^T \times \\ & R^{(ij)} \left[(I_n \otimes \Gamma) \delta(t) - \sum_{k=1}^m (L_k \otimes U) \delta(t - \bar{\tau}_k) \right] + \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m 2 \left[\sum_{p=0}^m \delta^T(t - \bar{\tau}_p) N_p^{(ij)} \right] \times \\ & \left[\delta(t - \bar{\tau}_i) - \delta(t - \bar{\tau}_j) - \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \dot{\delta}(s) ds \right] + \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) \xi_1^T(t) [M^{(ij)} - M^{(ij)}] \xi_1(t) = \\ & \xi_1^T(t) \Omega \xi_1(t) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \xi_2^T(t, s) \Phi^{(ij)} \xi_2(t, s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\xi_2(t, s) = [\xi_1(t), \dot{\delta}^T(s)]^T,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{00} & \Omega_{01} & \cdots & \Omega_{0m} \\ * & \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1m} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \Omega_{mm} \end{bmatrix},$$

$$\Phi^{(ij)} = \begin{bmatrix} M_{00}^{(ij)} & M_{01}^{(ij)} & \cdots & M_{0m}^{(ij)} & N_0^{(ij)} \\ * & M_{11}^{(ij)} & \cdots & M_{11}^{(ij)} & N_1^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & M_{mm}^{(ij)} & N_m^{(ij)} \\ * & * & \cdots & * & R^{(ij)} \end{bmatrix}.$$

矩阵 Ω 中的元素定义为

$$\Omega_{00} =$$

$$P(I_n \otimes \Gamma) + (I_n \otimes \Gamma)^T P + \sum_{i=1}^m Q_i + \sum_{j=1}^m N_0^{(0j)} +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) (I_n \otimes \Gamma)^T R^{(ij)} (I_n \otimes \Gamma) +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) M_{00}^{(ij)} + \sum_{j=1}^m [N_0^{(0j)}]^T;$$

$$\Omega_{0k} = -P(L_k \otimes U) + \sum_{j=k+1}^m N_0^{(kj)} +$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} N_0^{(ik)} + \sum_{k=1}^m [N_k^{(0i)}]^T +$$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) (I_n \otimes \Gamma)^T R^{(ij)} (L_k \otimes U) +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) M_{0k}^{(ij)}, k = 1, 2, \dots, m; \\ \Omega_{kk} = & Q_k + \sum_{i=0}^{k-1} N_k^{(ik)} + \sum_{i=0}^{k-1} [N_k^{(ik)}]^T + \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) (L_k \otimes U)^T R^{(ij)} (L_k \otimes U) + \\ & \sum_{j=k+1}^m N_k^{(kj)} + \sum_{j=k+1}^m [N_k^{(kj)}]^T + \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) M_{kk}^{(ij)}, k = 1, 2, \dots, m; \\ \Omega_{lk} = & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) (L_l \otimes U)^T R^{(ij)} (L_k \otimes U) + \\ & \sum_{i=0}^{k-1} N_l^{(ik)} - \sum_{i=0}^{l-1} [N_k^{(il)}]^T + \sum_{j=k+1}^m N_l^{(kj)} + \\ & \sum_{j=l}^m [N_k^{(lj)}]^T + \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m (\bar{\tau}_j - \bar{\tau}_i) M_{lk}^{(ij)}, \\ & l = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, m, \forall l < m, l < k. \end{aligned}$$

显然, 如果矩阵 $\Omega < 0$ 且 $\Phi^{(ij)} \geq 0, i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j$, 则 $\dot{V}(t, \delta) < 0$. 但由引理 1 可知, 矩阵 $L_k \otimes U$ 是奇异的, 应用引理 2 对式 (16) 右边作如下变换:

$$\begin{aligned} & \xi_1^T(t) \Omega \xi_1(t) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \xi_2^T(t, s) \Phi^{(ij)} \xi_2(t, s) ds = \\ & \xi_1^T(t) E_c E_c^T \Omega E_c E_c^T \xi_1(t) - \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \xi_2^T(t, s) E_c E_c^T \Phi^{(ij)} E_c E_c^T \xi_2(t, s) ds = \\ & \xi_1^T(t) E_c \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \mathbf{0}_{(2n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (2n-1)} & 0 \end{bmatrix} E_c^T \xi_1(t) - \\ & \sum_{i=0}^m \sum_{j=i+1}^m \int_{t-\bar{\tau}_j}^{t-\bar{\tau}_i} \xi_2^T(t, s) E_c \times \\ & \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}^{(ij)} & \mathbf{0}_{(2n-1) \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times (2n-1)} & 0 \end{bmatrix} E_c^T \xi_2(t, s) ds, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\tilde{\Omega}$ 和 $\tilde{\Phi}^{(ij)}$ 与式 (9) 和 (10) 中的矩阵定义相同. 需要说明的是, 如下变换成立:

$$\begin{aligned} E_c^T (I_n \otimes \Gamma) E_c &= \text{diag}\{E_{c1}^T (I_n \otimes \Gamma) E_{c1}, 0\}, \\ E_c^T (L_k \otimes U) E_c &= \text{diag}\{E_{c1}^T (L_k \otimes U) E_{c1}, 0\}, \\ & k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

矩阵 $E_{c1} \in \mathbf{R}^{(2n-1)}$ 为 $E_c \in \mathbf{R}^{2n}$ 中非零特征值对应的特征向量所组成的矩阵. 若不等式 (9) 和 (10) 成立, 则存在一个充分小的 $\epsilon > 0$, 满足 $\dot{V}(t, \delta) \leq -\epsilon \|\delta(t)\|^2$. 因此, 零为不一致向量 $\delta(t)$ 的稳定平衡点, 即多智能体系统 (6) 能够渐近实现平均一致. \square

注 1 为了得到式 (16) 的右边项, 在计算 $\dot{V}(t, \delta)$ 的过程中使用变换 (15).

同样, 只需证明多智能体系统存在公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 上述结论也可作为切换拓扑条件下具有多个通信时延的多智能体系统取得平均一致性的稳定判据.

推论 1 对于存在多个时延的二阶多智能体系统 (7) 和切换信号 $\sigma(t)$ 指定的所有拓扑结构, 满足假设 1 和假设 2. 给定常量 $\bar{\tau}_i$ 及 $\bar{\mu}_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 若存在合适维公共矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \tilde{P}^T > 0, \tilde{Q}_i = \tilde{Q}_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, m; \\ \tilde{R}^{(ij)} = [\tilde{R}^{(ij)}]^T \geq 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{M}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00}^{(ij)} & \tilde{M}_{01}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{0m}^{(ij)} \\ * & \tilde{M}_{11}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{1m}^{(ij)} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \tilde{M}_{mm}^{(ij)} \end{bmatrix} > 0,$$

$$i = 0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j,$$

以及自由权矩阵 $\tilde{N}_p^{(ij)} (p=0, 1, \dots, m, i=0, 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m, \forall i < m, i < j)$, 使得如下 LMI 成立:

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{00} & \tilde{\Omega}_{01} & \dots & \tilde{\Omega}_{0m} \\ * & \tilde{\Omega}_{11} & \dots & \tilde{\Omega}_{1m} \\ * & * & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & \tilde{\Omega}_{mm} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\tilde{\Phi}^{(ij)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{00}^{(ij)} & \tilde{M}_{01}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{0m}^{(ij)} & \tilde{N}_0^{(ij)} \\ * & \tilde{M}_{11}^{(ij)} & \dots & \tilde{M}_{1m}^{(ij)} & \tilde{N}_1^{(ij)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & \tilde{M}_{mm}^{(ij)} & \tilde{N}_m^{(ij)} \\ * & * & \dots & * & \tilde{R}^{(ij)} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (19)$$

其中: $\tilde{\Omega}_{00}, \tilde{\Omega}_{0k} (k = 1, 2, \dots, m), \tilde{\Omega}_{kk} (k = 1, 2, \dots, m), \tilde{\Omega}_{lk} (l = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, m, \forall l < m, l < k)$ 和 \tilde{R} 均与式 (9) 和 (10) 中的定义相同; $\tilde{U}_k = E_{c1}^T (L_{ks} \otimes U) E_{c1}, s = \sigma(t), k = 1, 2, \dots, m$. 则采用一致性协议 (3) 的多智能体系统 (7) 能够渐近实现平均一致.

注 2 为了降低稳定判据的复杂性, 定理 1 和推论 1 均未考虑多个时延变换率对多智能体系统平均一致的影响. 因此, 所得结论为时延相关/时延变化率无关的稳定判据. 当 $m = 1$ 时, 可得到具有单通信时延的二阶多智能体系统的稳定判据, 即单时延可以看作多时延情况的特例.

与上述结论类似, 下面给出具有单个时变时延的二阶多智能体系统在固定拓扑和切换拓扑条件情况下的稳定判据.

定理 2 对于存在单个时变时延的二阶多智能

体系统 (6), 满足假设 1 和假设 3. 给定常量 $\bar{\tau}$ 及 $\bar{\mu}$, 若存在合适维矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{P}^T > 0, \tilde{Q} = \tilde{Q}^T \geq 0, \\ \tilde{R} &= \tilde{R}^T \geq 0, \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ * & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned}$$

以及自由权矩阵 \tilde{N}_1 和 \tilde{N}_2 , 使得如下 LMI 成立:

$$\tilde{\Xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11}^{(1)} & \tilde{\Xi}_{12}^{(1)} \\ * & \tilde{\Xi}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$\tilde{\Xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} & \tilde{N}_1 \\ * & \tilde{M}_{22} & \tilde{N}_2 \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_{11}^{(1)} &= \tilde{Q} + \tilde{N}_1 + \tilde{N}_1^T + \bar{\tau}\tilde{M}_{11}, \\ \tilde{\Xi}_{12}^{(1)} &= -\tilde{P}\tilde{L} - \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2^T + \bar{\tau}\tilde{M}_{12}, \\ \tilde{\Xi}_{22}^{(1)} &= -(1 - \bar{\mu})\tilde{Q} + \bar{\tau}\tilde{L}^T\tilde{R}\tilde{L} - \tilde{N}_2 - \tilde{N}_2^T + \bar{\tau}\tilde{M}_{22}, \\ \tilde{L} &= E_{c1}^T L E_{c1}, \end{aligned}$$

E_{c1} 为完全图 Laplacian 矩阵非零特征值所对应特征向量的矩阵. 则采用一致性协议 (3) 的多智能体系统 (6) 能够渐近实现平均一致.

证明 定理 2 与定理 1 的证明过程类似, 只需构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函为

$$\begin{aligned} V(t, \delta) &= \delta^T(t) P \delta(t) + \int_{t-\bar{\tau}}^t \delta^T(s) Q \delta(s) ds + \\ &\int_{-\bar{\tau}}^0 \int_{t+\vartheta}^t \delta^T(s) R \delta(s) ds d\vartheta. \end{aligned}$$

对其求导并可构造出不等式 (20) 和 (21). 限于篇幅, 此略. \square

推论 2 对于存在单个时变时延的二阶多智能体系统 (7) 和切换信号 $\sigma(t)$ 指定的所有拓扑结构, 满足假设 1 和假设 3. 给定常量 $\bar{\tau}$ 及 $\bar{\mu}$, 若存在合适维公共矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \tilde{P}^T > 0, \tilde{Q} = \tilde{Q}^T \geq 0, \\ \tilde{R} &= \tilde{R}^T \geq 0, \tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ * & \tilde{M}_{22} \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned}$$

以及自由权矩阵 \tilde{N}_1, \tilde{N}_2 , 使得如下 LMI 成立:

$$\tilde{\Xi}^{(1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{11}^{(1)} & \tilde{\Xi}_{12}^{(1)} \\ * & \tilde{\Xi}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$\tilde{\Xi}^{(2)} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} & \tilde{N}_1 \\ * & \tilde{M}_{22} & \tilde{N}_2 \\ * & * & \tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (23)$$

其中: $\tilde{\Xi}_{11}^{(1)}, \tilde{\Xi}_{12}^{(1)}$ 和 $\tilde{\Xi}_{22}^{(1)}$ 同式 (20) 和 (21) 中的定义; $\tilde{L} = E_{c1}^T L_s E_{c1}$, E_{c1} 为完全图 Laplacian 矩阵非零特征值所对应特征向量的矩阵. 则采用一致性协议 (3) 的多智能体系统 (7) 能够渐近实现平均一致.

注 3 与文献 [10] 不同, 定理 2 和推论 2 未对时

延变换率的上界作任何假设, 可以得到任意 $\bar{\mu}$ 情况下稳定判据的存在性条件.

4 数值实例与仿真实验

考虑图 1 中 4 个强连通平衡有向图, 假定其邻接矩阵中只含元素 0,1.

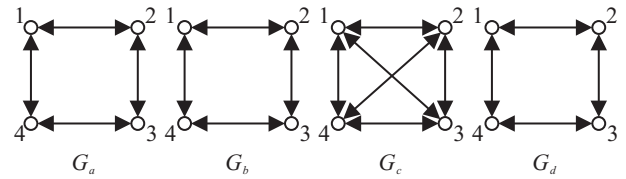


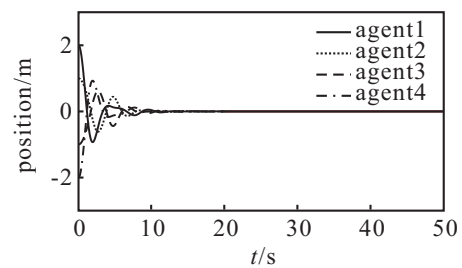
图 1 4 个强连通平衡图

例 1 分两种情况分别讨论具有单个通信时延 ($m = 1$) 的二阶多智能体系统在固定拓扑和切换拓扑情况下取得平均一致所允许的通信时延上界.

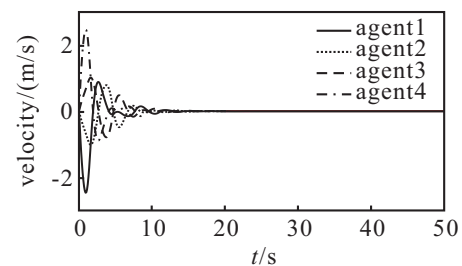
情况 1 选择图 1 中的 G_a 作为具有相同时延的二阶多智能体系统的固定通信拓扑描述. 借助 Matlab LMI 工具箱, 根据定理 2 可迭代求解不同 k_1 和 $\bar{\mu}$ 时所允许的通信时延上界 (见表 1). 针对常数时延 ($\bar{\mu} = 0$) 情况, 在 $k_1 = 1, 2, 4$ 时, 本文方法得到的时延上界分别为 0.257, 0.555, 1.272, 十分接近文献 [17] 所给出的理想值 0.260, 0.575, 1.371. 此外, 由表 1 可见, 多智能体系统允许的时延上界与非相对速度项系数 k_1 呈增函数关系. 为了进一步验证定理 2 所得结果的正确性, 对 $k_1 = 1$ 时具有时变时延 $\tau = 0.249|\sin(0.5t/0.249)|$

表 1 固定拓扑情况下的时延上界

$\bar{\mu}$	0	0.5	0.9	任意
$k_1 = 1$	0.257	0.249	0.249	0.249
$k_1 = 2$	0.555	0.499	0.499	0.499
$k_1 = 4$	1.272	1.157	0.999	0.999



(a) 位置变量演化过程



(b) 速度变量演化过程

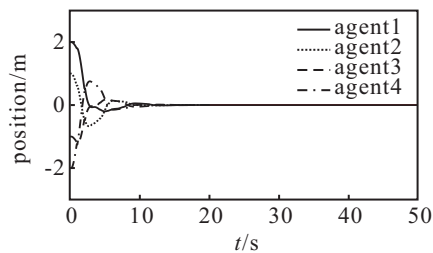
图 2 固定拓扑情况下具有通信时延的系统平均一致性

的二阶多智能体系统状态变量的演化过程进行了仿真, 仿真结果如图 2 所示, 此时, $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1 \ -1 \ -2]^T$, $\zeta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 结果表明多智能体系统可以实现平均一致.

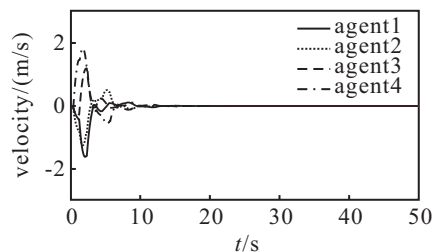
情况 2 以图 1 中的一组图 $\{G_b, G_c, G_d\}$ 为例讨论切换拓扑情况下具有相同时延的二阶多智能体系统平均一致性问题. 根据推论 2 可以得到 $k_1 = 2$ 时不同 $\bar{\mu}$ 条件下所允许的通信时延上界 (见表 2). 结果表明, 本文得到的时延上界要比文献 [12] 具有更低的保守性. 此外, 由推论 2 可知, 多智能体系统具有公共的 Lyapunov-Krasovskii 泛函, 所以在任意切换信号情况下均可实现平均一致. 对具有时变时延 $\tau = 0.382|\sin(10t)|$ 的二阶多智能体系统状态变量的演化过程进行了仿真, 拓扑切换顺序为 $G_b \rightarrow G_c \rightarrow G_d \rightarrow G_b \rightarrow G_c \rightarrow \dots$, 切换间隔为 1s, 如图 3 所示, 此时, $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1 \ -1 \ -2]^T$, $\zeta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. 仿真结果验证了推论 2 的有效性. 同样, 还可以对其他时延情况进行仿真并得到类似的结论, 限于篇幅不再赘述.

表 2 切换拓扑情况下的时延上界 ($k_1 = 2$)

$\bar{\mu}$	0	0.5	0.9	任意
文献 [12] 定理 2	0.134	0.079	0.020	-
推论 2	0.432	0.382	0.382	0.382



(a) 位置变量演化过程

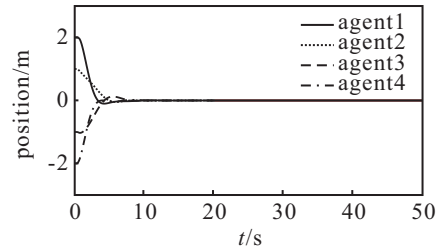


(b) 速度变量演化过程

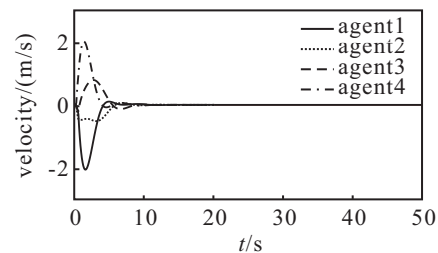
图 3 切换拓扑情况下具有通信时延的系统平均一致性

例 2 下面讨论具有两个通信时延的二阶多智能体系统取得平均一致所允许的通信时延上界. 选择图 1 中的 G_a 作为二阶多智能体系统的固定通信拓扑结构, 并令 $k_1 = 2$. 假定通信时延为: $\tau_1 = \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{34} = \tau_{41} = 0.3$, $\tau_2 = \tau_{21} = \tau_{14} = \tau_{43} = \tau_{32} = 0.6$. 与例 1 类似, 借助 Matlab 的 LMI 工具箱, 根据定理 1 可知, 具有该通信时延的多智能体系统具有可行解. 此

外, 该结论与单时延情况 (表 1, $k_1 = 2, \bar{\mu} = 0$) 相比所能容忍的时延上界要更大. 图 4 的仿真结果进一步验证了所得结果的正确性, 此时, $\mathbf{x}(0) = [2 \ 1 \ -1 \ -2]^T$, $\zeta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.



(a) 位置变量演化过程



(b) 速度变量演化过程

图 4 固定拓扑情况下具有多个通信时延的系统平均一致性

5 结 论

本文采用时域分析方法研究了具有多个通信时延的多智能体系统平均一致性的稳定性判据. 为了获取相对较低的时延依赖判据, 引入自由权矩阵思想, 通过与现有文献的比较发现所提方法具有更低的保守性, 且可同时作为固定拓扑和切换拓扑条件下的稳定判据. 数值实例和仿真结果验证了方法的有效性. 下一步的工作可以继续讨论如何更为合理地构造 Lyapunov-Krasovskii 函数, 以便进一步降低充分条件的保守性. 另外, 还可以利用自由权矩阵思想分析联合连通情况下多智能体系统的平均一致性.

参考文献(References)

- [1] Porfiri M, Roberson D G, Stilwell D J. Tracking and formation control of multiple autonomous agents: A two-level consensus approach[J]. Automatica, 2007, 43(8): 1318-1328.
- [2] Su H, Wang X, Lin Z. Flocking of multi-agents with a virtual leader[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2009, 54(2): 293-307.
- [3] Lin J, Morse A S, Anderson B D O. The multi-agent rendezvous problem: The synchronous case[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2007, 46(6): 2096-2119.
- [4] Casbeer D W, Beard R. Distributed information filtering using consensus filters[C]. 2009 American Control Conf. StLouis, 2009: 1882-1887.

- [5] Bauso D, Giarre L, Pesenti R. Distributed consensus protocols for coordinating buyers[C]. The 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui, 2003: 588-592.
- [6] Jadbabaie A, Motee N, Barahona M. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators[C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston, 2004: 4296-4301.
- [7] Saber R O, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [8] Bliman P A, Trecate G F. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. Automatica, 2008, 44(8): 1985-1995.
- [9] Wang W, Slotine J. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(4): 712-717.
- [10] Sun Y G, Wang L, Me G M. Average consensus in networks of dynamic agents with switching topologies and multiple time-varying delays[J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(2): 175-183.
- [11] Lin P, Jia Y M. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. Physica A-Statistical Mechanics and Its Applications, 2008, 387(1): 303-313.
- [12] Lin P, Jia Y M, Du J P, et al. Distributed leaderless coordination for networks of second-order agents with time-delay on switching topology[C]. 2008 American Control Conf. Seattle, 2008: 1564-1569.
- [13] Tian Y P, Liu C L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1347-1353.
- [14] Xiao F, Wang L. Consensus protocols for discrete-time multi-agent systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2577-2582.
- [15] Lin P, Jia Y M. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delays and jointly-connected topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(3): 778-784.
- [16] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.
- [17] Lin P, Jia Y M, Du J P, et al. Average consensus control for networks of second-order agents with fixed topology and time-delay[C]. Proc of the 26th Chinese Control Conf. Zhangjiajie, 2007: 577-581.

(上接第1484页)

- [18] Liu Y, Wu X, Zhu J J. Omni-directional mobile robot controller design by trajectory linearization[C]. Proc of the American Control Conf. Denver: IEEE, 2003: 3423-3428.
- [19] Tony A A, Zhu J J, Michael A B. Flight control of hypersonic scramjet vehicles using a differential algebraic approach[C]. Proc of AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Keystone: AIAA, 2006: 1-20.
- [20] Filoktimon Repoulas, Evangelos Papadopoulos. Dynamically feasible trajectory and open-loop control design for unmanned airships[C]. Mediterranean Conf on Control and Automation. Athens: IEEE, 2007: 1-6.
- [21] Tony M A, Zhu J J, Abraham K I. Six-DOF trajectory tracking for payload directed flight using trajectory linearization control[C]. Aerospace Conf. Washington: AIAA, 2009: 1-20.
- [22] Aguiar A P, João P H. Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(8): 1362-1379.
- [23] Emeterio A R, Arturo Z R, Víctor S. Global trajectory tracking though static feedback for robot manipulators with bounded inputs[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2009, 17(4): 934-944.
- [24] Ofelia B, Edgar N S. Takagi-sugeno fuzzy scheme for real-time trajectory tracking of an underactuated robot[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2002, 10(1): 14-20.
- [25] Wei R, Randal W B. Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2004, 12(5): 706-716.