

文章编号: 1001-0920(2011)08-1239-04

一类多延时多变量网络控制系统的建模及稳定性

张俊^{1,2}, 罗大庸¹

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410075; 2. 湖南现代物流职业学院 物流工程系, 长沙 410100)

摘要: 针对一类多延时多变量网络控制系统(NCS), 讨论其建模和稳定性问题. 首先假设传感器采用时间驱动、控制器和执行器采用事件驱动, 建立了系统在连续时域里的 MIMO 数学模型; 然后根据 Lyapunov 稳定性原理和 Razumikhin 定理, 构造系统的 Lyapunov 函数, 并分析系统的渐近稳定性, 进而得到了系统稳定的时延参数和稳定性条件; 最后通过仿真实例验证了该类网络控制系统的稳定判据.

关键词: 网络控制系统; 建模; 稳定性; 时延

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Modeling and stability of a class of multiple time-delay and multi-variable NCS

ZHANG Jun^{1,2}, LUO Da-yong¹

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. Department of Logistics Engineering, Hu'nan Modern Logistics Occupation Technical College, Changsha 410100, China. Correspondent: ZHANG Jun, E-mail: linecon23@163.com)

Abstract: This paper discusses about the modeling and stability of a class of multiple time-delay and multi-variable net control system(NCS). Firstly, by supposing that sensor nodes are time driven, and controller and actuators are event driven, an MIMO model in time domain is provided for the system. Then a Lyapunov function is built based on Lyapunov stability theory and Razumikhin theory, and its stability and the conditions of delay parameter and stability are obtained. Finally, simulation example shows the criterion about the NCS.

Key words: net control system; modeling; stability; time delay

1 引言

网络控制系统(NCS)是一种网络化、分布化的控制系统,它以网络作为信息传输的载体,通过网络反馈构成闭环反馈控制系统.由于网络控制系统中的传感器、执行器与控制器之间通过网络交换信息,这必然会引起网络诱导延时.时延的产生不但降低了系统的实时性,甚至引起系统的不稳定,使得整个系统的分析和设计变得困难.近年来,网络控制系统的建模、时滞和稳定性问题已成为控制领域中关注的热点,而且对NCS的研究取得了一些成果.

文献[1]中针对连续系统模型和连续控制器模型,提出了最大允许传输间隔的概念,给出了系统的稳定性条件;[2-3]研究了时变时延网络控制系统的稳定性和渐近稳定性;[4-6]利用LMI方法处理稳定性问题,得到了依赖于时滞的具有较小保守性的结论.

本文研究一类多延时多变量网络控制系统.首先建立其MIMO系统的数学模型;然后进行了稳定性分析,得到其稳定条件;最后通过仿真结果表明了文中稳定性条件推导的有效性.

2 多延时多变量网络控制系统模型描述

由多个传感器、执行器和控制器组成的NCS系统如图1所示^[7],它由被控对象 G_p (包括 r 个传感器,

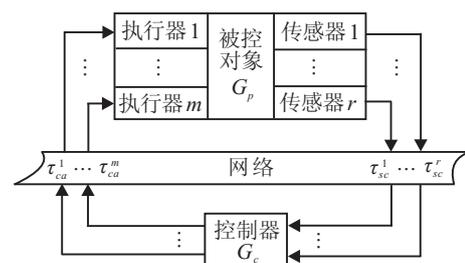


图 1 MIMO 网络控制系统

收稿日期: 2010-04-24; 修回日期: 2010-11-30.

作者简介: 张俊(1978—),女,讲师,博士生,从事智能自动化、网络控制系统的研究;罗大庸(1944—),男,教授,博士生导师,从事综合自动化系统、智能控制等研究.

m 个执行器)、控制器 G_c 和通信网络组成。

因为网络控制系统涉及采样周期、网络延时、时钟同步、节点驱动以及数据丢失等问题,所以在分析 MIMO 网络控制系统之前,先作以下假设^[8]:

1) 传感器采用时间驱动方式,以固定的周期 ($T > 0$) 对被控对象进行采样,并将被控对象的状态量发送到网络。

2) 执行器和控制器均采用事件驱动方式,当采样数据到达时,执行器和控制器各自完成相应的动作。

3) 假设整个系统在通过网络传输数据的过程中没有出现丢失数据的现象。

被控对象 G_p 的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p x_p(t) + B_p u_p(t), \\ y_p(t) = C_p x_p(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $A_p \in R^{n_p \times n_p}$, $B_p \in R^{n_p \times m}$, $C_p \in R^{r \times n_p}$, $u_p \in R^m$, $y_p \in R^r$, $x_p \in R^{n_p}$ 。

控制器 G_c 采用状态反馈控制方式,其状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u_c(t), \\ y_c(t) = K_c u_c(t - \tau_c). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $A_c \in R^{n_c \times n_c}$, $B_c \in R^{n_c \times r}$, $x_c \in R^{n_c}$, $u_c \in R^r$, $y_c \in R^m$, $K_c \in R^{m \times r}$ 为反馈增益矩阵。

由图1可知,控制器 G_c 的输出值 y_c^j ($j = 1, 2, \dots, m$) 经过网络传输到执行器,并成为执行器的输入 u_p^j ,这期间的网络延时为 τ'_{ca} 。因此有

$$u_p^j = y_c^j(t - \tau'_{ca}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

同理,作为传感器的测量值 y_p^j ($j = 1, 2, \dots, m$), 经过网络传递到控制器的输入,并成为它的输入值 u_c^j ,期间的网络延时为 τ'_{sc} 。故有

$$u_c^j = y_p^j(t - \tau'_{sc}), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (4)$$

利用式(1)~(4),可得

$$u_c(t) = \sum_{j=1}^r E_j x_p(t - \tau'_{sc}(t)), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \sum_{i=1}^m F_i u_c(t - \tau^i(t) - \tau_c) = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r F_i E_j x_p(t - \tau_{ca}^i - \tau_{sc}^j - \tau_c). \end{aligned} \quad (6)$$

其中:列矩阵 $E_j \in R^{r \times n_p}$ 的第 i 行为 C_p^i ,其余行为 0 向量;列矩阵 $F_i \in R^{m \times r}$ 的第 i 行为 K_c^i ,其余行为 0 向量。

根据式(5),(6),被控对象 G_p 和控制器 G_c 的状态方程可表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u_p(t) = \\ &= A_p x_p(t) + B_p \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r F_i E_j x_p(t - \tau_{ca}^i - \tau_{sc}^j - \tau_c), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) = \\ &= A_c x_c(t) + B_c \sum_{j=1}^r E_j x_p(t - \tau'_{sc}(t)). \end{aligned} \quad (8)$$

令 $x^T(t) = [x_p^T(t) \quad x_c^T(t)]$,由式(7),(8),有

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \\ &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^r B_c E_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t - \tau'_{sc}) \\ x_c(t - \tau'_{sc}) \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r B_p F_i E_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(t - \tau_{ca}^i - \tau_{sc}^j - \tau_c) \\ x_c(t - \tau_{ca}^i - \tau_{sc}^j - \tau_c) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_p & 0 \\ 0 & A_c \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{i=1}^r B_c E_i & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r B_p F_i E_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由此得到 MIMO 网络控制系统的模型为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^N A_i x(t - \tau_i(t)) = \\ &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau_1) + A_2 x(t - \tau_2). \end{aligned} \quad (10)$$

其中: $0 < \tau_i(t) \leq h$, $i = 1, 2, \dots, N$; $N = 2$, $\tau_0(t) = 0$, $\tau_1 = \tau_{sc}$, $\tau_2 = \tau_{sc} - \tau_{ca} - \tau_c$ 。

利用牛顿-莱布尼茨公式

$$x(t - b) = x(t - a) - \int_{t-b}^{t-a} \dot{x}(s) ds,$$

将闭环系统(10)转化为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) - \sum_{i=1}^N A_i \int_{t-\tau_i}^t (A_0 x(s) + \\ &= \sum_{j=1}^N A_j x(s - \tau_j)) ds, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 $A = \sum_{i=0}^N A_i$ 。

3 多延时多变量网络控制系统稳定性分析

定理 1^[9-10] 如果系统(11)是渐近稳定的,则存

在 $n \times n$ 阶正定对称矩阵 P 和 Q , 使方程 $A^T P + PA = -Q$ 成立; 同时令 $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(Q), \lambda_{\max}(Q)$ 分别为矩阵 P, Q 的最小和最大特征值, 且满足 $\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(Q), \lambda_{\max}(Q)$ 均大于 0.

定理 2 对于任意实向量 a, b 和任意具有合适维数的矩阵 w , 均有如下不等式成立:

$$2a^T b \leq a^T w a + b^T w^{-1} b.$$

定理 3 令系统 (11) 属于有界实数集 \mathbb{R} , 并且 u, v 均是 $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 连续非减函数. 当 $S > 0$ 时, $u(s)$ 和 $v(s)$ 均为正数. 令存在一个连续可微的函数 V 且满足

$$u(\|x\|) \leq V(x, t) \leq v(\|x\|), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

定理 4 如果对于系统 (11) 中任意非负延时常数 $\tau_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 满足

$$0 < \tau < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\sum_{i=1}^N \left((N+1)\epsilon \|(PA_i)^T\|^2 + \frac{qk^2}{\epsilon} \sum_{j=0}^N \|A_j\|^2 \right)}.$$

其中

$$0 < \epsilon < \sqrt{\frac{qk^2 \sum_{j=0}^N \|A_j\|^2}{(N+1)\|(PA_i)^T\|^2}},$$

$$k = \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)} > 0.$$

则多滞后确定性系统 (11) 的平衡点 $x(t) \equiv 0$ 均为渐近稳定的, 并称 (11) 是全时滞稳定的.

证明 由定理 1, 对系统 (11) 选取 Lyapunov 函数

$$V(x) = x^T P x. \tag{12}$$

根据定理 1 和定理 3, 有

$$\lambda_{\min}(P)x^T(t)x(t) < V(x) < \lambda_{\max}(P)x^T(t)x(t).$$

对 $V(x)$ 沿系统 (11) 关于 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x^T(t))' P x(t) + x^T(t) P x'(t) = \\ &x^T(t)(A^T P + PA)x(t) - \\ &2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t x^T(t) P A_i A_0 x(s) ds - \\ &2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N x^T(t) P A_i A_j x(s - \tau_j) ds = \\ &-x^T(t) Q x(t) - 2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t x^T(t) P A_i A_0 x(s) ds - \\ &2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N x^T(t) P A_i A_j x(s - \tau_j) ds. \end{aligned} \tag{13}$$

根据定理 2 和定理 3, 结合 Razumikhin 定理, 假设对于任意正实数 q , 有 $q \geq 1, V(x(\xi)) < qV(x(t))$. 当 $t - 2\tau \leq \xi \leq t$ 时, 有 $\|x(\xi)\| \leq \sqrt{qk}\|x(t)\|$, 则有

$$\begin{aligned} &2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t x^T(t) P A_i A_0 x(s) ds + \\ &2 \sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N x^T(t) P A_i A_j x(s - \tau_j) ds \leq \\ &\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t \left(\epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \\ &\left. \frac{1}{\epsilon} x^T(s) A_0^T A_0 x(s) \right) ds + \\ &\sum_{i=1}^N \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N \left(\epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \\ &\left. \frac{1}{\epsilon} x^T(s - \tau_j) A_j^T A_j x(s - \tau_j) \right) ds = \\ &\sum_{i=1}^N \left(\tau_i \left(\epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \right. \\ &\left. \left. \int_{t-\tau_i}^t \frac{1}{\epsilon} x^T(s) A_0^T A_0 x(s) ds \right) \right) + \\ &\sum_{i=1}^N \left(N \tau_i \epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \\ &\left. \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N x^T(s - \tau_j) A_j^T A_j x(s - \tau_j) ds \right) = \\ &\sum_{i=1}^N \left(\tau_i \left(\epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \right. \\ &\left. \left. \int_{t-\tau_i}^t \frac{1}{\epsilon} x^T(s) A_0^T A_0 x(s) ds \right) \right) + \\ &\sum_{i=1}^N \left(N \tau_i \epsilon x^T(t) P A_i (P A_i)^T x(t) + \right. \\ &\left. \frac{1}{\epsilon} \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^N x^T(s - \tau_j) A_j^T A_j x(s - \tau_j) ds \right) = \\ &\sum_{i=1}^N \tau_i \left(\epsilon \|x(t)\|^2 \|(P A_i)^T\|^2 + \frac{1}{\epsilon} q k^2 \|x(t)\|^2 \|A_0\|^2 \right) + \\ &\sum_{i=1}^N \tau_i \left(N \epsilon \|x(t)\|^2 \|(P A_i)^T\|^2 + \right. \\ &\left. \sum_{j=1}^N \frac{1}{\epsilon} q k^2 \|x(t)\|^2 \|A_j\|^2 \right) = \\ &\sum_{i=1}^N \tau_i (N+1) \epsilon \|x(t)\|^2 \|(P A_i)^T\|^2 + \\ &\sum_{i=1}^N \tau_i \frac{1}{\epsilon} q k^2 \|x(t)\|^2 \left(\|A_0\|^2 + \sum_{j=1}^N \|A_j\|^2 \right), \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\epsilon > 0$ 为任意实数. 将式 (14) 代入 (12), 有

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq -x^T(t) Q x(t) - \\ &\sum_{i=1}^N \tau_i \|x(t)\|^2 \left((N+1) \epsilon \|(P A_i)^T\|^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{qk^2}{\epsilon} \|A_0\|^2 + \frac{qk^2}{\epsilon} \sum_{j=1}^N \|A_j\|^2 \Big) = \\ & -x^T(t)Qx(t) - \sum_{i=1}^N \tau_i \|x(t)\|^2 \Big((N+1) \times \\ & \epsilon \|(PA_i)^T\|^2 + \frac{qk^2}{\epsilon} \sum_{j=0}^N \|A_j\|^2 \Big) = -\psi \|x(t)\|^2, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi = & \lambda_{\min}(Q) + \sum_{i=1}^N \tau_i \Big((N+1) \epsilon \|(PA_i)^T\|^2 + \\ & \frac{qk^2}{\epsilon} \sum_{j=0}^N \|A_j\|^2 \Big). \end{aligned} \quad (16)$$

根据前面定义得知常数 $q > 1, k > 0$, 必有 $\psi > 0$, 进而有 $dV/dt \leq 0$. 由文献[11]中定理 4.2 可知, 系统 (11) 绝对稳定. \square

4 仿真实例

考虑下面多时延网络控制系统:

被控对象 G_p 的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u_p(t), \\ y_p(t) = [1 \quad -0.5] x_p(t). \end{cases} \quad (17)$$

控制器 G_c 的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_c(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x_c(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u_c(t), \\ y_c(t) = [2] u_c(t). \end{cases} \quad (18)$$

于是根据系统 (10), 可得

$$\begin{aligned} A_0 = & \begin{bmatrix} 0.1 & -1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \\ A_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据前面已知, 取正定对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 1.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix},$$

则得到定理 1 中的另一个正定对称矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 2.3 & -1.05 & 0.14 & 0.415 \\ -1.05 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0.14 & 0 & 2.7 & -1.175 \\ 0.415 & 0 & -1.175 & 4.5 \end{bmatrix},$$

且得知 $\lambda_{\min}(Q) = 1.5$.

根据定理 2, 定理 4 和式 (14), 有 $k = 1.2247, 0 < \epsilon < 1.098$. 取 $\epsilon = 0.95$, 得到 $0 < \tau < 0.051$.

令系统的初始状态为 $x(t)|_{t=0} = [0.5, -1, 0.5, 0.1]$, 对上述系统进行 Simulink 仿真, 得到系统状态轨迹图如图 2~图 4 所示.

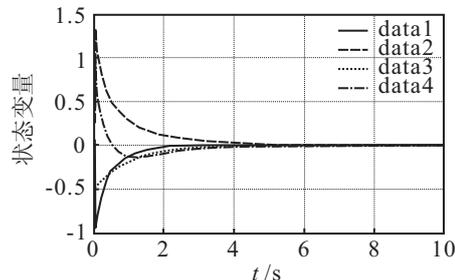


图 2 无延时的系统状态轨迹

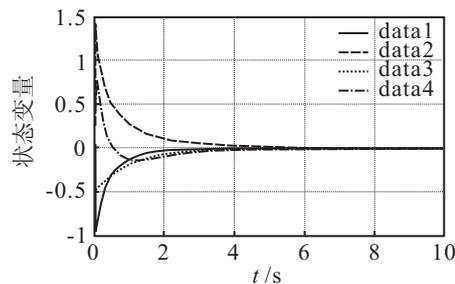


图 3 延时为 25 ms 的系统状态轨迹

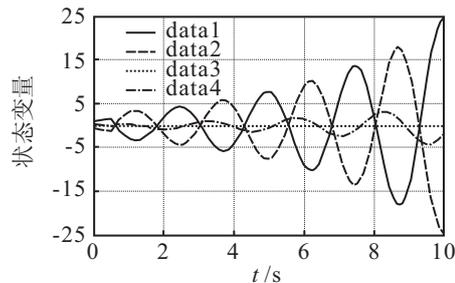


图 4 延时为 400 ms 的系统状态轨迹

从仿真结果可以看到, 当系统处于没有延时和延时小于 51 ms 的情况下, 系统的控制器能够保证系统状态的收敛性, 且响应速度较快, 如图 2 和图 3 所示. 当网络延时过大时 (见图 4), 系统状态出现了发散的现象.

5 结 论

本文研究了一类多延时多变量网络控制系统的建模和稳定性问题, 仿真结果验证了本文对系统稳定性分析推导的有效性. 该研究对实际工业生产过程中网络控制系统的设计具有一定的指导意义.

参考文献(References)

[1] Walsh G C, Ye H, Bushnell L G. Stability analysis of networked control system[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2002, 10(3): 438-446.