

文章编号: 1001-0920(2011)06-0806-05

MGM(1, m) 模型背景值的优化

熊萍萍^{1,2}, 党耀国¹, 王正新¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 南京信息工程大学 数理学院, 南京 210044)

摘要: 基于 MGM(1, m) 模型时间响应式的形式和累加生成序列的准指数规律, 研究了该模型的背景值优化问题. 在分析传统 MGM(1, m) 模型背景值误差的基础上, 利用非齐次指数函数逼近模型中各变量的一阶累加生成序列, 经过一系列数学公式的推导, 得到了 MGM(1, m) 模型背景值的优化公式. 通过实例表明了该式的优化效果, 同时表明了采用背景值优化的方法可以显著提高传统 MGM(1, m) 模型的模拟精度和预测精度.

关键词: 灰色系统; MGM(1, m) 模型; 背景值; 优化

中图分类号: N941.5

文献标识码: A

Optimization of background value in MGM(1, m) model

XIONG Ping-ping^{1,2}, DANG Yao-guo¹, WANG Zheng-xin¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. College of Mathematics and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China. Correspondent: XIONG Ping-ping, E-mail: xpp8125@163.com)

Abstract: Based on the structure of the time response formula in the multi-variable model and the accumulated sequence with quasi-exponential law, this paper researchs the problem of background value optimization of the model. After analyzing background value error of traditional MGM(1, m) model, the paper uses the functions with non-homogeneous exponential law to fit the accumulated sequences for every variable and gets the optimal formula of background value of MGM(1, m) model through a series of mathematical derivation. And the optimization effect is verified by examples. The result shows that the proposed method can significantly improve the simulation and prediction accuracy of the traditional MGM(1, m) model.

Key words: grey system; MGM(1, m) model; background value; optimization

1 引言

灰色预测是灰色系统理论的主要内容之一, 自邓聚龙创立灰色系统理论以来, 灰色预测模型在经济管理众多领域得到了广泛的应用^[1-2]. GM(1,1)模型是灰色系统预测理论的基础和核心, 它通过单变量的一阶微分方程模型揭示其内在发展规律, 用于单一时间序列的建模和预测. 而在实际问题中, 各变量之间往往是相互影响、相互制约的, 多变量 MGM(1, m) 模型^[3]从系统的角度对各变量进行统一描述, 能够较好地反映系统中各变量之间相互影响、相互制约的关系. MGM(1, m) 模型不仅可以建模, 而且可以预测, 它不同于 GM(1, n) 模型, 后者主要反映 $n-1$ 个相关因素序列对于系统特征序列一阶导的影响, 只反映系统

特征序列的变化规律, 而不能用于预测^[3].

自多变量灰色 MGM(1, m) 模型提出以来, 许多学者将该模型应用于实际的社会、经济系统中进行预测. 文献 [3] 提出了多变量灰色 MGM(1, m) 模型, 通过实例表明了该模型的精度高于分别用单变量建立的 GM(1,1) 模型的精度. [4] 将多变量灰色模型 MGM(1, m) 应用到变形观测系统中, 统一描述了变形体的整体变形趋势和变形规律. [5] 在多因子灰色模型的几种精确级差格式的基础上, 将误差融入级差格式, 基于理想状态时的相对误差提出了一种新的灰色模型. [6] 成功地将多变量灰色模型 MGM(1, n) 应用于研究与发展投资预测中, 得到了较理想的预测效果. [7] 将灰色多变量模型应用于深基坑围护结构变形中的预

收稿日期: 2010-03-09; 修回日期: 2010-07-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077); 全国教育科学规划教育部重点课题(DFA090215); 江苏省社会科学基金项目(08EYB005); 江苏省软科学项目(BR2010065).

作者简介: 熊萍萍(1981—), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究; 党耀国(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究.

测,得到了较为理想的模拟预测效果.[8]对于多变量非等间距数据序列,建立了一类GM(1,m)预测模型,用于模拟预测非等间距数据序列.[9]分析了多变量灰色模型MGM(1,m)中的背景值构造方法,利用向量连分式理论提出了用有理插值和数值积分中的梯形公式及外推法重构背景值,从而能够有效地提高模型的模拟精度和预测精度.

由于背景值的构造方法是影响预测精度和适应性的关键因素,对模型的背景值进行优化是改进模型的重要手段之一.对于GM(1,1)模型,文献[10]从 $z^{(1)}(k)$ 的几何意义出发,首次提出GM(1,1)模型的背景值优化,构造了一个新的背景值运算公式.[11]对传统GM(1,1)模型背景值构造的误差进行了分析,并利用齐次指数函数拟合一次累加生成序列,通过优化GM(1,1)模型的背景值提出了建模方法.[12]利用非齐次指数函数拟合一次累加生成序列,实现了GM(1,1)模型的背景值的最优化.[13]在此基础上,讨论了非等间距GM(1,1)模型背景值的优化问题.以上研究均是对单变量GM(1,1)模型背景值的优化,本文将在上述研究的基础上对多变量模型的背景值进行优化,用来对单变量模型背景值的优化方法进行推广,使其适用面更广、适用性更强.通过对具有一般性的算例进行分析,表明了文中的优化模型能提高模拟预测精度;而且通过应用实例对实际问题进行分析,以及建立背景值优化的MGM(1,3)模型对深基坑围护结构变形值进行预测,均表明了背景值优化的多变量模型的实用性和有效性.

2 传统MGM(1,m)模型的建立

设原始数据矩阵 $X^{(0)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_m^{(0)}\}^T$,其中 $X_j^{(0)}$ 表示第 j 个变量在 $1, 2, \dots, n$ 时刻的观测值序列,即 $X_j^{(0)} = \{x_j^{(0)}(1), x_j^{(0)}(2), \dots, x_j^{(0)}(n)\}$, $j = 1, 2, \dots, m$.对序列 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_m^{(0)}$ 分别进行一次累加,得到的新生成的数据矩阵称为原始数据矩阵 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成矩阵,记为 $X^{(1)}$,则有 $X^{(1)} = \{X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \dots, X_m^{(0)}\}^T$,其中 $X_j^{(1)}$ 为原始数据序列 $X_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列,即

$$X_j^{(1)} = \{x_j^{(1)}(1), x_j^{(1)}(2), \dots, x_j^{(1)}(n)\},$$

$$x_j^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i x_j^{(0)}(k),$$

$$j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n.$$

多变量MGM(1,m)模型的矩阵形式为

$$dX^{(1)}(t)/dt = AX^{(1)}(t) + B. \quad (1)$$

其中

$$X^{(1)}(t) = \{x_1^{(1)}(t), x_2^{(1)}(t), \dots, x_m^{(1)}(t)\}^T,$$

$$A = (a_{ij})_{m \times m}, B = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T.$$

式(1)的时间响应式为

$$X^{(1)}(t) = e^{A(t-1)}(X^{(1)}(1) + A^{-1}B) - A^{-1}B, \quad (2)$$

其中 $X^{(1)}(1) = \{x_1^{(1)}(1), x_2^{(1)}(1), \dots, x_m^{(1)}(1)\}^T$.

将式(1)离散化可得

$$x_j^{(0)}(k) = \sum_{l=1}^m a_{jl} z_l^{(1)}(k) + b_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, n. \quad (3)$$

其中

$$z_l^{(1)}(k) = 0.5(x_l^{(1)}(k-1) + x_l^{(1)}(k)),$$

$$l = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, n.$$

根据最小二乘法可求得参数列为

$$\hat{\alpha}_j = (\hat{a}_{j1}, \hat{a}_{j2}, \dots, \hat{a}_{jm}, \hat{b}_j)^T = (P^T P)^{-1} P^T Y_j.$$

其中

$$P = \begin{bmatrix} z_1^{(1)}(2) & z_2^{(1)}(2) & \dots & z_m^{(1)}(2) & 1 \\ z_1^{(1)}(3) & z_2^{(1)}(3) & \dots & z_m^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(1)}(n) & z_2^{(1)}(n) & \dots & z_m^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_j = \{x_j^{(0)}(2), x_j^{(0)}(3), \dots, x_j^{(0)}(n)\}^T,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

从而可得参数矩阵 A 和参数向量 B 的辨识值分别为

$$\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{m \times m}, \hat{B} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_m).$$

多变量MGM(1,m)模型的响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k) = e^{\hat{A}(k-1)}(X^{(1)}(1) + \hat{A}^{-1}\hat{B}) - \hat{A}^{-1}\hat{B}. \quad (4)$$

还原式向量为

$$\hat{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(1)}(k) - \hat{X}^{(1)}(k-1),$$

$$k = 2, 3, \dots, n. \quad (5)$$

3 MGM(1,m)模型背景值的优化方法研究

3.1 多变量模型背景值的误差分析

由式(4)和(5)可知,多变量MGM(1,m)模型的模拟预测值取决于参数矩阵 \hat{A} 和参数向量 \hat{B} ,而 \hat{A} 和 \hat{B} 的值依赖于 m 个原始数据序列和相应的背景值 $z_j^{(1)}(k)$, $j = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, n$.因此,背景值的合理构造将会对提高模型的模拟预测精度起到重要作用.

将方程组(1)中 m 个白化方程在区间 $[k-1, k]$ 上两边同时积分得到

$$\int_{k-1}^k \frac{dx_j^{(1)}}{dt} dt = \int_{k-1}^k [a_{j1}x_1^{(1)} + a_{j2}x_2^{(1)} + \dots + a_{jm}x_m^{(1)} + b_j] dt,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

化简为

$$x_j^{(0)}(k) = \sum_{l=1}^m a_{jl} \int_{k-1}^k x_l^{(1)} dt + b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, k = 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

将式(3)与(6)对比发现,第 j 个变量的传统背景值计算公式实际上是由 $z_j^{(1)}(k) = 0.5(x_j^{(1)}(k-1) + x_j^{(1)}(k))$ 近似代替 $\int_{k-1}^k x_j^{(1)} dt (j = 1, 2, \dots, m)$ 得到.

图1为第 j 个变量的传统背景值误差来源.由图1可知,第 j 个变量的传统背景值等于梯形面积,而实际值应该等于曲线 $x_j^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 上与 t 轴围成的面积 $\int_{k-1}^k x_j^{(1)} dt, j = 1, 2, \dots, m$,两者之差即为传统背景值计算公式的误差来源.因此,选择 $\int_{k-1}^k x_j^{(1)} dt$ 作为第 $j (j = 1, 2, \dots, m)$ 个变量背景值更加合理,为提高模型的模拟预测精度提供了理论保证.

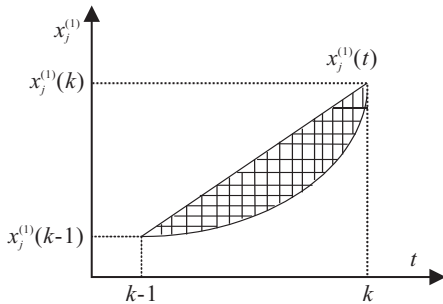


图1 第 j 个变量的传统背景值误差来源

3.2 多变量模型背景值的优化

由式(2)可以看出,多变量模型的一阶累加生成时间序列的时间响应式是非齐次指数向量的形式,为了消除由背景值带来的误差,根据一次累加生成序列的准指数律,不妨设

$$x_j^{(1)}(t) = b_j e^{a_j(t-1)} + c_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

其中 a_j, b_j, c_j 为待定常数,且满足

$$x_j^{(1)}(k) = b_j e^{a_j(k-1)} + c_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n.$$

记优化的背景值为

$$\bar{z}_j^{(1)}(k) = \int_{k-1}^k x_j^{(1)} dt, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

由于

$$\begin{aligned} x_j^{(0)}(k) &= x_j^{(1)}(k) - x_j^{(1)}(k-1) = \\ &= b_j e^{a_j(k-1)} - b_j e^{a_j(k-2)} = \\ &= b_j(1 - e^{-a_j}) e^{a_j(k-1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{x_j^{(0)}(k)}{x_j^{(0)}(k-1)} = \frac{b_j(1 - e^{-a_j}) e^{a_j(k-1)}}{b_j(1 - e^{-a_j}) e^{a_j(k-2)}} = e^{a_j}, \quad (8)$$

由式(8)可得

$$a_j = \ln x_j^{(0)}(k) - \ln x_j^{(0)}(k-1), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (9)$$

结合式(7)和(9)解得

$$b_j = \frac{x_j^{(0)}(k)[x_j^{(0)}(k)/x_j^{(0)}(k-1)]^{(1-k)}}{1 - x_j^{(0)}(k-1)/x_j^{(0)}(k)}. \quad (10)$$

又由初始条件可知

$$x_j^{(1)}(1) = x_j^{(0)}(1) = b_j e^{a_j(1-1)} + c_j = b_j + c_j,$$

结合式(10),则可得

$$c_j = x_j^{(0)}(1) - \frac{x_j^{(0)}(k)[x_j^{(0)}(k)/x_j^{(0)}(k-1)]^{(1-k)}}{1 - x_j^{(0)}(k-1)/x_j^{(0)}(k)}, \quad (11)$$

从而可得优化的背景值计算公式为

$$\begin{aligned} \bar{z}_j^{(1)}(k) &= \int_{k-1}^k [b_j e^{a_j(t-1)} + c_j] dt = \\ &= [x_j^{(1)}(k) - x_j^{(1)}(k-1)]/a_j + c_j = \\ &= x_j^{(0)}(k)/a_j + c_j. \end{aligned} \quad (12)$$

将式(9)和(11)代入(12),得到优化的背景值为

$$\begin{aligned} \bar{z}_j^{(1)}(k) &= \frac{x_j^{(0)}(k)}{\ln x_j^{(0)}(k) - \ln x_j^{(0)}(k-1)} + x_j^{(0)}(1) + \\ &= \frac{[x_j^{(0)}(k-1)]^{k-1}}{[x_j^{(0)}(k)]^{k-3} [x_j^{(0)}(k-1) - x_j^{(0)}(k)]}. \end{aligned} \quad (13)$$

3.3 利用优化的背景值建模

根据最小二乘法可得到优化模型的灰色微分方程

$$x_j^{(0)}(k) = \sum_{l=1}^m a_{jl} \bar{z}_l^{(1)}(k) + b_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, m, i = 2, 3, \dots, n$$

的参数列为

$$\hat{\mathbf{a}}_j = (\hat{a}_{j1}, \hat{a}_{j2}, \dots, \hat{a}_{jm}, \hat{b}_j)^T = (\bar{P}^T \bar{P})^{-1} \bar{P}^T \bar{Y}_j. \quad (14)$$

其中数据矩阵 \bar{P} 和向量 \bar{Y}_j 分别为

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{z}_1^{(1)}(2) & \bar{z}_2^{(1)}(2) & \dots & \bar{z}_m^{(1)}(2) & 1 \\ \bar{z}_1^{(1)}(3) & \bar{z}_2^{(1)}(3) & \dots & \bar{z}_m^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{z}_1^{(1)}(n) & \bar{z}_2^{(1)}(n) & \dots & \bar{z}_m^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Y}_j = \{x_j^{(0)}(2), x_j^{(0)}(3), \dots, x_j^{(0)}(n)\}^T,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

白化微分方程组 $dX^{(1)}(t)/dt = AX^{(1)}(t) + B$ 的时间响应函数为

$$X^{(1)}(t) = e^{A(t-1)}(X^{(1)}(1) + A^{-1}B) - A^{-1}B.$$

灰色微分方程 $x_j^{(0)}(k) = \sum_{l=1}^m a_{jl} \bar{z}_l^{(1)}(k) + b_j$ 的时间响应式为

$$\hat{X}^{(1)}(k) = e^{\hat{A}(k-1)}(X^{(1)}(1) + \hat{A}^{-1}\hat{B}) - \hat{A}^{-1}\hat{B}.$$

还原式为

$$\hat{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(1)}(k) - \hat{X}^{(1)}(k), \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

本文提出的背景值优化公式主要适用于一阶累加生成序列近似为非齐次指数函数的原始数据序列. 由于背景值优化公式能有效地消除原背景值所产生的误差, 对这样一类数据序列利用优化的背景值建模, 能进一步提高模拟预测精度.

4 算例分析

设原始数据序列为

$$X_1^{(0)} = \{8.64, 11.42, 13.54, 16.04, 19.02, 22.55, 26.72, 31.67, 37.55\},$$

$$X_2^{(0)} = \{9.66, 16.53, 18.64, 21.02, 23.69, 26.72, 30.12, 33.97, 38.29\}.$$

经计算可知, $X_1^{(0)}$ 和 $X_2^{(0)}$ 所对应的一阶累加生成序列 $X_1^{(1)}$ 和 $X_2^{(1)}$ 分别近似为非齐次指数函数

$$x_1^{(1)}(t) \approx 52e^{0.17t} - 53, x_2^{(1)}(t) \approx 115e^{0.12t} - 120.$$

下面对 $X_1^{(0)}$ 和 $X_2^{(0)}$ 分别建立传统的多变量 MGM(1,2) 模型和本文优化的多变量 MGM(1,2) 模型. 在建模过程中, 本文采用原始数据的前 7 个数据来建模, 后 2 个数据来预测, 以检验预测的效果. 传统的 MGM(1,2) 模型和本文优化的 MGM(1,2) 模型对于 2 个序列模拟值的平均相对误差见表 1, 对于 2 个序列的预测值和相对误差分别见表 2 和表 3.

表 1 2 种模型对于 2 个序列模拟值的平均相对误差

模 型	平均相对误差/%	
	\bar{v}_1	\bar{v}_2
传统的 MGM(1,2)模型	0.284	0.163
优化的 MGM(1,2)模型	0.044	0.078

表 2 传统 MGM(1,2) 模型对应的预测值和相对误差

k	实际值		预测值		相对误差/%	
	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	$\hat{x}_2^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$
8	31.67	33.97	31.54	33.86	0.411	0.324
9	37.55	38.29	37.36	38.17	0.506	0.313

表 3 本文 MGM(1,2) 优化模型对应的预测值和相对误差

k	实际值		预测值		相对误差/%	
	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	$\hat{x}_2^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$
8	31.67	33.97	31.66	33.99	0.032	0.059
9	37.55	38.29	37.52	38.38	0.080	0.235

注 1 $\bar{v}_i = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 v_i(k)$, 其中 $v_i(k)$ 为第 i 个序列在时序 k 上的模拟相对误差, $i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, 7$.

注 2 $v_i(k)$ 为第 i 个序列在时序 k 上的预测相对误差, 且 $v_i(k) = |\hat{x}_i^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)|/x_i^{(0)}(k)$, $i = 1, 2, k = 8, 9$.

从表 1~表 3 可以看出, 对一阶累加生成序列近似为非齐次指数函数的原始数据序列建立文中的背景值优化模型, 其模拟预测效果优于传统模型. 由原始数据序列选择的一般性可知, 对于满足条件的原始数据序列采用优化的背景值建模, 均能提高模型的模拟预测精度.

5 实例分析

北京市地铁十号线熊奥地铁区间工程采用明挖法施工, 并以 $\phi 800 \text{ mm} @ 1400$ 的钻孔灌注桩为基坑围护结构, 基坑开挖深度最深为 20 m. 由于该工程所处地质条件较为复杂, 基坑开挖深, 为了确保结构及周围建筑物的安全, 进行基坑的变形预测. 通过对原始数据进行比较、筛选取得 3 组具有代表性且真实反应基坑变形规律的原始数据序列. 本文选取 3 组基坑变形的原始数据序列的后 9 个数据 (如表 4 所示^[7]) 建立本文优化的多变量模型和传统的多变量模型, 并分别对深基坑围护结构变形值进行模拟预测.

表 4 3 组基坑变形的原始数据序列值 mm

序号 k	序列 $X_1^{(0)}$	序列 $X_2^{(0)}$	序列 $X_3^{(0)}$
1	8.48	9.29	10.07
2	12.77	13.67	14.52
3	15.10	16.23	17.28
4	17.87	19.00	20.05
5	19.66	20.84	21.84
6	22.30	23.33	24.28
7	24.32	25.39	26.34
8	26.10	27.22	28.15
9	28.90	29.35	30.40

经计算可知, $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ 和 $X_3^{(0)}$ 所对应的一阶累加生成序列 $X_1^{(1)}$, $X_2^{(1)}$ 和 $X_3^{(1)}$ 分别近似为非齐次指数函数

$$x_1^{(1)}(t) \approx 112.2e^{0.1068t} - 117.3,$$

$$x_2^{(1)}(t) \approx 131.2e^{0.0997t} - 136.8,$$

$$x_3^{(1)}(t) \approx 146.8e^{0.0953t} - 152.6.$$

下面对 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ 和 $X_3^{(0)}$ 分别建立传统的多变量 MGM(1,3) 模型和本文优化的多变量 MGM(1,3) 模型. 在建模过程中, 本文采用表 4 中前 7 个数据来建模, 后 2 个数据来预测, 以检验预测的效果. 传统的 MGM(1,3) 模型和本文优化的 MGM(1,3) 模型对于 3 个序列模拟值的平均相对误差见表 5, 对于 3 个序列的预测值和相对误差分别见表 6 和表 7.

表 5 2 种模型对于 3 个序列模拟值的平均相对误差

模 型	平均相对误差/%		
	\bar{v}_1	\bar{v}_2	\bar{v}_3
传统的 MGM(1,3)模型	8.676	8.654	8.616
优化的 MGM(1,3)模型	7.908	7.729	6.213

表 6 传统 MGM(1,3) 模型对应的预测值和相对误差

k	实际值/mm			预测值/mm			相对误差/%		
	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$x_3^{(0)}(k)$	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	$\hat{x}_2^{(0)}(k)$	$\hat{x}_3^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v_3(k)$
8	26.10	27.22	28.15	25.64	26.66	27.59	1.765	2.071	2.001
9	28.91	29.35	30.40	28.08	29.13	30.11	2.825	0.763	0.942

表 7 本文 MGM(1,3) 优化模型对应的预测值和相对误差

k	实际值/mm			预测值/mm			相对误差/%		
	$x_1^{(0)}(k)$	$x_2^{(0)}(k)$	$x_3^{(0)}(k)$	$\hat{x}_1^{(0)}(k)$	$\hat{x}_2^{(0)}(k)$	$\hat{x}_3^{(0)}(k)$	$v_1(k)$	$v_2(k)$	$v_3(k)$
8	26.10	27.22	28.15	25.81	26.89	27.80	1.105	1.199	1.227
9	28.91	29.35	30.40	28.31	29.29	30.12	2.026	0.213	0.921

注 3 $\bar{v}_i = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^7 v_i(k)$, 其中 $v_i(k)$ 为第 i 个序列

在时序 k 上的模拟相对误差, $i = 1, 2, 3, k = 1, 2, \dots, 7$.

注 4 $v_i(k)$ 为第 i 个序列在时序 k 上的预测相对误差, 且 $v_i(k) = |\hat{x}_i^{(0)}(k) - x_i^{(0)}(k)|/x_i^{(0)}(k)$, $i = 1, 2, 3, k = 8, 9$.

由表 5~表 7 可见, 本文提出的背景值优化模型对于 3 个序列的模拟预测效果均好于传统模型, 模拟预测精度有了进一步的改善. 其主要原因在于对一阶累加生成序列近似为非齐次指数函数的原始数据序列, 建立了文中提出的背景值优化模型. 因此, 在实际应用中, 可以采用背景值优化的多变量模型以获取更好的模拟和预测效果.

6 结 论

本文对传统 MGM(1, m) 模型的背景值进行了优化, 分析了背景值优化公式的主要适应条件, 得到了优化的多变量 MGM(1, m) 模型. 该优化模型在考虑了多变量原始序列之间相互作用、相互联系的关系的基础上, 消除了原背景值带来的误差, 使得建模更加合理, 从而有效地提高模拟预测精度. 同时, 该模型克服了单变量模型中单点局部分析的不足, 综合了多变量之间的相关信息, 从整体上对多变量原始数据进行适当的处理, 建立了更为合理的模型, 进而能够对多变量序列作出更精确的预测. 因此, 背景值优化的多变量模型具有一定的实际意义和广泛的应用前景.

参考文献(References)

- [1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002.)
- [2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [3] 翟军, 盛建明, 冯英浚. MGM(1, n) 灰色模型及其应用[J].

系统工程理论与实践, 1997, 5(5): 109-113.

(Zhai J, Sheng J M, Feng Y J. The grey model MGM(1, n) and its application[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 1997, 5(5): 109-113.)

- [4] 石世云. 多变量灰色模型 MGM(1, n) 在变形预测中的应用[J]. 测绘通报, 1998, (10): 9-18.
(Shi S Y. The application of the grey multi-variable MGM(1, n) in transforming prediction[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 1998, (10): 9-18.)
- [5] 李小霞, 同小军, 陈锦云. 多因子灰色 MGM p (1, n) 优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 4(4): 47-51.
(Li X X, Tong X J, Chen M Y. MGM p (1, n) optimization model[J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 2003, 4(4): 47-51.)
- [6] 王五祥, 张维, 崔和瑞, 等. 多变量灰色模型 MGM(1, n) 在 RD 投资预测中的应用[J]. 研究与发展管理, 2006, 18(2): 92-96.
(Wang W X, Zhang W, Cui H R, et al. Application of grey multi-variable model MGM(1, n) in the RD investment forecast[J]. RD Management, 2006, 18(2): 92-96.)
- [7] 冯志, 李兆平, 李祎. 多变量灰色系统预测模型在深基坑围护结构变形预测中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(12): 4319-4324.
(Feng Z, Li Z P, Li Y. Application of a multi-point grey model to deformation prediction of supporting structure for deep pit[J]. Chinese J of Rock Mechanics and Engineering, 2007, 26(12): 4319-4324.)
- [8] 王丰效. 多变量非等间距 GM(1, m) 模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 388-390.
(Wang F X. Multivariable non-equidistance GM(1, m) model and its application[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(3): 388-390.)
- [9] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 基于向量连分式理论的 MGM(1, n) 模型[J]. 系统工程, 2008, 26(10): 47-51.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. MGM(1, n) based on vector continued fractions theory[J]. Systems Engineering, 2008, 26(10): 47-51.)

(下转第 815 页)