

文章编号: 1001-0920(2011)05-0785-04

## 基于支持向量机回归的 Lyapunov 指数计算方法研究

张 鹏, 倪世宏

(空军工程大学 工程学院, 西安 710038)

**摘 要:** Lyapunov 指数是描述动力学系统混沌性质的重要指标, 在小样本条件下准确、快速地计算 Lyapunov 指数是一个难题. 对此, 提出一种基于支持向量机回归的 Lyapunov 指数计算方法, 通过量子遗传算法对支持向量机模型的参数进行优化, 推导了支持向量机回归应用于计算 Lyapunov 指数的公式. 通过对混沌序列进行仿真实验, 仿真结果表明, 在小样本数据情况下, 此方法可行有效.

**关键词:** 支持向量机回归; Lyapunov 指数; 量子遗传算法; 小样本

**中图分类号:** TP183

**文献标识码:** A

### Algorithm for computing Lyapunov exponent based on support vector

ZHANG Peng, NI Shi-hong

(The Engineering Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China. Correspondent: ZHANG Peng, E-mail: zhangpeng25@gmail.com)

**Abstract:** Lyapunov exponent(LE) is an important indicator to describe the nature of chaotic dynamical systems. It's difficult to calculate LE accurately and fast with small sample size. In this paper, an algorithm for computing LE based on support vector regression(SVR) is proposed, the parameters of support vector machine(SVM) model are optimized by using quantum genetic algorithm(QGA), and the formula of the LE based on SVR is derived. Simulation results show that the proposed algorithm is feasible and effective with much less samples.

**Key words:** support vector regression; Lyapunov exponent; quantum genetic algorithm; small sample size

## 1 引 言

在动力学系统分析中, Lyapunov 指数是描述系统性质的重要定量指标, 一个系统是否存在混沌特性, 可由它的 Lyapunov 指数有无正值来确定<sup>[1]</sup>. 在航空发动机、微电子等工程领域中, Lyapunov 指数不仅能用于判断系统的混沌情况, 还能用于系统控制与故障诊断等方面<sup>[2-3]</sup>.

在实际工程中, 描述动力系统演化规律的微分方程或映射关系往往是未知的, 利用标准的方法<sup>[4]</sup>求解 Lyapunov 指数不可行. 到目前为止, 利用观察数据计算 Lyapunov 指数的方法可分为两类: 一类是轨道跟踪法, 以 Wolf 法<sup>[5]</sup>为代表; 一类是雅可比法<sup>[6]</sup>, 通过相空间重构求解雅可比矩阵的特征值. 这些方法中, 有的计算量巨大, 有的需要较多的数据样本量. 在小样本数据量条件下如何准确、快速地计算 Lyapunov 指数已成为人们关注的重要问题.

近年来, 有人利用神经网络逼近非线性函数的

特性, 提出了基于神经网络的 Lyapunov 指数计算方法<sup>[7]</sup>, 但该方法存在局部最优和所需样本较多等问题. Vapnik 等人基于统计学习理论提出了支持向量机(SVM)<sup>[8]</sup>. SVM 是根据结构风险最小化(SRM)原则设计, 针对有限样本情况下的一种机器学习算法, 已广泛应用于解决分类和回归问题. 它在很大程度上解决了有限样本下数据模型构建和局部极小问题等. 文献[9]提出用最小二乘支持向量机(LS-SVM)计算时间序列的 Lyapunov 指数谱, 并验证了方法的有效性, 但仍然存在所需样本较多等问题. 本文用量子遗传算法(QGA)对 SVM 模型的参数进行寻优, 再利用支持向量机回归(SVR)算法在小样本条件下良好的函数逼近能力, 求解动力学系统 Lyapunov 指数, 推导了 SVR 拟合函数的偏导求解公式, 给出了 QGA 优化 SVM 参数的步骤. 通过对不同动力学参数情况下混沌序列的仿真求解, 以及与多种方法对比, 结果表明本文所用方法在小样本条件下具有较高的精度.

收稿日期: 2010-03-16; 修回日期: 2010-07-08.

基金项目: 航空科学基金项目(20080896009).

作者简介: 张鹏(1982-), 男, 博士生, 从事人工智能、飞机故障诊断的研究; 倪世宏(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事飞机状态监控与地面数据处理等研究.

## 2 利用时序数据计算 Lyapunov 指数

利用数据序列计算系统的 Lyapunov 指数, 首先要利用相空间重构理论重现此系统; 然后用支持向量机回归算法计算系统的 Oseledec 矩阵; 最后计算此矩阵的特征值便可得到 Lyapunov 指数<sup>[10]</sup>.

### 2.1 相空间重构

基于 Takens 嵌入定理<sup>[11]</sup>, 可从一维混沌时间序列中重构一个与原动力学系统在拓扑意义下等价的相空间, 这就是相空间重构. 其步骤如下:

假设对一个动力学系统测量得到一维数据序列  $x(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . 其中:  $x(n)$  为  $t_0 + n\tau$  时刻的观测值,  $\tau$  为采样时间间隔,  $t_0$  为采样起始时间. 利用该序列可在  $d$  维欧氏空间构造出一条轨道

$$y(t) = [x(t), x(t+T), \dots, x(t+(d-1)T)]. \quad (1)$$

其中:  $d$  为嵌入维数;  $T$  为时滞, 是  $\tau$  的整数倍.  $y(t)$  是  $d$  维重构相空间中的一点, 它随时间的变化构成了  $d$  维欧氏空间的一个新的动力学系统, 由其自身迭代映射表示为

$$y(t+T) = F(y(t)). \quad (2)$$

式 (2) 所表达的动力学系统保留了原系统内在结构的几何不变性, 通过对它的分析, 即可了解原系统的动力学特性.

### 2.2 Oseledec 矩阵的确定

映射  $F$  的可微性表达为式 (2) 的微小扰动获得, 即

$$\Delta y(t+T) = J(y(t)) * \Delta y(t), \quad (3)$$

其中  $J(y(t))$  是映射  $F$  的雅可比矩阵. 设映射  $F$  的第  $i$  个分量是  $f_i$ ,  $y(t)$  的第  $j$  个分量是  $x_j$ , 则有

$$J(y(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_d} \\ \frac{\delta f_2}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_2}{\delta x_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_d}{\delta x_1} & \frac{\delta f_d}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_d}{\delta x_d} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

根据式 (2) 和映射  $F$  的假设可知

$$f_i(y(t)) = x(t+iT) = x_{i+1}, \quad (5)$$

因此  $J(y(t))$  的形式可表达为<sup>[7]</sup>

$$J(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_d}{\delta x_1} & \frac{\delta f_d}{\delta x_2} & \frac{\delta f_d}{\delta x_3} & \dots & \frac{\delta f_d}{\delta x_d} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

按照此规律计算  $N$  次, 有

$$J^N = J(t+(N-1)T)J(t+(N-2)T) \dots J(t). \quad (7)$$

根据 Oseledec 乘积遍历性定理<sup>[10]</sup>, 可构造出 Oseledec 矩阵

$$\lim_{N \rightarrow \infty} [\{J^N\}^T \{J^N\}]^{1/2N}, \quad (8)$$

矩阵特征值的对数等于原数据序列的 Lyapunov 指数.

## 3 支持向量机回归算法计算 Lyapunov 指数

### 3.1 SVR 基本理论

SVR 的基本思想是通过一个非线性映射  $\varphi(\cdot)$  将数据  $x$  映射到高维特征空间 (Hilbert 空间), 然后在此空间中寻找线性函数

$$f(x) = \omega^T \varphi(x) + b. \quad (9)$$

其中:  $f(x)$  为  $x$  的非线性函数, 同时又是  $\varphi(x)$  的线性函数;  $\omega$  为权值矢量;  $b$  为阈值. 这样, 在高维特征空间建立的线性回归对应于低维输入空间的非线性回归.

设给定训练集  $\{x_k, y_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, d$ , 根据 SRM 准则, 在特征空间进行最优化逼近的  $f(x)$  应使得如下风险函数最小:

$$J = \frac{1}{2} \omega^T \omega + C \sum_{i=1}^d L(f(x_i), y_i). \quad (10)$$

其中:  $C$  为平衡因子; 惩罚函数  $L(\cdot)$  通常取线性  $\varepsilon$  不敏感损失函数, 定义为

$$L(f(x), y) = \max(0, |f(x) - y| - \varepsilon). \quad (11)$$

通过采用对偶原理、拉格朗日乘子法及核函数技术<sup>[12]</sup>, 将式 (10) 的最小风险函数等价于如下二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min_{w, b, L} J &= \sum_{i=1}^d y_i (a_i^* - a_i) - \varepsilon \sum_{i=1}^d a_i^* - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d X_i (a_i^* - a_i) (a_j^* - a_j) K(x_i, x_j); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^d (a_i^* - a_i) = 0,$$

$$a_i^*, a_i \in [0, C], \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

其中核函数  $K(\cdot, \cdot)$  为满足 Mercer 条件的任意对称函数, 相当于 Hilbert 空间的内积, 表达为

$$K(x_i, x_j) = \varphi^T(x_i) \varphi(x_j). \quad (13)$$

常用的核函数有以下几种:

1) 线性核函数  $K(x, x_k) = x^T x_k$ ;

2) 多项式核函数  $K(x, x_k) = (x^T x_k + 1)^d$ ;

3) 高斯核函数  $K(x, x_k) = \exp\left[-\frac{\|x - x_k\|^2}{2\sigma^2}\right]$ .

求解式 (12) 的二次规划问题, 可得  $a_i^*$  和  $a_i$ , 然后结合 KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件可得偏置  $b$ , 此时经拟合后的系统可表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^d (a_i^* - a_i) K(x_i, x_j) + b. \quad (14)$$

### 3.2 支持向量机参数选择的量子遗传算法

量子遗传算法(QGA)是量子计算和遗传算法相结合的产物,将量子的态矢量表示引入遗传算法中,具有比遗传算法更好的搜索效率和收敛性.针对SVR中参数选择的问题,用QGA对参数进行自动搜索和确定,实现SVM模型的智能寻优,提高模型的拟合精度.在量子遗传算法中,染色体用量子比特(qubit)来表达,通常写成以下形式:

$$|\varphi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (15)$$

且满足

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (16)$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是一对复数,称为量子态的概率幅度,量子比特的状态是它们的线性组合.

在量子遗传算法中,量子门是最终实现演化操作的执行机构.常用的量子门如量子选择门,其调整操作如下:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}. \quad (17)$$

其中: $[\alpha_i \ \beta_i]^T$ 为染色体中的第*i*个量子位, $\theta_i$ 为旋转角.旋转角 $\theta$ 的取值可采用文献[13]的调整策略.

用QGA选择SVM模型参数的具体步骤如下:

**Step 1:** 设置基本系统参数,包括最大叠代次数、种群大小、染色体个数、支持向量机两个参数(平衡因子*C*和不敏感损失函数 $\epsilon$ )所占量子位数、定义域、交叉和变异概率等.

**Step 2:** 随机产生初始化种群

$$P(t) = [p_1^t, p_2^t, \dots, p_n^t], \quad (18)$$

其中 $p_i^t = \begin{bmatrix} \alpha_i^t \\ \beta_i^t \end{bmatrix}$ 为第*t*代种群中的第*i*个个体,且有

$$p_i^t = \begin{bmatrix} \alpha_1^t & \alpha_2^t & \dots & \alpha_m^t \\ \beta_1^t & \beta_2^t & \dots & \beta_m^t \end{bmatrix}, \quad (19)$$

*m*为量子位数,即量子染色体长度.设置代数*t* = 1.

**Step 3:** 根据*P(t)*中概率幅的取值情况构造解集

$$R(t) = \{\alpha_1^t, \alpha_2^t, \dots, \alpha_n^t\}, \quad (20)$$

其中 $\alpha_i^t$ 为长度为*m*的二进制串.取出*R(t)*的个体用SVR求回归误差,若有个体回归误差达到误差精度,则算法终止;否则继续.

**Step 4:** 使用基本遗传算法的选择、复制、变异及位交叉更新*R(t)*,保留最优个体*Q(t)*.

**Step 5:** 判断*Q(t)*是否连续*N*代没有变化( $N \geq 20$ ).若是,则以最优个体*Q(t)*为目标,使用量子旋转门更新种群*P(t)*.

**Step 6:** 满足最大迭代次数或误差精度,停止计算,输出结果;否则, $t = t + 1$ ,转Step 3.其中,QGA寻

优的目标函数为SVM训练的结果(即回归误差),最终得到回归误差最小、拟合精度最高的SVM模型,然后再求解Lyapunov指数.

### 3.3 利用支持向量机回归求 Lyapunov 指数

为求解Lyapunov指数,采用支持向量机回归算法对式(6)中的*f<sub>d</sub>*进行拟合.输入数据为*y(t)*,即*x(t)*,*x(t + T)*, $\dots$ ,*x(t + (d - 1)T)*共*d*个输入;输出数据为*x(t + d × T)*.通过求解式(12),实现对*f<sub>d</sub>*的拟合,输出为式(14).取核函数为高斯核函数,并对式(14)求偏导,即

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_d(x)}{\partial x_k} &= \frac{\partial \left[ \sum_{i=1}^n (a_i^* - a_i) K(x, x_i) + b \right]}{\partial x_k} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (a_i^* - a_i) \frac{\partial \exp \left( \frac{-\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial x_k} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (a_i^* - a_i) K(x, x_i) \frac{\partial \left( \frac{-\|x - x_i\|^2}{2\sigma^2} \right)}{\partial x_k} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[ (a_i^* - a_i) K(x, x_i) \frac{(x_i - x_k)}{\sigma^2} \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

通过对不同*x<sub>k</sub>*求偏导可得出式(6)最后1行;进一步计算Oseledec矩阵与其特征值,可求出原数据序列的Lyapunov指数.

为叙述方便,后面将这种利用支持向量机回归求Lyapunov指数的方法简称为SVR-LE法.

## 4 仿真计算

以Logistic和Henon两个常见动力学系统为例,采用本文提出的SVR-LE法来计算Lyapunov指数.动力学系统方程、周期解、混沌相空间和根据微分方程求出的Lyapunov指数参见文献[14].

仿真实验中,动力学系统参数与初值、样本参数、相空间重构的维数、SVR的参数等如表1所示.其中SVR的参数是经过QGA寻优得到的.

表1 实验参数

	Logistic	Henon
动力学系统参数	$a = [3.7, 3.98]$	$a = [1.05, 1.4], b = 0.3$
初始值	$x_0 = 0.05$	$x_0 = 0.25, y_0 = 0.25;$
样本范围	[2001, 2050]	[2001, 2050]
时延	1	1
相空间维数	2	3
SVR系统参数	$C = 10, e = 0.005$	$C = 18, e = 0.001$
核函数	gauss	gauss
核函数参数	$\sigma = 0.5$	$\sigma = 0.5$

通过改变动力学系统参数,使得Lyapunov指数发生变化,这样所进行的计算更具有普遍性.利用本文SVR-LE法求出的Lyapunov指数与根据动力学系

统方程求出的 Lyapunov 指数比较如图 1 和图 2 所示。

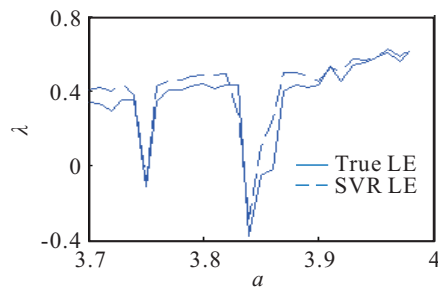


图 1 Logistic 系统 Lyapunov 指数比较

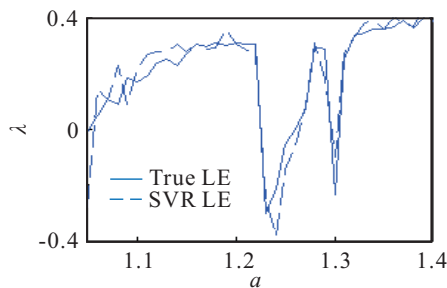


图 2 Henon 系统 Lyapunov 指数比较

为验证 SVR-LE 法与其他方法的优劣, 选择 Wolf 法<sup>[5]</sup>, Rosenstein 法<sup>[15]</sup>, RBF 神经网络法<sup>[16]</sup>, MLP 法<sup>[17]</sup>与 SVR-LE 法进行误差对比分析, 其结果如表 2 所示。

表 2 SVR 与 Wolf, Rosenstein 等的误差比较

系统	方法	LE 误差
Henon	Wolf(128)	0.05
	Rosenstein(200)	0.0229
	RBF(100)	0.0117
	MLP (100)	0.0060
	SVR(50)	0.0059
Logistic	Rosenstein(200)	0.0715
	SVR(50)	0.0070

表 2 括号中的值为各方法使用的样本数, LE 误差为计算值与真实值的平均相对误差. Rosenstein 法必须使用 200 个以上才能求解; RBF 法与 MLP 法在样本减少的情况下, 其误差大大增加. 从图 2, 图 3 和表 2 可以看出, 在小样本情况下, SVR-LE 法求解 Lyapunov 指数是可行且有效的。

## 5 结 论

支持向量机具有逼近任意非线性映射和处理复杂信息的能力, 且具有较快的收敛速度, 在小样本条件下有着一定优势. 采用量子遗传算法对支持向量机进行优化, 能自动得到最佳参数. 本文利用改进的支持向量机对动力学系统进行拟合, 所设计的 SVR-LE 法在小样本条件下能够准确地计算动力学系统的 Lyapunov 指数. 对两个混沌系统在参数变化下进

行仿真实验, 结果表明, 该方法在样本较少的情况下是可行且有效的。

## 参考文献(References)

- [1] Ludwig Arnold. Random dynamical systems[M]. Berlin: Springer, 2006: 113-117.
- [2] 李天亮, 何立明, 程邦勤, 等. 基于系统混沌指数的航空发动机状态监测[J]. 航空动力学报, 2008, 23(11): 54-59. (Li T L, He L M, Cheng B Q, et al. Condition monitoring for aero-engine based on chaos exponents for dynamic system[J]. J of Aerospace Power, 2008, 23(11): 54-59.)
- [3] 姚明海, 齐东莲, 赵光宙. 基于李雅普诺夫指数的离散混沌系统的控制研究[J]. 控制与决策, 2002, 17(2): 171-174. (Yao M H, Qi D L, Zhao G Z. On control of discrete time chaotic systems based on Lyapunov exponents[J]. Control and Decision, 2002, 17(2): 171-174.)
- [4] Greene J M, Kim J S. The calculation of Lyapunov spectra[J]. Physica D, 1987, 24(1/2/3): 213-225.
- [5] Wolf A, Swift J, Swinney H, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physical D, 1985, 16(3): 285-317.
- [6] Ellner S, Callant A R, Mecaffrey D, et al. Converge rates and data requirements for Jacobian-based estimates of Lyapunov exponents from data[J]. Physics Letters A, 1991, 153(6/7): 357-363.
- [7] 田宝国, 姜璐, 谷可. 基于神经网络的 Lyapunov 指数谱的计算[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(8): 9-13. (Tian B G, Jiang L, Gu K. The calculation of Lyapunov exponents based on the neural network[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2001, 21(8): 9-13.)
- [8] Vapnik V N. An overview of statistical learning theory[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1999, 10(5): 988-999.
- [9] 张勇, 关伟. 采用 LS-SVM 计算时间序列的 Lyapunov 指数谱[J]. 计算机工程与应用, 2009, 45(31): 196-199. (Zhang Y, Guan W. Calculation Lyapunov exponent spectrum of time series based on least-squared support vector machine[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(31): 196-199.)
- [10] Arnold L, Cong N D, Oseledec V J. Jordan normal form for linear cocyclespsu[J]. Random Operators and Stochastic Equations, 1997, 7(4): 303-358.
- [11] Takens F. Determing strange attractors in turbulence[J]. Lecture notes in Math, 1981, 898: 361-381.
- [12] Vapnik V N. 统计学习理论的本质[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000: 126-151. (Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000: 126-151.)

(下转第 793 页)