第 26 卷 第 4 期
Vol. 26 No. 4

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 4 月
Apr. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 04-0558-07

# 具有联合椭圆不确定集与概率约束的鲁棒投资组合选择

凌爱凡, 吕江林

(江西财经大学 金融与统计学院，南昌 330013)

**摘　要:** 针对参数在一个联合椭圆不确定集中变化的情形, 建立了一个具有概率约束的鲁棒投资组合模型, 并将其转化为可由内点算法求解的含线性矩阵不等式 (LMI) 约束的凸规划问题. 应用实际交易数据对所提出的模型进行数值实验和比较, 结果表明此模型能够获得具有更好财富增长率的投资策略, 并能有效地分散最优投资组合的风险.

**关键词:** 鲁棒优化；投资组合；椭圆不确定集；概率约束；线性矩阵不等式

**中图分类号:** F224.3；O221　　　　**文献标识码:** A

# Robust portfolio selections with joint ellipsoidal uncertainty set and probability constraints

*LING Ai-fan*, *LV Jiang-lin*

(School of Finance and Statistics，Jiangxi University of Finance and Economics，Nanchang 330013，China. Correspondent：LING Ai-fan，E-mail：aifanling@yahoo.com.cn)

**Abstract:** A robust portfolio selection model with probability constraints is established under the assumptions that parameters of model vary in a joint ellipsoidal uncertainty set. Then the proposed problem is converted into a convex programming problem with LMI constraints that can be solved by using interior point algorithms. The empirical analysis and comparisons from the real market data indicate that the proposed model can obtain a portfolio strategy with the better wealth growth rate and diversify the risk of the optimal portfolio efficiently.

**Key words:** robust optimization；portfolio selection；ellipsoidal uncertainty set；probability constraint；linear matrix inequality

## 1 引　言

基于鲁棒最优化技术[1]的鲁棒投资组合模型, 由于能有效处理模型的不确定性和传统均值-方差 (M-V) 模型的不足而受到了相关领域学者的广泛关注. 2003 年, Goldfarb 等人[2]首先考虑了一个具有不确定参数的因子模型, 提出了鲁棒 M-V 及鲁棒 VaR (value at risk) 投资组合问题. 在Goldfarb 等人提出的鲁棒 M-V 投资组合模型中, 假设资产的随机收益 $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^n$ 由如下因子模型给出:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu} + V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} + \boldsymbol{\epsilon}, \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{R}^n$ 为均值收益向量, $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{R}^m$ 为驱动市场的 $m(m < n)$ 个随机因子向量, $V \in \boldsymbol{R}^{m\times n}$ 为因子负载矩阵, $\boldsymbol{\epsilon}$ 为收益残余向量. 随后, 鲁棒投资组合问题引起了国内外许多学者的关注[3-6].

Goldfarb 等人假设模型的参数 $\boldsymbol{\mu}, V$ 在一些可分的不确定集中变化, 这些可分不确定集一般具有如下 2 个特点[7]: 1) 不确定集的真实置信水平实际上是不能确定的, 但可以证明该置信水平比预先设定的置信水平高, 从而所得到的投资策略更保守; 2) 不确定集的形式完全或部分由各个分量区间形式的笛卡尔积构成.

为了克服可分不确定集的这些不足, 最近, Lu[8-9] 推广了 Goldfarb 的鲁棒因子模型, 建立了一种具有联合不确定集的鲁棒均值-方差投资组合模型. 由 Lu 的实证研究可知, 具有联合不确定集的鲁棒 M-V 投资组合模型比具有可分不确定集的鲁棒 M-V 模型更好的性能和可控的置信水平. 然而, 在 Lu 的研究中, 仅考虑了用方差控制投资组合的风险. 基于此, 本文考

**收稿日期:** 2010-01-02；**修回日期:** 2010-03-08.

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(71001045, 10971162)；国家社会科学基金项目(BJY145)；江西省教育厅青年科技项目(GJJ10114).

**作者简介:** 凌爱凡(1977−), 男, 讲师, 博士, 从事鲁棒优化与金融风险管理的研究；吕江林(1955−), 男, 教授, 博士生导师, 从事资本市场与证券投资等研究.

虑一种更灵活、更直接的控制投资组合风险的方法, 即概率约束方法.

本文建立了具有联合椭圆不确定集与概率约束的鲁棒投资组合选择模型, 对 Goldfarb 和 Lu 的许多结果进行了拓展. 首先设置一个投资组合收益的下限, 称为最坏收益, 通过控制投资组合收益低于这个下限的概率来控制投资组合的风险. 这便将复杂的投资组合问题转变成一个鲁棒的含概率约束的最优化问题, 这种控制风险的方法可被认为是 Ghaoui 等人[10]和 Zhu 等人[11] 研究的 VaR 和 CVaR 方法的推广. 然后将所得到的含概率约束的鲁棒投资组合问题转化为含线性矩阵不等式 (LMI) 约束的凸规划问题, 并应用通常的内点算法求解. 最后, 结合上海证券交易所的一些真实交易数据进行实证分析, 并与 Goldfarb 的可分不确定集下的鲁棒 VaR 投资组合模型进行了多方面的性能比较.

为叙述方便, 本文以 $\boldsymbol{S}_n, \boldsymbol{S}_n^+, \boldsymbol{S}_n^{++}$ 分别表示对称矩阵、半正定矩阵和正定矩阵空间, $\boldsymbol{M}_{m,n}$ 表示 $m\times n$ 维矩阵空间. 对于任意对称矩阵 $A\in\boldsymbol{S}_n, A\succeq 0\,(A\succ 0)$ 表示 $A\in\boldsymbol{S}_n^+ (A\in\boldsymbol{S}_n^{++}), n$ 维向量 $\boldsymbol{a}\geqslant 0$ 表示其所有分量 $a_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$.

## 2　概率约束投资组合问题

考虑一个单周期的投资组合问题. 假设市场中存在 $n$ 种可投资的风险资产, 投资者在 0 时刻进行投资决策, 在 1 时刻退出市场或调整投资策略. 设 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 为 $n$ 个风险资产在时刻 1 的随机收益向量, 其中 $r_i$ 表示第 $i$ 个资产的总收益率, 即 $r_i = S_1/S_0 > 0$, 而 $S_t(t=0,1)$ 为资产 $i$ 在 $t$ 时刻的价格. 用向量 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n$ 表示投资者的头寸, 其中 $w_i$ 表示投资在第 $i$ 个风险资产上占总资产的比例. 假设不允许卖空, 则投资组合 $\boldsymbol{w}$ 一般满足如下约束:

$$\sum_{i}^{n} w_i = 1,\ w_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n.$$

设 $\rho>0$ 为投资者所能承受的投资组合收益的最小值. 考虑如下情形的投资问题: 投资者一方面希望能最大化其投资收益; 另一方面, 希望其投资组合收益不低于所能承受的最小值 $\rho$, 或者说, 其投资组合收益低于 $\rho$ 的概率小于一个预先给定的非常小的数 $\alpha\in(0,1/2)$. 该投资者的决策模型可表示如下 (简记为 EC):

$$\begin{aligned}(\mathrm{EC}):\ \ &\max\ \boldsymbol{E}[\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{r}];\\ &\text{s.t. } \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\leqslant\rho\}\leqslant\alpha,\\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ \boldsymbol{w}\geqslant 0.\end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{E}(\cdot)$ 表示随机变量的期望值. 决策问题 (EC) 中的最大特点是应用一个概率约束来控制投资组合风险. 这种控制风险的方法与方差相比, 对投资者而言更直接、更灵活, 且易理解. 但是, 由于概率约束的存在, 问题 (EC) 的求解更困难. 传统求解式 (2) 的方法是利用 $\boldsymbol{r}$ 的历史数据对其二阶矩进行估计, 并应用概率不等式将其转化为二次规划求解. 但对于 $\boldsymbol{r}$ 的二阶矩的估计总会有一定的估计误差, 如果估计误差代入问题 (EC) 中, 则会直接影响决策问题 (EC) 的最优策略. 为了克服由于估计误差给决策问题带来的影响, 在下面的讨论中不必精确估计 $\boldsymbol{r}$ 的二阶矩, 而是假设其在一个给定置信水平的椭圆中变化, 并求解最坏情形下的最优投资组合决策.

## 3　联合椭圆不确定集

假设风险资产的收益 $\boldsymbol{r}$ 由因子模型 (1) 给出, $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{\epsilon}$ 相互独立且满足 $\boldsymbol{f}\sim N(0,F)$ 及 $\boldsymbol{\epsilon}\sim N(0,D)$. 其中: $\boldsymbol{\xi}\sim N(\boldsymbol{a},\varSigma)$ 表示 $\boldsymbol{\xi}$ 服从均值向量为 $\boldsymbol{a}$, 协方差矩阵为 $\varSigma$ 的多维正态分布. 进一步, 假设对于任意 $i\neq j$, $\epsilon_i, \epsilon_j$ 相互独立, 且 $F\succ 0, D=\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})\succeq 0, \boldsymbol{d}=(d_1, d_2, \cdots, d_n)^{\mathrm{T}}, d_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$, 其中 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})$ 表示以向量 $\boldsymbol{d}$ 的元素为对角元的对角矩阵. 在实践中, 线性模型 (1) 的参数 $(\boldsymbol{\mu}, V)$ 一般通过线性回归进行估计.

假设观察到了 $p$ 个周期的资产收益数据 $\{\boldsymbol{r}^t: t=1,2,\cdots,p\}$ 和市场风险因子数据 $\{\boldsymbol{f}^t: t=1,2,\cdots,p\}$, 则线性模型 (1) 可写成

$$r_i^t = \mu_i + \sum_{j=1}^{n} V_{ji} f_j^t + \epsilon_i^t,$$
$$i=1,2,\cdots,n,\ t=1,2,\cdots,p.$$

类似于通常线性回归方法, 假设 $\{\epsilon_i^t, i=1,2,\cdots,n, t=1,2,\cdots,p\}$ 是两两相互独立的正态分布随机变量, 且对于所有 $t=1,2,\cdots,p$, 有 $\epsilon_i^t\sim N(0,\sigma_i^2)$. 令 $B=(\boldsymbol{f}^1, \boldsymbol{f}^2, \cdots, \boldsymbol{f}^p)\in\boldsymbol{R}^{m\times p}$ 表示市场风险因子数据矩阵, 则对于资产 $i$ 的所有 $t=1,2,\cdots,p$ 个周期的数据, 有如下线性表示:

$$\boldsymbol{y}_i = A\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

其中

$$\boldsymbol{y}_i = (r_i^1, r_i^2, \cdots, r_i^p)^{\mathrm{T}},\ A=(\boldsymbol{e}, B^{\mathrm{T}}),$$
$$\boldsymbol{x}_i = (\mu_i, V_{1i}, V_{2i}, \cdots, V_{mi})^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\epsilon}_i = (\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \cdots, \epsilon_i^p)^{\mathrm{T}},$$

$\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{R}^p$ 表示元素均为 1 的 $p$- 维向量. 对于任意给定的 $\omega\in(0,1)$ 以及某个与 $\omega$ 有关的常数 $\widetilde{c}(\omega)$, 定义关于参数 $(\boldsymbol{\mu}, V)$ 的具有 $\omega$- 置信水平的联合椭圆不确定集 $S_{\boldsymbol{\mu},V}(\omega)$ 如下[20]:

$$S_{\boldsymbol{\mu},V}(\omega) = \Big\{(\boldsymbol{\mu}, V): \sum_{i=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{x}_i-\overline{\boldsymbol{x}}_i)^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)(\boldsymbol{x}_i-\overline{\boldsymbol{x}}_i)}{s_i^2}\leqslant (m+1)\widetilde{c}(\omega)\Big\}. \tag{3}$$

其中

$$\overline{\boldsymbol{x}}_i=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_i \tag{4}$$

为参数 $\boldsymbol{x}_i$ 的最小二乘估计, 而

$$s_i^2=\frac{\|\ y_i-A\overline{\boldsymbol{x}}_i\ \|^2}{p-m-1} \tag{5}$$

为参数 $\sigma_i^2$ 的无偏估计. 对于不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu},V}(\omega)$ (在后文中简记为 $\mathcal{S}$), 有如下结果[7,20]:

**命题 1** 对于任意给定的 $\omega\in(0,1)$ 以及某个与 $\omega$ 有关的常数 $\widetilde{c}(\omega)$, $\mathcal{S}$ 是参数 $(\boldsymbol{\mu},V)$ 的 $\omega$- 置信不确定集, 当且仅当 $\boldsymbol{P}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{Y}^i\leqslant\widetilde{c}(\omega)\Big)=\omega$, 即 $\widetilde{c}(\omega)$ 是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathcal{Y}^i$ 的 $\omega$- 临界值. 其中

$$\mathcal{Y}^i=\frac{(\boldsymbol{x}_i-\overline{\boldsymbol{x}}_i)^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)(\boldsymbol{x}_i-\overline{\boldsymbol{x}}_i)}{(m+1)s_i^2},\ i=1,2,\cdots,n$$

两两相互独立, 且服从自由度分别为 $m+1$ 与 $p-m-1$ 的 $F$- 分布随机变量.

在下面的讨论中, 假设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{\epsilon}$ 的协方差矩阵 $F$ 与 $D$ 是确定的, 对于这 2 个参数的不确定情形, 其处理类似于文献 [2].

## 4 鲁棒模型

根据因子模型 (2) 及关于 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{\epsilon}$ 的分布假设可知, 收益向量 $\boldsymbol{r}$ 服从正态分布, 且有

$$\boldsymbol{r}\sim N(\boldsymbol{\mu},V^{\mathrm{T}}FV+D). \tag{6}$$

正如引言及第 2 节所述, 对于参数 $\boldsymbol{\mu},V$ 的估计, 总会存在估计误差. 为了克服由估计误差对决策问题 (EC) 的影响, 本文假设 $\boldsymbol{\mu},V$ 在椭圆不确定集 $\mathcal{S}$ 中变化. 考虑如下投资决策问题:

$$\begin{aligned}&\max\ \min_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu};\\&\text{s.t.}\ \max_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\leqslant\rho\}\leqslant\alpha,\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{W},\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\mathcal{W}=\Big\{\boldsymbol{w}:\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1,\boldsymbol{w}\geqslant 0\Big\}$ 表示可行域. 由于 $\boldsymbol{r}$ 服从正态分布, 根据式 (6), 有

$$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\sim N(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(V^{\mathrm{T}}FV+D)\boldsymbol{w}). \tag{8}$$

设 $\xi$ 是一个标准正态分布随机变量, 即 $\xi\sim N(0,1)$, 则对于固定 $\boldsymbol{\mu},V$, 有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\leqslant\rho\}\leqslant\alpha\Leftrightarrow\\&\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\rho}{\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(V^{\mathrm{T}}FV+D)\boldsymbol{w}}}\geqslant\mathcal{F}_\xi^{-1}(1-\alpha).\end{aligned} \tag{9}$$

其中: $\mathcal{F}_\xi(\cdot)$ 为标准正态随机变量 $\xi$ 的累积分布函数, 且满足 $\mathcal{F}_\xi^{-1}(1-\alpha)>0$ (因为 $\alpha\in(0,1/2)$). 因此, 由式 (9) 可以将决策问题 (7) 中的概率约束写成如下不等式形式:

$$\max_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\{\mathcal{F}_\xi^{-1}(1-\alpha)\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\}\leqslant-\rho,$$

其中 $H=V^{\mathrm{T}}FV+D$. 于是, 决策问题 (7) 可重写为如下完整形式:

$$\begin{aligned}&\max\ \min_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu};\\&\text{s.t.}\ \max_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\{\mathcal{F}_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\}\leqslant-\rho,\\&\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\mathcal{F}_0=\mathcal{F}_\xi^{-1}(1-\alpha)>0$. 设 $h(\boldsymbol{w})=\min\limits_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}$, 及

$$g(\boldsymbol{w})=\max_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\{\mathcal{F}_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}\}, \tag{11}$$

则显然 $h(\boldsymbol{w})$ 是一个关于 $\boldsymbol{w}$ 的凹函数. 由矩阵 $F,D$ 均是正定的可知, 矩阵 $H$ 是正的, 因此可得到如下引理:

**引理 1** 由式 (11) 定义的关于 $\boldsymbol{w}$ 的函数 $g(\boldsymbol{w})$ 是凸的, 其中 $H=V^{\mathrm{T}}FV+D$.

为叙述方便, 将问题 (10) 写成如下简单的形式:

$$\begin{aligned}&\max\ h(\mathbf{w});\\&\text{s.t.}\ g(\boldsymbol{w})+\rho\leqslant 0,\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{12}$$

设 $\rho_*=-\min\limits_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}}g(\boldsymbol{w})>0$, 则由函数 $g(\boldsymbol{w})$ 的连续性可知, 对于任意正的 $\rho<\rho_*$, 存在至少一个 $\widetilde{\boldsymbol{w}}\in\mathcal{W}$, 从而如下严格不等式成立:

$$g(\widetilde{\boldsymbol{w}})+\rho<0,$$

另外, 在问题 (12) 中, 可行集 $\mathcal{W}$ 是一个凸紧集, 目标函数 $h(\boldsymbol{w})$ 是凹的, 函数 $g(\boldsymbol{w})+\rho$ 在 $\mathcal{W}$ 上是凸的. 因此, 根据强对偶定理[12], 对于任意正的 $\rho<\rho_*$, 存在至少一个常数 $\lambda\geqslant 0$, 使得问题 (12) 与下面问题等价:

$$\begin{aligned}&\max\ h(\boldsymbol{w})-\lambda(g(\boldsymbol{w})+\rho);\\&\text{s.t.}\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{13}$$

这里称 $\lambda\geqslant 0$ 为风险厌恶参数, 反应投资者对风险的厌恶程度.

因为 $\lambda\rho$ 与决策变量 $\boldsymbol{w}$ 无关, 因此可以将 $\lambda\rho$ 从目标函数中删去. 于是, 得到与问题 (13) 具有相同最优解的优化问题

$$\begin{aligned}&\max\ h(\boldsymbol{w})-\lambda g(\boldsymbol{w});\\&\text{s.t.}\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{14}$$

将函数 $h(\boldsymbol{w})$ 和 $g(\boldsymbol{w})$ 还原, 问题 (14) 成为

$$\begin{aligned}&\max\ \{\min_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\lambda\max_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}(\mathcal{F}_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}}-\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu})\};\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{15}$$

为有效求解原投资决策问题 (7), 对于问题 (15) 的处理有以下 2 种情形: 第 1 种情形是假设 $\boldsymbol{\mu},V$ 在一类可分不确定集中变化, 从而导致式 (15) 中所含方差与期望的最坏情形可分开考虑, 这是 Goldfarb 所研究的情形. 文献 [2] 定义 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}}$ 为联合椭圆不确定集 $\mathcal{S}$ 在 $\boldsymbol{\mu}$ 方向上的投影, 而 $\mathcal{S}_V$ 是 $\mathcal{S}$ 在 $V$ 方向上的投影, 并给出了 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}},\mathcal{S}_V$ 的显式表示 (详见文献 [2] 中的式 (56) 和 (57)). 基于可分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}}\times\mathcal{S}_V$, Goldfarb 所考虑的鲁棒 VaR 投资组合问题实际上可写成如下形式 (记为 GIR):

$$\max\ \{\min_{\boldsymbol{\mu}\in\mathcal{S}_\mu}(1+\lambda)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\lambda_0\max_{V\in\mathcal{S}_V}(\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}})\};$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}. \tag{16}$$

其中 $\lambda_0=\lambda\mathcal{F}_0$.

本文主要考虑第 2 种情形, 即假设 $\boldsymbol{\mu},V$ 在联合椭圆不确定集 $\mathcal{S}$ 中变化. 这时, 式 (15) 中含方差与期望的最坏情形将不能分开处理, 这是联合椭圆不确定集与可分不确定集的本质区别. 基于联合椭圆不确定集 $\mathcal{S}$, 式 (15) 可写成如下形式 (记为 REC) :

$$\max\ \min_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\{(1+\lambda)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\lambda_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}H\boldsymbol{w}}\};$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.$$

问题 REC 正是本文提出的在联合椭圆不确定集下的鲁棒概率约束投资组合模型.

下面主要考虑问题 REC 的求解过程. 为此, 引入 2 个新的随机变量 $\tau_1$ 和 $\tau_2$. 注意到 $H=V^{\mathrm{T}}FV+D$, 则 REC 可转化成如下等价问题 (记为 REC 1) :

$$\begin{aligned}&\max\ \tau_1;\\&\text{s.t.}\ \min_{\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}}\{(1+\lambda)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}-\\&\qquad\lambda_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}FV\boldsymbol{w}+\tau_2^2}\}\geqslant\tau_1,\\&\qquad\|D^{1/2}\boldsymbol{w}\|\leqslant\tau_2,\ \boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned}$$

## 5　线性矩阵不等式方法

为了能有效求解决策问题 REC1, 首先将 REC1 转化为一个含线性矩阵不等式约束的凸规划问题; 然后应用比较成熟的内点算法求解所得到的凸规划问题.

对于任意给定的 $(\lambda,\tau_1,\tau_2,\boldsymbol{w})\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}_{++}\times\boldsymbol{R}_+^n$, 定义一个关于 $\boldsymbol{\mu}$ 与 $V$ 的函数如下:

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)=\lambda_0\sqrt{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}FV\boldsymbol{w}+\tau_2^2}-(1+\lambda)\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}+\tau_1.$$

易知, 问题 REC1 中第 1 个不等式约束等价于: 对于任意 $\boldsymbol{\mu},V\in\mathcal{S}$, 不等式 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)\leqslant0$ 成立. 下面将不等式 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)\leqslant0$ 转变为线性矩阵不等式的形式. 为此, 需要如下一些引理:

**引理 2** [13]　设 $A\in\boldsymbol{S}_n^{++},C\in\boldsymbol{S}_n,B\in\boldsymbol{M}_{m,n}$, 则

$$\begin{bmatrix}A & B\\B^{\mathrm{T}} & C\end{bmatrix}\succeq0\Leftrightarrow C-B^{\mathrm{T}}A^{-1}B\succeq0.$$

**引理 3** [13]　设 $F_i(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A_i\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+c_i(i=0,1,\cdots,k)$ 是 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$ 的二次函数. 如果存在 $\theta_i\geqslant0$, 使得

$$\sum_{i=1}^k\theta_i\begin{bmatrix}c_i & \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}_i & A_i\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}c_0 & \boldsymbol{b}_0^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{b}_0 & A_0\end{bmatrix}\succeq0,$$

且对于所有 $\boldsymbol{x}$, 有 $F_0(\boldsymbol{x})\leqslant0$, 则对于所有 $\boldsymbol{x}$ 及所有 $i=1,2,\cdots,k,F_i(\boldsymbol{x})\leqslant0$ 成立. 另外, 如果 $k=1$, 且存在 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}$, 使得 $F_1(\boldsymbol{x}_0)\leqslant0$ 成立, 则其逆命题成立.

**引理 4** [14]　如果 $H\succeq0,K\succeq0$, 则 $H\otimes K\succeq0$, 其中 $\otimes$ 为 Kronecker 积.

在正式陈述本文的主要结果之前, 再引入一些记号. 根据式 (3), 不确定集 $\mathcal{S}$ 可写成如下形式:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}=\Big\{(\boldsymbol{\mu},V):&\sum_{i=1}^n\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\Big(\frac{A^{\mathrm{T}}A}{(m+1)s_i^2}\Big)\boldsymbol{x}_i-\\&2\sum_{i=1}^n\Big(\frac{A^{\mathrm{T}}A\overline{\boldsymbol{x}}_i}{(m+1)s_i^2}\Big)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i+\\&\sum_{i=1}^n\overline{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\Big(\frac{A^{\mathrm{T}}A}{(m+1)s_i^2}\Big)\overline{\boldsymbol{x}}_i-\widetilde{c}(\omega)\leqslant0\Big\}.\end{aligned}\tag{17}$$

记

$$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}-\dfrac{A^{\mathrm{T}}A\overline{\boldsymbol{x}}_1}{(m+1)s_1^2}\\\vdots\\-\dfrac{A^{\mathrm{T}}A\overline{\boldsymbol{x}}_n}{(m+1)s_n^2}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{(m+1)n},$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\vdots\\\boldsymbol{x}_n\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{(m+1)n},$$

$$\eta=\sum_{i=1}^n\overline{\boldsymbol{x}}_i^{\mathrm{T}}\Big(\frac{A^{\mathrm{T}}A}{(m+1)s_i^2}\Big)\overline{\boldsymbol{x}}_i-\widetilde{c}(\omega);\tag{18}$$

$$R=\begin{bmatrix}\dfrac{A^{\mathrm{T}}A}{(m+1)s_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{A^{\mathrm{T}}A}{(m+1)s_n^2}\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{[(m+1)n\times[(m+1)n]]}.\tag{19}$$

其中: $\boldsymbol{x}_i=(\mu_i,V_{1i},V_{2i},\cdots,V_{mi})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{m+1},i=1,2,\cdots,n$. 则基于式 (18) 和 (19), 不确定集 $\mathcal{S}$ 能写成如下标准二次函数的形式:

$$\mathcal{S}=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}R\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\eta\leqslant0\}.\tag{20}$$

**定理 1**　对于任意给定 $\omega\in(0,1)$, 设 $\mathcal{S}$ 为由式 (20) 定义的具有 $\omega$- 置信水平的不确定集, 则最优化问题 REC1 的第 1 个不等式约束与下面线性矩阵不等式等价:

$$\begin{bmatrix}\theta R-\lambda X\otimes\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & F\end{bmatrix} & \theta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\\\theta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \theta\eta-2\tau_1\end{bmatrix}\succeq0,\tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\tau_2 & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{w} & X\end{bmatrix}\succeq0,\ \theta\geqslant0.\tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{v}=-(1+\lambda)(w_1,\boldsymbol{0}_m^{\mathrm{T}},\cdots,w_n,\boldsymbol{0}_m^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{(m+1)n},\tag{23}$$

$\boldsymbol{0}_m$ 是 $m$ 维的零向量, $X\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是一个未知半正定矩阵变量.

**证明** 由 $\tau_2>0$ 及函数 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)$ 的定义易知, $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)$ 在 $(\boldsymbol{\mu},V)=(\mathbf{0}_n,0_{m\times n})$ 处存在二阶导数. 因此, 直接计算 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)$ 在 $(\boldsymbol{\mu},V)=(\mathbf{0}_n,0_{m\times n})$ 处前二阶导数, 可得对于 $i,j=1,2,\cdots,n$, 有

$$\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial\boldsymbol{x}_i}\Big|_{(\boldsymbol{\mu},V)=(\mathbf{0}_n,0_{m\times n})}=\begin{bmatrix}-(1+\lambda)w_i\\ \mathbf{0}_n\end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{Q}}{\partial\boldsymbol{x}_i\partial\boldsymbol{x}_j}\Big|_{(\boldsymbol{\mu},V)=(\mathbf{0}_n,0_{m\times n})}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_0\dfrac{w_iw_j}{\tau_2}F\end{bmatrix}.$$

其中: $\boldsymbol{x}_i=(\mu_i,V_{1i},V_{2i},\cdots,V_{mi})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{m+1},i=1,2,\cdots,n$. 因此, 函数 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)$ 在 $(\boldsymbol{\mu},V)=(\mathbf{0}_n,0_{m\times n})$ 处二阶 Taylar 展开可表示为

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_0\dfrac{w_iw_j}{\tau_2}F\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_j+\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}-(1+\lambda)w_i\\ \mathbf{0}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i+\tau_1. \tag{24}$$

记

$$M=(M_{ij})\in\boldsymbol{R}^{[(m+1)n]\times[(m+1)n]}; \tag{25}$$

及

$$M_{ij}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \lambda_0\dfrac{w_iw_j}{\tau_2}F\end{bmatrix}\in\boldsymbol{R}^{(m+1)\times(m+1)},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

注意到式 (19), 则式 (24) 能够被写成如下标准的二次函数形式:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x})=2\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+2\tau_1. \tag{26}$$

根据式 (17) 及 $\widetilde{c}(\omega)>0$ (因为 $\omega>0$), 则当 $\boldsymbol{x}=\overline{\boldsymbol{x}}$ 时, $\eta=-\widetilde{c}(\omega)<0$, 这里 $\overline{\boldsymbol{x}}=(\overline{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\overline{\boldsymbol{x}}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{(m+1)n}$, 因此不确定集 $\mathcal{S}$ 是非空的. 由引理 3 知, 对于任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ 成立, 当且仅当存在一个非负数 $\theta\geqslant 0$, 使得

$$\theta\begin{bmatrix}R & \boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} & \eta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}M & -\boldsymbol{v}\\ -\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & 2\tau_1\end{bmatrix}\succeq 0 \tag{27}$$

成立, 其中系数 $\boldsymbol{u},\eta$ 和 $R$ 分别由式 (18) 和 (19) 确定. 使用 Kronecker 积 $\otimes$, 则矩阵 $M$ 可表示为

$$M=\lambda_0\Big(\frac{\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}}{\tau_2}\Big)\otimes\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{bmatrix}.$$

注意到 $F\succ 0$ 及引理 4, 则式 (27) 成立, 当且仅当

$$\begin{bmatrix}\theta R-\lambda_0X\otimes\widetilde{F} & \theta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\\ \theta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \theta\eta-2\tau_1\end{bmatrix}\succeq 0,$$

$$X\succeq\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}/\tau_2,\ \theta\geqslant 0 \tag{28}$$

成立, 这里 $\widetilde{F}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & F\end{bmatrix}$. 再根据 $\tau_2>0$ 和引理 3, 可知 $X\succeq\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}/\tau_2$ 成立, 当且仅当

$$\begin{bmatrix}\tau_2 & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{w} & X\end{bmatrix}\succeq 0$$

成立. 因此条件 (21) 和 (22) 等价于 (28). 这就意味着对于所有 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}$, $\widetilde{\mathcal{Q}}(\boldsymbol{x})\leqslant 0$ (等价于 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)\leqslant 0$) 成立当且仅当式 (21) 和 (22) 成立. 而 REC1 的第 1 个不等式与 $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\mu},V)\leqslant 0$ 是一致的. 因此定理结论成立. □

对于 REC1 中的第 2 个约束, 有:

**引理 5** 问题 REC1 的第 2 个不等式约束能够转变为如下二阶锥形式:

$$\begin{bmatrix}1+\tau_2\\ 1-\tau_2\\ 2D^{1/2}\boldsymbol{w}\end{bmatrix}\in\mathrm{SOC}\,(n+2), \tag{29}$$

其中

$$\mathrm{SOC}\,(n)=\Big\{\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n:\sqrt{\sum_{i=2}^{n}y_i^2}\leqslant y_1\Big\}$$

为一个 $n$- 维的二阶锥.

基于定理 1 和引理 5, 问题 REC1 或鲁棒投资组合最优化问题 REC 能够转变为一个含线性矩阵不等式约束凸规划问题, 即有如下结果:

**定理 2** 对于任意给定 $\omega\in(0,1)$, 设 $\mathcal{S}$ 是一个由式 (3) 定义的 $\omega$- 置信水平集, 则鲁棒投资组合最优化问题 REC 等价于如下含线性矩阵不等式约束的凸规划问题:

$$\begin{aligned}&\max\ \tau_1;\\ &\text{s.t.}\ \begin{bmatrix}\theta R-\lambda_0X\otimes\widetilde{F} & \theta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\\ \theta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} & \theta\eta-2\tau_1,\end{bmatrix}\succeq 0,\\ &\quad\ \begin{bmatrix}1+\tau_2\\ 1-\tau_2\\ 2D^{1/2}\boldsymbol{w}\end{bmatrix}\in\mathrm{SOC}\,(n+2),\\ &\quad\ \begin{bmatrix}\tau_2 & \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{w} & X\end{bmatrix}\succeq 0,\ \theta\geqslant 0,\boldsymbol{w}\in\mathcal{W}.\end{aligned} \tag{30}$$

其中: $\tau_1,\tau_2,\theta,\boldsymbol{w}$ 和矩阵 $X$ 为未知变量; 系数 $R,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\eta$ 与矩阵 $\widetilde{F}$ 分别由式 (18), (19) 及 (23) 确定.

## 6 实证分析

利用上海证券交易所的真实数据检验模型 REC, 同时将模型 REC 与 Goldfarb 考虑的在可分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}}\times\mathcal{S}_V$ 下的模型 GIR 的性能进行比较. 关于问题 GIR 的求解过程, 详见文献 [2]. 本节的所有数值实验结果均由 Matlab 7.0 统计工具箱及软件包 SDPT3[15]完成. 本文的实证分析主要基于如下算法:

**算法 1** (算法-REC)

1) 选取 $n$ 个风险资产和 $m$ 个风险因子, 收集它们的日收益率数据; 将所收集的数据分成 $N+1$ 个周期, 且每个周期含有 $p$ 个交易日, 置 $t=1$; 给定置信水平 $\omega$ 与风险厌恶系数 $\lambda$.

2) 应用第 $t$ 个周期的 $p$ 个交易日的资产和风险

因子的日收益率数据对参数进行估计: ① 由线性回归方程 (4) 估计 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 即参数 $\mu, V$; ② 估计风险因子的协方差矩阵 $F$; ③ 由式 (5) 估计收益率残余向量 $\epsilon_i$ 的方差 $d_i = s_i, i=1,2,\cdots,n$; ④ 根据式 (20) 计算联合不确定集 $\mathcal{S}$, 由文献 [7] 中的方法计算 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathcal{S}_V$ (令 $\widetilde{\omega} = \omega^{1/n}$, 可分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}} \times \mathcal{S}_V$ 的置信水平至少是 $\widetilde{\omega}^n = \omega$ 或有更高的置信水平, 详见文献 [2,8] 中的论述).

3) 模型求解: ① 求解本文所得到的最优化问题 (30), 将得到的最优决策记为 $\boldsymbol{w}_L^t$; ② 求解 Goldfarb 所考虑的最优化问题 GIR, 并将所得到的最优决策记为 $\boldsymbol{w}_G^t$.

4) 分别以 $\boldsymbol{w}_L^t, \boldsymbol{w}_G^t$ 作为第 $t+1$ 个周期内的投资策略进行投资. 如果 $t \leqslant N$, 则置 $t = t+1$, 返回 2); 否则, 输出 $\boldsymbol{w}_L^1, \boldsymbol{w}_L^2, \cdots, \boldsymbol{w}_L^N$ 和 $\boldsymbol{w}_G^1, \boldsymbol{w}_G^2, \cdots, \boldsymbol{w}_G^N$, 结束.

从上证交易所选取 $n = 33$ 个资产, 分别来自 11 个板块; 另外选取 $m = 3$ 个市场风险因子, 所有资产和市场风险因子见表 1. 对于这些资产和市场风险因子, 共收集了自 2006-11-06～2009-07-31 之间的 660 个交易日的收益率数据, 并将这些数据按时间顺序分成 11 个周期, 每个周期包含 $p=60$ 个交易日.

**表 1　资产与市场因子**

| 钢铁板块 | 电力板块 | 化工板块 | 机械设备 |
|---|---|---|---|
| 广钢股份 | 三峡水利 | 烟台万华 | 航天通信 |
| 八一钢铁 | ST 惠天 | 北化股份 | 三一重工 |
| 鞍钢股份 | 中恒集团 | 上海家化 | 江淮动力 |
| 医药板块 | 房产建筑 | 酿酒饮食 | 原油板块 |
| 健康元 | 光华控股 | 青岛啤酒 | 中国石油 |
| 白云山 A | 招商地产 | 沱牌曲酒 | 中国石化 |
| 天药股份 | 万科 A | 五粮液 | 东华能源 |
| 金融保险 | 通信板块 | 商业贸易 | 市场因子 |
| 浦发银行 | 大唐电信 | 王府井 | 上证指数 |
| 中国平安 | 金证股份 | 百大集团 | 上证 180 |
| 中信股份 | 中信国安 | 华联综超 | 上证 50 |

根据算法 1, 首先用第 1 个周期的数据估计参数 $\mu, V$, 并分别计算联合不确定集 $\mathcal{S}$ 和可分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}}, \mathcal{S}_V$, 从而分别求解优化问题 (30) 和 GIR, 将所得到的投资决策向量 $\boldsymbol{w}_L^1, \boldsymbol{w}_G^1$ 作为第 2 个周期的投资组合, 即从第 $p+1$ 天开始进行投资. 以此类推, 用 $t(t \leqslant 10)$ 周期内的数据计算出 $\boldsymbol{w}_L^t, \boldsymbol{w}_G^t$ 后, 分别作为第 $t+1$ 个周期内投资组合. 因此, 尽管有 11 个周期的数据, 但本文仅将后面 10 个作为投资周期.

记 $R_k^t \in \boldsymbol{R}^n$ 为 $n$ 个资产在第 $t$ 个周期内第 $k(k \leqslant p = 60)$ 天的收益率向量, 设 $\boldsymbol{w}^{t-1} \in \boldsymbol{R}^n$ 是第 $t(t = 2, \cdots, 11)$ 个周期内的投资组合, 定义投资组合 $\boldsymbol{w}^{t-1}$ 在第 $t$ 个周期内的财富增长率为[7,20]

$$R^t(\boldsymbol{w}^{t-1}) = \Big(\prod_{k=1}^{p}(\boldsymbol{1}_n + R_k^t)\Big)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w}^{t-1} - 1,\ t = 2, \cdots, 11.$$

另外, 假设 $\{\boldsymbol{w}^t\}_{t=1}^{10}$ 是所考虑的 10 个投资周期中的一个投资组合序列, 在该投资组合序列下, 定义总的财富增长率为

$$R(\boldsymbol{w}^{1:10}) = \prod_{t=1}^{10}[R^{t+1}(\boldsymbol{w}^t) + 1] - 1.$$

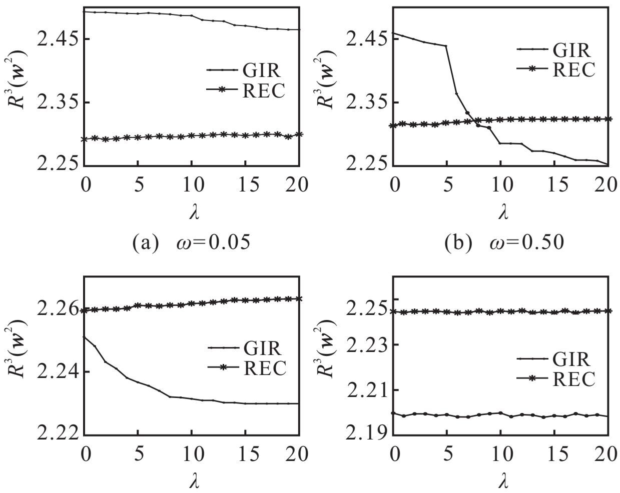
除了财富增长率是投资组合性能的比较指标外, 投资组合对风险的分散程度也是一个非常重要的性能指标. 本文定义一个投资组合 $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{R}^n$ 的分散度 $d(\boldsymbol{w})$ 为这个投资组合中所占投资比例不小于 1%的资产个数, 即

$$d(\boldsymbol{w}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{\{w_i \geqslant 1\%\}}.$$

其中

$$\boldsymbol{I}_{\{w_i \geqslant 1\%\}} = \begin{cases} 1, & w_i \geqslant 1\%; \\ 0, & w_i < 1\%. \end{cases}$$

选取 4 个不同的置信水平, 即 $\omega = 0.05, 0.50, 0.65, 0.95$. 对于每个置信水平 $\omega$, 令风险厌恶参数 $\lambda$ 由 0 递增到 $10^3$, 并逐一求解问题 (30) 与 GIR. 图 1 为模型 REC 与 GIR 在不同置信水平下 (图中曲线仅取一部分数据 ($\lambda \in [0, 20]$), 下同), 在第 2 个投资周期 ($t = 3$) 内的财富增长率 $R^3(\boldsymbol{w}^2)$ 的百分比随风险厌恶参数 $\lambda$ 变化的情形. 从图 1 可以看出, 当置信水平较小, 如 $\omega = 0.05, 0.50$, 且风险厌恶参数相对较小时, 模型 GIR 能获得比 REC 相对较高的财富增长率的投资组合. 然而, 当置信水平较高时, 如 $\omega = 0.65, 0.95$, 模型 REC 得出的投资组合比 GIR 得出的投资组合有较好的财富增长率. 出现这种现象的原因主要与可分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}} \times \mathcal{S}_V$ 的置信度有关, 因为当联合不确定集 $\mathcal{S}$ 有置信水平 $\omega$ 时, $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}} \times \mathcal{S}_V$ 具有的置信水平至少为 $\omega$, 但实际的置信水平比 $\omega$ 更高. 因此, 对于一个较小的 $\omega$, 在可



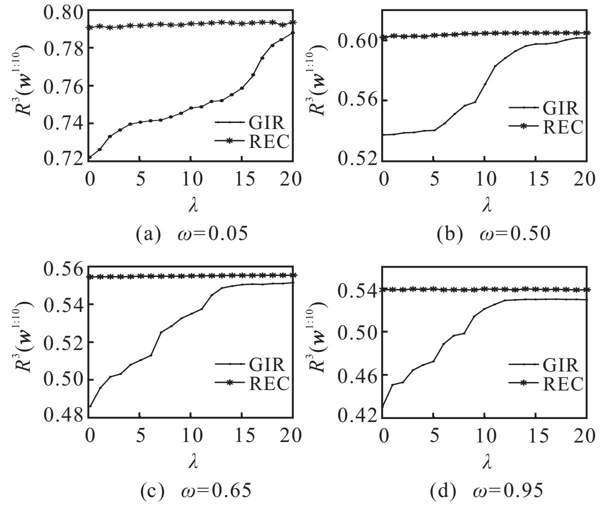

(a) $\omega$=0.05　(b) $\omega$=0.50　(c) $\omega$=0.65　(d) $\omega$=0.95

**图 1　$\boldsymbol{w}_L^2, \boldsymbol{w}_G^2$ 在 $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{3}$ 时财富增长率百分比随 $\boldsymbol{\lambda}$ 的变化**

分不确定集 $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\mu}} \times \mathcal{S}_V$ 下的模型 GIR 可能比模型 REC 更具鲁棒性. 然而, 当 $\omega$ 较大时, 模型 GIR 则表现出相对更保守的特性, 特别地, 这种保守的特性会随着风险厌恶参数增大而更加明显.

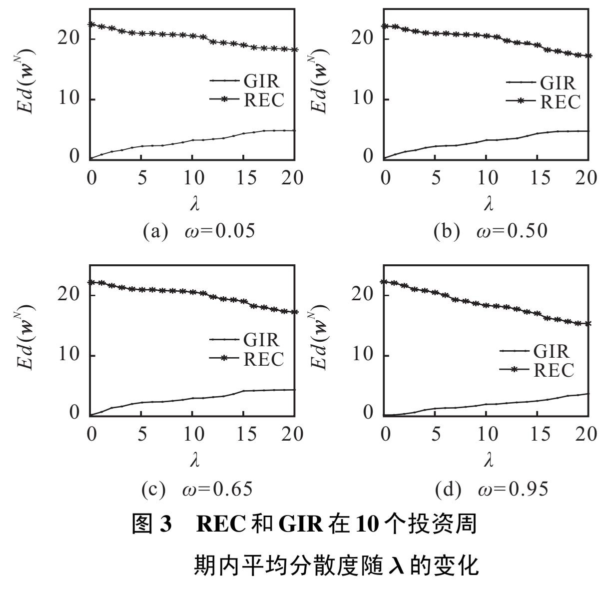
图 2 和图 3 分别给出了模型 REC 与 GIR 在 10 个投资周期内的总财富增长率 $R(\boldsymbol{w}^{1:10})$ 和平均分散度 $Ed(\boldsymbol{w}^N)$ 随风险厌恶参数 $\lambda$ 变化的情形. 这里平均分散度定义为

$$Ed(\boldsymbol{w}^N)=\frac{1}{10}\sum_{t=1}^{10}d(\boldsymbol{w}^t).$$




(a) $\omega$=0.05 (b) $\omega$=0.50 (c) $\omega$=0.65 (d) $\omega$=0.95

**图 2 REC 和 GIR 在 10 个投资周期内总财富增长率随 $\lambda$ 的变化**




(a) $\omega$=0.05 (b) $\omega$=0.50 (c) $\omega$=0.65 (d) $\omega$=0.95

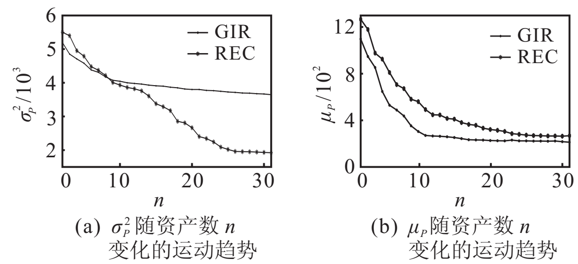
**图 3 REC 和 GIR 在 10 个投资周期内平均分散度随 $\lambda$ 的变化**

由图 2 和图 3 可知, 具有椭圆不确定集的鲁棒概率约束投资组合模型 REC 能够获得比 Goldfarb 的可分不确定集下模型 GIR 更高的总财富增长率, 而且能更有效地分散投资组合的风险. 由此可见, 对于大型机构投资者而言, 模型 REC 较 GIR 更有优势, 为了证实这点, 本文以第 1 个投资周期 $(t=2)$ 的数据为样本, 并取 $\omega=0.95, \lambda=20$, 对变化的资产数 $n$ 分别执行模型 REC 与 GIR, 以获得 2 个与资产数 $n$ 有关的投资组合序列 $\boldsymbol{w}_L^n, \boldsymbol{w}_G^n(n=2,3,\cdots,31)$; 然后运用第 2 个投资周期 $(t=3)$ 的数据, 分别计算 $n$ 个资产的样本协方差矩阵 $\Sigma^n$ 和样本均值 $\mu^n$, 并由 $\Sigma^n$ 和 $\mu^n$ 进一步计算

$$\sigma_{PL}^2=(\boldsymbol{w}_L^n)^{\mathrm{T}}\Sigma^n\boldsymbol{w}_L^n,\ \sigma_{PG}^2=(\boldsymbol{w}_G^n)^{\mathrm{T}}\Sigma^n\boldsymbol{w}_G^n;$$

$$\mu_{PL}=(\boldsymbol{w}_L^n)^{\mathrm{T}}\mu^n,\ \mu_{PG}=(\boldsymbol{w}_G^n)^{\mathrm{T}}\mu^n.$$

图 4 的 2 个分图分别给出了 $\sigma_P^2, \mu_P$ 随资产数 $n$ 变化的运动趋势. 由图 4 可知, 由模型 REC 和 GIR 获得的投资组合随着资产数的增加, 其方差均递减, 当资产数较少 $(n<10)$ 时, 由模型 GIR 获得的投资组合 $\boldsymbol{w}_G^n$ 具有相对较小的方差(即波动率), 但当资产数较多 $(n \geqslant 10)$ 时, 模型 REC 能够获得具有更小方差, 且期望收益更好的投资组合. 这表明模型 REC 在分散投资风险方面更有优势, 适合投资资产数较多的大型机构投资者, 而当投资资产数较少时, 模型 GIR 相对更有优势.




(a) $\sigma_P^2$ 随资产数 $n$ 变化的运动趋势 (b) $\mu_P$ 随资产数 $n$ 变化的运动趋势

**图 4 方差 $(\sigma_P^2)$, 均值 $(\mu_P)$ 与资产个数 $n$ 的变化关系**

## 7 结 论

本文建立了一种具有联合椭圆不确定集的鲁棒投资组合选择模型. 在该模型中, 假设参数在一个能有效控制置信水平的椭圆中变化, 在最大化投资组合期望收益的同时, 通过控制投资组合收益不低于一个预先设定的下限值的概率来控制投资组合的风险. 本文将所提出的模型转化成一个具有线性矩阵不等式约束的凸规划问题, 并利用内点算法求解. 最后利用真实的市场数据对 REC 模型进行了实证分析, 并与 Goldfarb 等人提出的具有可分不确定集下的鲁棒 VaR 投资组合模型 GIR 进行了比较. 数值结果表明, 本文提出的 REC 模型能更有效地分散最优投资组合的风险, 且所得到的投资组合具有更高的财富增长率.

## 参考文献(References)

[1] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization[J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23(4): 769-805.

[2] Goldfarb D, Iyengar G. Robust portfolio selection problems[J]. Mathematics of Operations Research, 2003, 28(1): 1-38.

(下转第570页)