第 26 卷 第 3 期
Vol. 26 No. 3

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 3 月
Mar. 2011

文章编号: 1001-0920 (2011) 03-0357-06

直觉模糊统计判决与决策

樊 雷, 雷英杰
(空军工程大学 导弹学院，陕西 三原 713800)

摘 要: 针对统计判决与决策中存在的模糊性, 给出了模糊性直觉模糊集的解决方案. 首先提出直觉模糊事件概率的概念, 在定义直觉模糊 t 模及 s 模的基础上给出直觉模糊事件概率所满足的基本性质, 并证明了直觉模糊乘法定理、全概率公式和贝叶斯公式; 然后根据所给出的直觉模糊概率所满足的性质, 并依据信息源类型的不同, 详细分析了直觉模糊统计判决与决策的方法; 最后通过一个投资问题验证了该方法的有效性.

关键词: 直觉模糊集；直觉模糊事件；直觉模糊事件概率；直觉模糊统计判决与决策
中图分类号: TP182 **文献标识码:** A

Intuitionistic fuzzy statistic adjudging and decision-making

FAN Lei, *LEI Ying-jie*
(Missile Institute，Air Force Engineering University，Sanyuan 713800，China．Correspondent：FAN Lei，E-mail: fanlei1771@163.com)

Abstract：For fuzzy characteristics in statistic adjudging and decision-making, a method to handle intuitionistic fuzzy sets is proposed in this paper. Firstly, the conception of intuitionistic fuzzy events probability is given. Then the conceptions of intuitionistic fuzzy t-norm and s-norm are proposed, the characteristics of intuitionistic fuzzy events probability are detailed and testified, and the theorems of multiplication, absolute probability and Bayes are described and proofed. Based on the characteristics of intuitionistic fuzzy events probability and different types of information source, the techniques of intuitionistic fuzzy statistic adjudging and decision-making are particularly analyzed. Finally, experiments on a problem of investment show the effectiveness of the algorithms.

Key words：intuitionistic fuzzy sets；intuitionistic fuzzy events；intuitionistic fuzzy events probability；intuitionistic fuzzy statistic adjudging and decision-making

1 引 言

在客观世界和现实生活中, 事物在质的表现上具有确定性和不确定性, 而随机性与模糊性是不确定性的基本内涵. 人们常常用随机数学和模糊数学研究随机性和模糊性, 这仅仅是从不同的角度来认识不确定性. 然而, 随机性与模糊性常常联系在一起, 难以区分和独立存在, 作为人类思维与认知载体的语言表现得尤为明显[1]. 为此, Zadeh[2]首先结合模糊集 (FS) 与概率理论, 给出了样本空间中模糊事件 (FE) 的概率, 从而为模糊概率理论打下了基础. 作为模糊集的一种重要扩展形式的直觉模糊集理论[3-6](IFS) 将仅考虑支持 (肯定) 程度的模糊扩展到同时考虑支持 (肯定)、反对 (否定) 和犹豫 (不确定) 程度的直觉模糊, 其主旨是表现人们在对事物的认知过程中存在不同程度的犹豫或表现出一定程度的知识缺乏, 使认知结果中存在介于肯定与否定之间的犹豫性, 使直觉模糊集在描述现实世界的模糊本质时更具优势. 进一步, 利用直觉模糊集解决随机现象中的模糊性, 建立直觉模糊概率理论便成为必然.

直觉模糊事件 (IFE) 的概念首先由 Atanassov[7] 给出; 随后 Gerstenkorn 等人[8]以统计区间数的形式给出了 IFE 概率的概念; Manko[9]又给出了 IFE 概率的简化形式, 类似于模糊概率表达形式. Grzegorzewski 等人[10]给出了 IFE 概率的公理化定义; Riecan[11]给出了 IFE 概率描述化定义, 并证明了部分 IFE 概率的性质; Riecan[12]给出了 IFE 概率的可分形式与不可分形式, 其中不可分形式不是唯一的. 最近, Ciungu 等人[13] 对 Riecan 描述化定义进行扩展, 在以新的算子为基础

收稿日期: 2009-12-31；**修回日期:** 2010-05-01.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60773209)；陕西省自然科学基金项目(2006F18).
作者简介: 樊雷(1981−), 男, 博士生, 从事智能信息处理与智能决策的研究；雷英杰(1956−), 男, 教授, 从事智能信息处理与智能决策等研究.

的概率空间上定义了 φ 概率, 进一步给出了 IFE 概率的不可分形式.

对于经典概率理论, 统计判决与决策客观上的判决存在随机性, 同时主观上的决策往往还带有模糊性. 为此, 本文以文献 [8] 给出的 IFE 概率为基础, 建立了初步的直觉模糊概率理论, 并利用直觉模糊集解决统计判决与决策中存在的模糊性, 详细讨论了直觉模糊统计判决与决策方法, 并验证了该方法的有效性.

2 直觉模糊事件的概率及基本性质

定义 1 (直觉模糊事件)[8] 设 Ω 为一样本空间, 其任一元素 (通常记为 $\omega_i, i=1,2,\cdots$) 是 Ω 上的随机实验结果, 称之为基本事件; 其任一子集 A 称为随机事件. 如果 Ω 中的基本事件 ω_i 是以程度 $\mu_A(\omega_i)$ 属于 A, 同时以程度 $\nu_A(\omega_i)$ 不属于 A, 并且 $\mu_A(\omega_i), \nu_A(\omega_i) \in [0,1], 0 \leqslant \mu_A(\omega_i)+\nu_A(\omega_i) \leqslant 1$, 则称随机事件 $A=\{\langle\omega_i, \mu_A(\omega_i), \nu_A(\omega_i)\rangle | \omega_i \in \Omega\}$ 是样本空间 Ω 上的直觉模糊事件, 简记为二元组 $(\mu_A(\omega_i), \nu_A(\omega_i))$ 或 (μ_A, ν_A).

令 $\pi_A(\omega_i)=1-\mu_A(\omega_i)-\nu_A(\omega_i)$ 为 IFE A 的犹豫度, 如果 $\pi_A(\omega_i)=0$, 则 IFE 退化为 FE. 用 IEF(Ω) 表示样本空间 Ω 上的一个 IFE 子集族.

定义 2 (直觉模糊事件概率) 令 δ 为区间数的集合, $P: \mathrm{IFE}(\Omega) \to \delta$, 则 $\forall A \in \mathrm{IFE}(\Omega), \omega_i \in A$.

1) 当 Ω 为有限集时, 若令 $P(\omega_i)$ 为 ω_i 的概率, 则 IFE A 的概率为

$$P(A)=\Big[\sum_{i=1}^{n} \mu_A(\omega_i) P(\omega_i), 1-\sum_{i=1}^{n} \nu_A(\omega_i) P(\omega_i)\Big]. \quad (1)$$

2) 当 Ω 为连续集时, 如果设 $\widetilde{R}$ 为直觉模糊数, 令 $x: \Omega \to \widetilde{R}$ 为直觉模糊随机变量, $f(x)$ 为 x 概率密度函数, 则 IFE A 的概率为

$$P(A)=\Big[\int \mu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x, 1-\int \nu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x\Big]. \quad (2)$$

对于式 (2), 文献 [8] 给出了一种简化形式, 即

$$P(A)=\int \frac{1}{2}(\mu_A(\omega_i)+1-\nu_A(\omega_i)) f(x) \mathrm{d}x. \quad (3)$$

该简化形式满足 Kolmogorov 概率的所有性质.

定义 3 (IF 三角模及三角余模) 集合 L 及运算 $\leqslant_L, L=\{x | x=(x_1, x_2), x_1, x_2 \in [0,1], x_1+x_2 \leqslant 1\}$, 同时 $\forall x, y \in L, x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2)$, 当 $x \leqslant_L y$ 时, $(x_1, x_2) \leqslant_L (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leqslant y_1, x_2 \geqslant y_2$, 称 $(L, \leqslant_L)$ 为完全格. IFS 的 t 模及 s 模为 L 上的递增且满足交换律和结合律的二元运算, $(1,0),(0,1)$ 分别代表中立元, 则 $\forall x, y, z \in L, x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2), z=(z_1, z_2)$, 映射 $T_1, S_1: L \times L \to L$, 满足:

1) $T_1(x, y)=T_1(y, x)$,
$S_1(x, y)=S_1(y, x)$;

2) $T_1(x, T_1(y, z))=T_1(T_1(x, y), z)$,
$S_1(x, S_1(y, z))=S_1(S_1(x, y), z)$;

3) 当 $x \leqslant_L y$ 时, 有
$T_1(x, z) \leqslant_L T_1(y, z),\ S_1(x, z) \leqslant_L S_1(y, z)$;

4) $T_1(x,(1,0))=x,\ S_1(x,(0,1))=x$.

令 $A, B \in \mathrm{IFE}(\Omega), A=(\mu_A, \nu_A), B=(\mu_B, \nu_B)$, 传统模糊三角模 ($t$ 模) 及三角余模 (s 模) 为 $T, S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, 则 IFS 的 t 模及 s 模与传统的模糊 t 模及 s 模的关系为 $T_1(A, B)=(T(\mu_A, \mu_B), S(\nu_A, \nu_B))$, $S_1(A, B)=(S(\mu_A, \mu_B), T(\nu_A, \nu_B))$ 存在特殊的模糊 t 模及 s 模, 令 $A', B' \in \mathrm{FE}(\Omega)$, 则有

$$T^M(A', B')=\max(\mu_{A'}, \mu_{B'}),$$
$$S^M(A', B')=\min(\nu_{A'}, \nu_{B'}),$$
$$T^L(A', B')=\max(\mu_{A'}+\mu_{B'}-1, 0),$$
$$S^L(A', B')=\min(\nu_{A'}+\nu_{B'}, 1).$$

将 $T^L(A', B')$ 和 $S^L(A', B')$ 扩展到 IFS 的 t 模及 s 模, 即

$$T_1^L(A, B)=(T^L(\mu_A, \mu_B), S^L(\nu_A, \nu_B))=(\max(\mu_A+\mu_B-1, 0), \min(\nu_A+\nu_B, 1));$$
$$S_1^L(A, B)=(S^L(\mu_A, \mu_B), T^L(\nu_A, \nu_B))=(\min(\mu_A+\mu_B, 1), \max(\nu_A+\nu_B-1, 0)).$$

推论 1 设 Ω 为样本空间, $P: \mathrm{IFE}(\Omega) \to \delta$, 有:

1) $\forall A \in \mathrm{IFE}(\Omega), P(A) \subseteq [0,1]$;

2) $P((1,0))=[1,1], P((0,1))=[0,0]$;

3) $\forall A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathrm{IFE}(\Omega)$, 如果 $T_1^L(A_i, A_j)=(0,1), i, j=1,2,\cdots,n$, 则

$$P(S_1^L(A_i, A_j))=P(A_i)+P(A_j).$$

记

$$\mathop{T_1^L}_{i=1}^{n}(A_i)=T_1^L\Big(A_n, \mathop{T_1^L}_{i=1}^{n-1}(A_i)\Big),$$
$$\mathop{S_1^L}_{i=1}^{n}(A_i)=S_1^L\Big(A_n, \mathop{S_1^L}_{i=1}^{n-1}(A_i)\Big),$$

则当 $\mathop{T_1^L}_{i=1}^{n}(A_i)=(0,1)$ 时, 有 $P\Big(\mathop{S_1^L}_{i=1}^{n}(A_i)\Big)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

证明 1) 显然成立.

2) $A=(\mu_A(\omega_i), \nu_A(\omega_i))=(1,0) \Rightarrow$
$$\int \mu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x=1,$$
$$1-\int \nu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x=1 \Rightarrow$$
$$P((1,0))=[1,1];$$

$A=(\mu_A(\omega_i), \nu_A(\omega_i))=(0,1) \Rightarrow$
$$\int \mu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x=0,$$
$$1-\int \nu_A(\omega_i) f(x) \mathrm{d}x=0 \Rightarrow$$
$$P((0,1))=[0,0].$$

3) $\forall A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathrm{IFE}(\Omega)$,

$$T_1^L(A_i,A_j)=(0,1)\Rightarrow$$

$$\max(\mu_{A_i}+\mu_{A_j}-1,0)=0,$$

$$\min(\nu_{A_i}+\nu_{A_j},1)=1\Rightarrow$$

$$\mu_{A_i}+\mu_{A_j}\leqslant 1,\nu_{A_i}+\nu_{A_j}\geqslant 1\Rightarrow$$

$$\min(\mu_{A_i}+\mu_{A_j},1)=\mu_{A_i}+\mu_{A_j},$$

$$\max(\nu_{A_i}+\nu_{A_j}-1,0)=\nu_{A_i}+\nu_{A_j}-1;$$

$$P(S_1^L(A_i,A_j))=$$

$$P(\min(\mu_A+\mu_B,1),\max(\nu_A+\nu_B-1,0))=$$

$$P(\mu_{A_i}+\mu_{A_j},\nu_{A_i}+\nu_{A_j}-1)=$$

$$\Big[\int(\mu_{A_i}+\mu_{A_j})f(x)\mathrm{d}x,$$

$$1-\int(\nu_{A_i}+\nu_{A_j}-1)f(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$\Big[\int(\mu_{A_i}+\mu_{A_j})f(x)\mathrm{d}x,$$

$$2-\int(\nu_{A_i}+\nu_{A_j})f(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$P(A_i)+P(A_j).$$

同理, 当 $\overset{n}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)=(0,1)$ 时, 有

$$P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(A_i)\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).\qquad\square$$

可见, 将 $\bigcup$ 和 $\bigcap$ 看成 t 模及 s 模, 则对于传统的 FE 概率, $\bigcup$ 和 $\bigcap$ 就是 T^M,S^M, 而对于 IFE 概率, $\bigcup$ 和 $\bigcap$ 就是 T_1^L,S_1^L.

推论 2　设 Ω 为样本空间, $A,B\in\mathrm{IFE}(\Omega),P:\mathrm{IFE}(\Omega)\to\delta$, 则有:

1) $A\subseteq B$, 则 $P(A)\leqslant P(B)$;

2) $P(A^C)=1-P(A)$;

3) $P(S_1^L(A,B))=P(A)+P(B)-P(T_1^L(A,B))$.

证明　1) $A\subseteq B\Rightarrow\mu_A\leqslant\mu_B,\nu_A\geqslant\nu_B\Rightarrow\int\mu_Af(x)\mathrm{d}x\leqslant\int\mu_Bf(x)\mathrm{d}x,1-\int\nu_Af(x)\mathrm{d}x\leqslant 1-\int\nu_Bf(x)\mathrm{d}x$, 由文献 [14] 可得到区间数的比较方法

$$A=[a_*,a^*]\leqslant B=[b_*,b^*]\Leftrightarrow a_*\leqslant b_*,\ a^*\leqslant b^*,$$

所以

$$\Big[\int\mu_Af(x)\mathrm{d}x,1-\int\nu_Af(x)\mathrm{d}x\Big]\leqslant$$

$$\Big[\int\mu_Bf(x)\mathrm{d}x,1-\int\nu_Bf(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$P(A)\leqslant P(B).$$

2) $P(A^C)=\Big[\int\nu_Af(x)\mathrm{d}x,1-\int\mu_Af(x)\mathrm{d}x\Big]$, 由区间数的减法, 有

$$1-P(A)=$$

$$[1,1]-\Big[\int\mu_Af(x)\mathrm{d}x,1-\int\nu_Af(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$\Big[\int\nu_Af(x)\mathrm{d}x,1-\int\mu_Af(x)\mathrm{d}x\Big]=P(A^C).$$

3) 有

$$P(S_1^L(A,B))+P(T_1^L(A,B))=$$

$$P(\max(\mu_A+\mu_B-1,0),\min(\nu_A+\nu_B,1))+$$

$$P(\min(\mu_A+\mu_B,1),\max(\nu_A+\nu_B-1,0))=$$

$$\Big[\int\max(\mu_A+\mu_B-1,0)f(x)\mathrm{d}x,$$

$$1-\int\min(\nu_A+\nu_B,1)f(x)\mathrm{d}x\Big]+$$

$$\Big[\int\min(\mu_A+\mu_B,1)f(x)\mathrm{d}x,$$

$$1-\int\max(\nu_A+\nu_B-1,0)f(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$\Big[\int(\max(\mu_A+\mu_B-1,0)+\min(\mu_A+$$

$$\mu_B,1))f(x)\mathrm{d}x,2-\int(\min(\nu_A+\nu_B,1)+$$

$$\max(\nu_A+\nu_B-1,0))f(x)\mathrm{d}x\Big],$$

当 $\mu_A+\mu_B\leqslant 1,\nu_A+\nu_B\geqslant 1$ 时, 上式等于

$$\Big[\int(0+\mu_A+\mu_B)f(x)\mathrm{d}x,$$

$$2-\int(1+\nu_A+\nu_B-1)f(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$P(A)+P(B);$$

当 $\mu_A+\mu_B\geqslant 1,\nu_A+\nu_B\leqslant 1$ 时, 上式等于

$$\Big[\int(\mu_A+\mu_B-1+1)f(x)\mathrm{d}x,$$

$$2-\int(\nu_A+\nu_B+0)f(x)\mathrm{d}x\Big]=$$

$$P(A)+P(B).\qquad\square$$

可以进一步得到

$$P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(A_i)\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(T_1^L(A_i,A_j))+$$

$$\cdots+(-1)^{n+1}P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big).$$

定义 4 (IFE 的条件概率)　设 Ω 为样本空间, $A,B\in\mathrm{IFE}(\Omega),P:\mathrm{IFE}(\Omega)\to\delta$, 有:

1) 如果 $P(B)>[0,0]$, 则在 IFE B 已经发生的条件下, IEF A 的条件概率 $P(A|B)$ 定义为

$$P(A|B)=P(T_1^L(A,B))/P(B);\tag{4}$$

2) 如果 $P(T_1^L(A,B))=P(A)\cdot P(B)$, 则称直觉模糊事件 A,B 是独立的, 此时 $P(A|B)=P(A)$.

定理 1 (乘法定理)　$\forall A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathrm{IFE}(\Omega)$ 且 $P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)>0$, 有

$$P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)=$$

$$P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P\Big(A_n|\overset{n-1}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big).\tag{5}$$

证明 因为

$$P(A_1)\geqslant P(T_1^L(A_1,A_2))\geqslant\cdots\geqslant P\Big(\overset{n-1}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)\geqslant P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)\geqslant 0,$$

所以式 (5) 右端的条件概率都有意义. 下面利用数学归纳法证明乘法定理 1.

当 $n=2$ 时, 由定义 2 和定义 4 可知式 (5) 成立. 假设当 $n=k$ 时式 (5) 成立, 即

$$P\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots P\Big(A_k\Big|\overset{k-1}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big),$$

则当 $n=k+1$ 时, 有

$$P\Big(\overset{k+1}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)=P\Big(\overset{k}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)\cdot P\Big(A_{k+1}\Big|\overset{k}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)=$$

$$P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdots$$

$$P\Big(A_k\Big|\overset{k-1}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big)P\Big(A_{k+1}|\overset{k}{\underset{i=1}{T_1^L}}(A_i)\Big).\qquad\square$$

定理 2 (全概率公式) $\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathrm{IFE}(\varOmega)$, 如果 $T_1^L(A_i,A_j)=(0,1), P(A_i)>0, i,j=1,2,\cdots,n$, 则对于任意的 IFE $A\subseteq\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(A_i)$, 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(A|A_i).\tag{6}$$

证明

$$P(A)=$$

$$P\Big(T_1^L\Big(A,\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(A_i)\Big)\Big)=P\Big(\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(T_1^L(A,A_i))\Big)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}P(T_1^L(A,A_i))=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(A|A_i).\qquad\square$$

定理 3 (贝叶斯公式) $\forall A_1,\cdots,A_n\in\mathrm{IFE}(\varOmega)$, 如果 $T_1^L(A_i,A_j)=(0,1), P(A_i)>0, i,j=1,2,\cdots,n$, 则对于任意的 IFE $A\subseteq\overset{n}{\underset{i=1}{S_1^L}}(A_i), P(A)>0$, 有

$$P(A_i|A)=\frac{P(A|A_i)P(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A|A_j)P(A_j)}.\tag{7}$$

证明 因为

$$P(A)=\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(A|A_j),$$

且 $P(A)>0$, 由式 (5) 和 (6), 有

$$P(A_i|A)=P(T_1^L(A_i,A))/P(A)=$$

$$P(A_i)\cdot P(A|A_i)/P(A).\qquad\square$$

3 直觉模糊统计判决与决策

根据经典统计判决与决策的思想, 设五元组 $\{S, D, X, P(s_i), U(d_j,s_i)\}$. 其中: $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$ 是自然状态的集合, S 中的每一种状态 $s_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是自然界存在的一种情况, 即基本事件, 是一种随机现象; $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$ 是行为集合, 或者称之为决策集合和方案集合, D 中的每一个元素 $d_j(j=1,2,\cdots,m)$ 代表决策者的一种行为或决断; $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_l\}$ 是一追加的信息源, 其中每一条信息 $x_k(k=1,2,\cdots,l)$ 对自然状态 s_i 发生的概率产生影响; $P(s_i)$ 表示自然状态 s_i 可能发生的概率; $U(d_j,s_i)$ 是 $D\times S$ 上的评价函数或效用函数, 一般用矩阵表示, 即自然状态为 s_i 时, 采取方案 d_i 所取得的效果, 即为益损值. 下面根据信息源 X 的类型, 分组讨论直觉模糊统计判决与决策的方法.

1) 当不追加信息源时, 有以下 3 种情况:

① 状态 s_i 必然发生, 令 $A(S)$ 是一组 S 中的随机事件集, $\forall A_r\in A(S)$, $B(D)$ 是一组 D 中的决策集, $\forall D_g\in B(D)$, 则采取方案组 D_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(D_g^*)=\max_{A_r\in A(S),D_g\in B(D)}\Big\{\sum_{d_j\in D_g}\sum_{s_i\in A_r}U(d_j,s_i)\Big\}.$$

②状态 s_i 有可能发生, 令 $A(S)$ 是一组 S 中的随机事件集, $\forall A_r\in A(S)$, $B(D)$ 是一组 D 中的决策集, $\forall D_g\in B(D)$, 则采取方案组 D_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(D_g^*)=$$

$$\max_{A_r\in A(S),D_g\in B(D)}\Big\{\sum_{d_j\in D_g}\sum_{s_i\in A_r}U(d_j,s_i)P(s_i)\Big\}.$$

③状态 s_i 有可能发生, 令 $\mathrm{IF}(S)$ 是一组 S 中的直觉模糊随机事件集, $\forall F_r\in\mathrm{IF}(S)$, $\mathrm{IF}(D)$ 是一组 D 中的直觉模糊决策集, $\forall Q_g\in\mathrm{IF}(D)$, 则采取方案组 Q_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(Q_g^*)=$$

$$\max_{F_r\in\mathrm{IF}(S),Q_g\in\mathrm{IF}(D)}\Big\{\sum_{Q_g\in\mathrm{IF}(D)}\sum_{F_r\in\mathrm{IF}(S)}U(Q_g,F_r)P(F_r)\Big\}.$$

2) 当追加的信息源为经典集合时, 有以下 2 种情况:

①状态 s_i 有可能发生, 令 $A(S)$ 是一组 S 中的随机事件集, $\forall A_r\in A(S)$, $B(D)$ 是一组 D 中的决策集, $\forall D_g\in B(D)$, $C(X)$ 是一组 X 中的追加的信息集, $\forall M_h\in C(X)$, 则采取方案组 D_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(D_g^*|M_h)=$$

$$\max_{A_r\in A(S),D_g\in B(D),M_h\in C(X)}\rightarrow$$

$$\leftarrow\Big\{\sum_{x_l\in M_h}\sum_{d_j\in D_g}\sum_{s_i\in A_r}U(d_j,s_i)P(s_i|x_l)\Big\}.$$

②状态 s_i 有可能发生, 令 $\mathrm{IF}(S)$ 是一组 S 中的直觉模糊随机事件集, $\forall F_r\in\mathrm{IF}(S)$, $\mathrm{IF}(D)$ 是一组 D 中的直觉模糊决策集, $C(X)$ 是一组 X 中的追加的信息集, $\forall M_h\in C(X)$, 则采取方案组 Q_g 时, 判决者采取的方案应是

$$Q_g \in \mathrm{IF}(D) = \max_{F_r\in\mathrm{IF}(S),Q_g\in\mathrm{IF}(D),M_h\in C(X)} \rightarrow$$
$$\leftarrow \Big\{ \sum_{x_l\in M_h} \sum_{Q_g\in\mathrm{IF}(D)} \sum_{F_r\in\mathrm{IF}(S)} U(Q_g,F_r)P(F_r|x_l) \Big\}.$$

其中

$$P(F_r|x_l)=P(x_l|F_r)\cdot P(F_r)/P(x_l),$$
$$P(F_r)=\Big[\sum_{s_i\in F_r}\mu_{F_r}(s_i)P(s_i),1-\sum_{s_i\in F_r}\nu_{F_r}(s_i)P(s_i)\Big],$$
$$P(x_l)=\sum_{F_r\in\,\mathrm{IF}(S)}P(x_l|F_r)\cdot P(F_r).$$

$P(x_l|x_r),U(Q_g,F_r)$ 通过统计与调查给出, $P(F_r|N_h)$ 通过区间数除法获得. 令

$$V_1(M_h)=U(D_g^*|M_h)-U(D_g^*),$$
$$V_2(M_h)=U(Q_g^*|M_h)-U(Q_g^*)$$

分别为追加信息源后得到的信息价值.

3) 当追加的信息源为直觉模糊集合时, 有以下 2 种情况:

①状态 s_i 有可能发生, 令 $A(S)$ 是一组 S 中的随机事件集, $\forall A_r\in A(S),B(D)$ 是一组 D 中的决策集, $\forall D_g\in B(D),\mathrm{IF}(X)$ 是一组 X 中的追加的直觉模糊信息集, $\forall N_h\in\mathrm{IF}(X)$, 则采取方案组 D_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(D_g^*|N_h) = \max_{A_r\in A(S),D_g\in B(D),N_h\in\mathrm{IF}(X)} \rightarrow$$
$$\leftarrow \Big\{ \sum_{N_h\in\mathrm{IF}(X)} \sum_{d_j\in D_g} \sum_{s_i\in A_r} U(d_j,s_i)P(s_i|N_h) \Big\}.$$

其中: $P(s_i|N_h)=P(N_h|s_i)\cdot P(s_i)/P(N_h), P(N_h)=\sum_{i=1}^{n}P(N_h|s_i)\cdot P(s_i), P(N_h|s_i)$ 通过统计与调查给出.

②状态 s_i 有可能发生, 令 $\mathrm{IF}(S)$ 是一组 S 中的直觉模糊随机事件集, $\forall F_r\in\mathrm{IF}(S),\mathrm{IF}(D)$ 是一组 D 中的直觉模糊决策集, $\forall Q_g\in\mathrm{IF}(D),\mathrm{IF}(X)$ 是一组 X 中的追加的直觉模糊信息集, $\forall N_h\in\mathrm{IF}(X)$, 则采取方案组 D_g 时, 判决者采取的方案应是

$$U(Q_g^*|N_h) = \max_{F_r\in\mathrm{IF}(S),Q_g\in\mathrm{IF}(D),N_h\in\mathrm{IF}(X)} \rightarrow$$
$$\leftarrow \Big\{ \sum_{N_h\in\mathrm{IF}(X)} \sum_{Q_g\in\mathrm{IF}(D)} \sum_{F_r\in\mathrm{IF}(S)} U(Q_g,F_r)P(F_r|N_h) \Big\}.$$

其中

$$P(F_r|N_h)=P(N_h|F_r)\cdot P(F_r)/P(N_h),$$
$$P(F_r)=\Big[\sum_{s_i\in F_r}\mu_{F_r}(s_i)P(s_i),1-\sum_{s_i\in F_r}\nu_{F_r}(s_i)P(s_i)\Big],$$
$$P(N_h)=\sum_{F_r\in\mathrm{IF}(S)}P(N_h|F_r)\cdot P(F_r).$$

$P(N_h|F_r),U(Q_g,F_r)$ 通过统计与调查给出, $P(F_r|N_h)$ 通过区间数除法获得. 令

$$V_3(N_h)=U(D_g^*|N_h)-U(D_g^*),$$
$$V_4(N_h)=U(Q_g^*|N_h)-U(Q_g^*)$$

分别为追加直觉模糊信息源后得到的信息价值.

4 应用示例

某大型国有企业希望进行海外投资, 设这一投资问题为 $\{S,D,X,P,U\}$. 其中: S 代表所投资项目预计带来的增长指标的集合, $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_{12}\}$, $\mathrm{IF}(S)=\{F_1,F_2,F_3\}$ 为 S 上的直觉模糊事件, F_1 表示“投资前景相当不妙”, F_2 表示“前景状况大体维持现状”, F_3 表示“前景状况相当乐观”, s_i 的分布概率 $P(s_i)$ 和对于$F_r(r=1,2,3)$ 的隶属度与非隶属度函数见表 1; D 代表直觉模糊决策方案, Q_1 表示“向小型项目投资”, Q_2 表示“向中型的项目投资”, Q_3 表示“向大型项目投资”, 通过公司海外部的初步调研, 得到的评价函数 $U(Q_g,F_r)$ 见表2; X 代表追加的直觉模糊信息源集合, $\mathrm{IF}(X)=\{N_1,N_2,N_3\}$ 为 X上的直觉模糊事件, N_1 表示“投资的增长率偏低”, N_2 表示“投资的增长率变化不大”, N_3 表示“投资的增长率非常高”, 通过公司海外部的初步调研, 条件概率 $P(N_h|F_r)$ 见表 3. 下面对直觉模糊方案 $Q_g(g=1,2,3)$ 进行判决:

表 1　s_i 的分布概率$P(s_i)$与F_r 的隶属度与非隶属度函数

s_i	$F_1(s_i)$	$F_2(s_i)$	$F_3(s_i)$	$P(s_i)$
s_1	(1.00, 0.00)	(0.00, 1.00)	(0.00, 1.00)	0.09
s_2	(1.00, 0.00)	(0.00, 1.00)	(0.00, 1.00)	0.08
s_3	(0.71, 0.18)	(0.29, 0.67)	(0.00, 1.00)	0.09
s_4	(0.64, 0.25)	(0.36, 0.52)	(0.00, 1.00)	0.09
s_5	(0.54, 0.32)	(0.46, 0.41)	(0.00, 1.00)	0.07
s_6	(0.39, 0.43)	(0.61, 0.27)	(0.00, 1.00)	0.08
s_7	(0.00, 1.00)	(1.00, 0.00)	(0.00, 1.00)	0.08
s_8	(0.00, 1.00)	(0.82, 0.07)	(0.18, 0.69)	0.09
s_9	(0.00, 1.00)	(0.68, 0.20)	(0.32, 0.52)	0.07
s_{10}	(0.00, 1.00)	(0.46, 0.39)	(0.54, 0.33)	0.08
s_{11}	(0.00, 1.00)	(0.00 ,1.00)	(1.00, 0.00)	0.09
s_{12}	(0.00, 1.00)	(0.00, 1.00)	(1.00, 0.00)	0.09

表 2　评价函数矩阵 $U(Q_g,F_r)$

F/Q	F_1	F_2	F_3
Q_1	90	110	120
Q_2	0	150	200
Q_3	− 80	100	300

表 3　条件概率 $P(N_h|F_r)$

$P(N_h\|F_r)$	N_1	N_2	N_3
F_1	[0.61, 0.84]	[0.19, 0.32]	[0.07, 0.19]
F_2	[0.23, 0.40]	[0.58, 0.73]	[0.16, 0.38]
F_3	[0.14, 0.29]	[0.21, 0.44]	[0.62, 0.79]

Step 1: 根据表 1 所给的数据, 由

$$P(F_r)=\Big[\sum_{s_i\in F_r}\mu_{F_r}(s_i)P(s_i),1-\sum_{s_i\in F_r}\nu_{F_r}(s_i)P(s_i)\Big]$$

计算得到

$P(F_1)=[0.371\,3,0.404\,5]$, $P(F_2)=[0.377\,7,0.441\,1]$,

$P(F_3)=[0.261\,8,0.295\,1]$.

Step 2: 根据表 3 所给的数据, 由公式

$$P(N_h)=\sum_{F_r\in \mathrm{IF}(S)}P(N_h|F_r)\cdot P(F_r),$$

以及区间数乘法

$$[a,b]\times[c,d]=$$
$$[\min\{ac,bc,ad,bd\},\max\{ac,bc,ad,bd\}],$$

计算得到

$P(N_1)=[0.350\,0,0.601\,8]$, $P(N_2)=[0.344\,7,0.581\,2]$,

$P(N_3)=[0.248\,7,0.477\,6]$.

Step 3: 根据公式

$$P(F_r|N_h)=P(N_h|F_r)\cdot P(F_r)/P(N_h),$$

以及区间数除法 $[a,b]/[c,d]=[a/d,b/c]$ 计算得到的条件概率如表 4 所示.

表 4 计算得到的条件概率 $\boldsymbol{P(F_r|N_h)}$

$P(F_r\|N_h)$	F_1	F_2	F_3
N_1	[0.376 4, 0.970 8]	[0.117 2, 0.369 8]	[0.043 2, 0.219 6]
N_2	[0.149 5, 0.511 9]	[0.376 9, 0.934 2]	[0.104 0, 0.486 3]
N_3	[0.076 7, 0.308 5]	[0.115 1, 0.271 9]	[0.339 9, 0.937 4]

Step 4: 根据表 2 所给的数据以及 Step 3 得到的结果, 在直觉模糊信息源下计算直觉模糊决策方案对直觉模糊事件的效用

$U(Q_1|N_h)=[263.9,489.1]$, $U(Q_2|N_h)=[339,530.5]$,

$U(Q_3|N_h)=[318.4,499]$.

根据区间数比较方法[14], 有

$$U(Q_1|N_h)<U(Q_3|N_h)<U(Q_2|N_h),$$

因此采用方案 Q_2, 即应向中型项目投资.

5 结 论

自 Zadeh 将模糊集合理论与概率论相结合以来, 模糊概率论的研究便取得了巨大进展, 它将人类主观意识的模糊性与客观世界的随机性有机地融合在一起, 是随机数学和模糊数学的重大发展. 从数学理论上看, 它是两类不确定性数学理论的交叉与拓广; 从工程应用上看, 它为复杂不确定系统的研究提供了一种新的数学工具.

作为模糊集合理论的重要扩展形式之一, 直觉模糊集合理论更加细腻地刻画了客观世界的模糊本质, 因此将直觉模糊集合理论与概率论相结合, 建立直觉模糊概率理论具有重要的研究价值. 本文利用直觉模糊集合理论解决统计判决与决策中存在的模糊性, 详细讨论了直觉模糊统计判决与决策方法. 但限于篇幅, 文中仅给出了在直觉模糊信息源下计算直觉模糊决策方案对直觉模糊事件效用的示例.

参考文献(References)

[1] 李德毅, 刘常昱, 杜鹢, 等. 不确定性人工智能[J]. 软件学报, 2004, 15(11): 1583-1593.
(Li D Y, Liu C Y, Du Y, et al. Artificial intelligence with uncertainty[J]. J of Software, 2004, 15(11): 1583-1593.)

[2] Zadeh L A. Probability measures of fuzzy events[J]. J of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 23(4): 421-427.

[3] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[4] Atanassov K. More on intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 33(1): 37-46.

[5] Atanassov K. New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(1): 137-142.

[6] Atanassov K. Remarks on the intuitionistic fuzzy sets-III[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 75(3): 401-402.

[7] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy Sets[J]. Theory and Applications, 1999, 11(2): 558-567.

[8] Gerstenkorn T, Manko J. Bifuzzy probability of intuitionistic sets[J]. Notes of Intuitionistic Fuzzy Sets, 1988, 4(2): 8-14.

[9] Gerstenkorn T, Manko J. Probability of fuzzy intuitionistic sets[C]. BUSEFAL. New York: Grzegorz-ewski, 1990: 128-136.

[10] Grzegorzewski P, Mrowka E. Probability of intuitionistic fuzzy events[C]. Soft Methods in Probability, Statistics and Data Analysis, Physica Verlag. New York: Grzegorz-ewski, 2002: 105-115.

[11] Riecan B. A descriptive definition of the probability on intuitionisticfuzzy sets[C]. Zittau-Goerlitz University of Applied Sciences. Dordrecht: Wagenecht M, Hampet R, 2000: 263-266.

[12] Riecan B. On a problem of Radko Mesiar: General form of IF-probabilities[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(5): 1485-1490.

[13] Lavinia Corina Ciungu, Riecan B. Representation theorem for probabilities on IFS-events[J]. Information Sciences, 2009, 18(3): 6-13.

[14] Zadeh L A. The concept of a linguistic variable and its approximate reasoning[J]. Information Sciences, 1975, 7(2): 199-249.