

文章编号: 1001-0920(2011)02-0313-03

基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测

袁潮清, 刘思峰, 张可

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘要: 以GM(1, 1)模型为代表的灰色预测模型实际上是对白数的建模和预测, 而不是对区间灰数的建模和预测. 发展趋势和认知程度两个维度可以很好地描述区间灰数序列, 对此, 可先将区间灰数序列转化成相应的发展趋势序列和认知程度, 然后对区间灰数序列进行预测. 这样, 既避免了区间灰数预测过程中的灰数运算问题, 又充分利用了区间灰数序列自身所包含的信息. 通过具体实例验证了所建模型的有效性.

关键词: 区间灰数; 灰色预测; 发展趋势; 认知程度

中图分类号: C931

文献标识码: A

Prediction model for interval grey number based on trend and cognition

YUAN Chao-qing, LIU Si-feng, ZHANG Ke

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: YUAN Chao-qing, E-mail: yuanchaoqing@126.com)

Abstract: In fact the grey prediction models such as GM(1,1) deal with the white number sequence rather than grey number sequence. Meanwhile, interval grey number is very important in grey system. The trend and cognition of the interval grey number sequence are defined. An interval grey number sequence is transferred into the trend and cognition of interval grey number sequence, and then the interval grey number sequence is predicted with them, which can avoid the calculation of interval grey number and fully use the information embedded in the grey sequence. Finally, an example is given to show the effectiveness of the model.

Key words: interval grey number; grey prediction; trend; cognition

1 引言

灰数是指知道大概范围而不知道确切值的数. 它是灰色系统的基本“单元”或“细胞”. 在应用中, 灰数实际上是指在一个区间或某个一般的数集内取值的不确定数^[1]. 因此, 区间灰数是一种代表性的灰数, 而灰数通常用符号“ \otimes ”表示.

长期以来, 灰色预测一直是灰色系统理论研究的热点和亮点. 很多学者在灰色预测建模、优化及其应用方面开展了大量的研究, 并取得了丰硕的成果^[2-11]. 但目前以GM(1, 1)模型为代表的灰色预测模型实际上都是对白数序列进行建模和预测, 而对区间灰数序列的预测研究则十分缺乏.

区间灰数运算复杂, 按照目前的运算法则会导致灰数灰度不断放大, 造成信息的不必要损失^[12]. 因此, 目前区间灰数计算的最主要思路是: 先将其白化, 然

后按照白数的运算法则进行相应计算. 但这种处理同样会损失大量信息, 计算结果也难以反映现实情况, 更是失去了“灰色”的内涵^[13]. 因此, 对区间灰数序列预测进行研究具有极大的理论意义和实际意义.

本文认为可以从发展趋势和认知程度两个维度来描述区间灰数序列. 发展趋势反映的是区间灰数序列未来的变化趋势, 认知程度则反映的是对区间灰数序列信息掌握的情况. 在假定灰数序列发展趋势不变、不补充额外信息的情况下, 可根据这两个维度对它进行预测. 这样, 在区间灰数的预测过程中既可避免区间灰数的运算问题, 又充分利用了区间灰数本身所蕴含的信息.

2 区间灰数序列的认知程度和发展趋势

定义 1 既有上界 \bar{a} 又有下界 \underline{a} 的灰数称为区

收稿日期: 2009-11-25; 修回日期: 2010-01-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(90924022, 70971064, 70901041); 教育部博士点基金项目(200802870020); 教育部重点科研基金项目(02152).

作者简介: 袁潮清(1979-), 男, 讲师, 博士生, 从事系统工程、能源经济的研究; 刘思峰(1955-), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统、数量经济等研究.

区间灰数, 记作 $\otimes \in (\underline{a}, \bar{a})$, 其中 $\bar{a} \geq \underline{a}$; 称区间灰数的上界和下界的差值为区间灰数的长度, 记作 $l(\otimes) = \bar{a} - \underline{a}$ ^[1].

按照定义 1, 当 $\bar{a} = \underline{a}$ 时, 区间灰数就变成了白数, 即白数是一种特殊的区间灰数.

定义 2 由区间灰数构成的时间序列称为区间灰数序列, 记作

$$X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n),$$

其中 $\otimes_i (1 \leq i \leq n)$ 为区间灰数.

定义 3 称 $X(\tilde{\otimes}) = (\tilde{\otimes}_1, \tilde{\otimes}_2, \dots, \tilde{\otimes}_n)$ 为区间灰数序列 $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ 的白化序列, 其中 $\tilde{\otimes}_i (1 \leq i \leq n)$ 为区间灰数 \otimes_i 的白化值.

定义 4 依次连接区间灰数序列中各灰数的白化值, 形成的折线称为区间灰数序列的趋势线, 如图 1 所示.

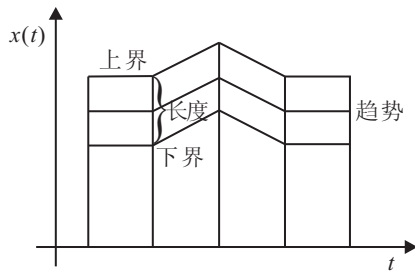


图 1 区间灰数序列趋势

灰色白化权函数是描述对一个灰数在其取值范围内不同数值的“偏好”程度, 即反映灰数在不同数值上取值的可能性^[1]. 灰色系统的默承认原理认为“若没有理由认为 φ 不成立, 则默认 φ 成立”^[2]. 在没有灰色白化权函数的情况下, 根据默承认原理, 可认为该区间灰数在区间内各数值上取值的可能性处处相等. 在这种情况下, 不难证明区间灰数 $\otimes \in (\underline{a}, \bar{a})$ 的白化值为 $\frac{1}{2}(\bar{a}_i + \underline{a}_i)$. 由此可以证明, 它符合最大熵原则^[14].

因为 $(1/2)(\bar{a}_i + \underline{a}_i)$ 在数值上等于均值白化值, 所以在没有灰色白化权函数的情况下, 一般采用区间灰数均值白化序列 $T = (\tilde{\otimes}_1^0, \tilde{\otimes}_2^0, \dots, \tilde{\otimes}_n^0)$ 作为区间灰数序列 $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ 的发展趋势序列. 其中 $\tilde{\otimes}_i^0 (1 \leq i \leq n)$ 为区间灰数 \otimes_i 的均值白化值, 即

$$\tilde{\otimes}_i^0 = (1/2)(\bar{a}_i + \underline{a}_i). \quad (1)$$

灰数灰度是对灰数灰程度的测定, 反映了灰数信息量的大小. 因此, 灰数灰度可很好地反映人们对该灰数的认知程度. 很多学者从不同的角度对灰数的灰度进行深入研究, 结果表明灰数的灰度受到了灰数区间长度和灰数的白化值大小的影响^[1-2]. 因此, 可根据灰数灰度的思想来定义区间灰数的认知程度.

定义 5 若 $\underline{a} \geq 0$, 则称区间灰数 $\otimes \in (\underline{a}, \bar{a})$ 为非负区间灰数.

定义 6 若 $\otimes_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为非负区间灰数, 则称区间灰数序列 $X(\otimes) = (\otimes_1, \otimes_2, \dots, \otimes_n)$ 为非负区间灰数序列.

定义 7 对于非负区间灰数 \otimes , 称

$$r(\otimes) = 1 - l(\otimes)/\tilde{\otimes}^0 \quad (2)$$

为区间灰数 \otimes 的认知程度. 其中: $l(\otimes)$ 为灰数 \otimes 的长度, $\tilde{\otimes}^0$ 为灰数 \otimes 的白化值.

定义 8 将区间灰数序列的认知程度定义为

$$R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r(\otimes_i). \quad (3)$$

不难证明对于掌握了所有信息的白数序列, 它的认知程度为 1, 即白数序列是认知程度为 1 的特殊区间灰色序列.

3 区间灰数序列的预测模型

对区间灰数趋势序列 $T = (\tilde{\otimes}_1^0, \tilde{\otimes}_2^0, \dots, \tilde{\otimes}_n^0)$ 建立 GM(1, 1) 模型进行预测, 可得相应的时间响应序列为

$$\hat{t}^{(1)}(k+1) = (t^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, \quad (4)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$. 其还原值为

$$\begin{aligned} \hat{t}^{(0)}(k+1) &= \hat{t}^{(1)}(k+1) - \hat{t}^{(1)}(k) = \\ &= (1 - e^a)(t^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $k = 1, 2, \dots, n$.

依据上式可以对灰数序列的趋势进行预测, 预测结果表明了区间灰数序列的发展趋势.

灰理论的基础是灰色朦胧集, 而灰色朦胧集实质上是一种包含胚胎子集、发育子集、成熟子集和实证子集的子集族. 灰色朦胧集的 4 种形态不是同时存在的, 它的演化具有信息性和动态性^[2]. 灰色朦胧集的思想说明灰数白化的过程是一个信息补充的过程. 因此, 在没有任何额外信息补充的情况下, 考虑将区间灰数序列的认知程度作为序列预测的认知程度, 即

$$r(\otimes_i) = R, \quad i = n+1, n+2, \dots.$$

由式 (1), (2) 和 (5) 可得

$$\begin{cases} \bar{a}_{k+1} + \underline{a}_{k+1} = 2\hat{t}^{(0)}(k+1), \\ 1 - R = (\bar{a}_{k+1} - \underline{a}_{k+1})/\hat{t}^{(0)}(k+1), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $k = n, n+1, n+2, \dots$.

通过求解上述方程组可得区间灰数的上界和下界的预测值为

$$\begin{cases} \bar{a}_{k+1} = \frac{3-R}{2}\hat{t}^{(0)}(k+1), \\ \underline{a}_{k+1} = \frac{1+R}{2}\hat{t}^{(0)}(k+1), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $k = n, n+1, n+2, \dots$.

对上述计算过程进行总结, 可得以下区间灰数预测的步骤:

Step 1: 按照式 (1) 计算区间灰数序列的趋势序列;

Step 2: 按照式 (2) 和 (3) 计算区间灰数序列的认知程度;

Step 3: 按照式 (4) 和 (5) 预测区间灰色序列的趋势;

Step 4: 按照式 (7) 预测区间灰数序列;

Step 5: 计算相对误差, 根据模型精度对模型进行检验.

按照区间灰数序列预测的步骤, 不难发现, 当区间灰数的上界和下界相同, 即区间灰数为白数时, 基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测模型将变为 GM(1, 1) 模型.

4 具体实例

某企业在分析竞争对手发展趋势时, 缺少对手销售额的准确资料, 通过在对共同竞标等经营活动中收集到的信息进行分析后, 对该企业销售额的最大值和最小值进行了估计, 认为近几年该企业的销售额如表 1 所示. 由此得到的对手销售额序列是一个区间灰数序列.

表 1 某企业销售额序列 万元

数值	年份			
	2005	2006	2007	2008
最小值	80	95	120	130
最大值	100	120	150	160

按照区间灰数的预测步骤对该竞争对手的销售额进行预测. 按照式 (1) 可计算得出该区间灰数序列的趋势序列为

$$T(\otimes) = (90, 107.5, 135, 145).$$

按照式 (2), (3) 可计算出该区间灰数序列的认知程度为 $R = 0.779025$. 按照式 (4) 可以得到趋势序列 $T(\otimes)$ 的时间响应函数为

$$\hat{t}^{(1)}(k+1) = 730.3333e^{0.14169k} - 640.3333,$$

其还原值为

$$\hat{t}^{(0)}(k+1) = (1 - e^{-0.14169})730.3333e^{0.14169k}.$$

因此可以得到如下模拟序列:

$$\hat{T}(\otimes) = (90.0000, 111.1750, 128.0986, 147.5984).$$

相应的模拟结果和相对误差如表 2 所示. 由表 2 可知, 平均相对误差为 2.23%, 模型的模拟精度较好, 可以进行预测.

表 2 误差检验表

年份	实际值	模拟值	相对误差/%
2005	[80, 100]	[80, 100]	0
2006	[95, 120]	[98.2, 124.1]	3.4
2007	[120, 150]	[118.2, 147.8]	-1.5
2008	[130, 160]	[132.3, 162.9]	1.8

按照式 (7) 对该企业 2009~2013 年的销售额预测如表 3 所示. 预测结果表明该竞争对手的销售额在 2010 年将会超过 200 万, 在 2013 年将会超过 300 万. 该企业认为这个预测结果是合理的, 符合市场和该竞争对手的状况.

表 3 销售收入预测值 万元

年份	上界	下界
2009	218	174
2010	251	201
2011	289	231
2012	333	267
2013	384	307

分别对原始区间灰数序列的上界和下界建立 GM(1,1) 模型进行预测, 结果如表 4 所示.

表 4 销售收入预测值 万元

年份	上界	下界
2009	213.9871	177.9824
2010	245.1929	206.5046
2011	280.9495	239.5977
2012	321.9206	277.9940
2013	368.8665	322.5434
相对误差/%	3.5398	3.4174

依据表 4 的结果, 根据式 (2), (3) 可以计算出相应的认知程度为 $R' = 0.841134$. 由此可以发现, 直接对区间灰数序列上界和下界建模, 模型的精确度会有所下降; 而预测值的认知程度在无任何信息补充的情况下却有所提高. 这进一步说明了本文所建立的区间灰数序列预测模型的合理性.

5 结 论

本文认为可以从发展趋势和认知程度两个维度来描述区间灰数序列, 并定义了无白化权函数的区间灰数的趋势序列和认知程度. 在此基础上, 对区间灰数序列进行预测. 实例表明, 这种预测方法的结果是可行和可信的, 灰色白化权函数很好地反映了对灰数信息的掌握程度或认知程度. 无白化权函数的区间灰数是一种信息量最少的区间灰数, 考虑具有灰色白化权函数情况下的区间灰数预测是后续研究的重点. 例如, 在本文的实例中, 企业还可以对竞争对手各年度销售额最有可能的值进行估计, 从而构造出带三角白化权函数的区间灰数序列. 当然, 这类区间灰数序列的预测更为复杂.

参考文献(References)

[1] Liu S F, Lin Y. An introduction to grey system: Foundations, methodology and applications[M]. Grove City: IIGSS Academic Publisher, 1998: 13-30.