

文章编号: 1000-4750(2014)08-0209-08

压电与导体双材料界面端的奇异性研究

周一波, 李晓叶, 王效贵

(浙江工业大学机械工程学院, 杭州 310014)

摘 要: 提出了一种求解平面应变条件下横观各向同性压电与导体双材料界面端的应力及电位移奇异性的特征值法。基于横观各向同性压电材料的基本方程和一阶近似假设, 利用分离变量形式的位移函数和电势函数, 导出了关于应力和电位移奇异性指数的奇异性特征方程。求解由无网格法离散的特征方程, 即可得到应力和电位移的各阶奇异性指数, 同时还可得到相应的应力和电位移角函数。数值计算结果与文献中给出的结果非常吻合, 表明该方法具有很高的精度和效率。

关键词: 界面端; 特征值法; 奇异性; 无网格法; 压电材料

中图分类号: O341 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.03.0181

SINGULARITIES IN THE WEDGE OF PIEZOELECTRIC MEDIA AND CONDUCTOR

ZHOU Yi-bo, LI Xiao-ye, WANG Xiao-gui

(College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)

Abstract: An eigenvalue method was proposed to study the singular stress field and the singular electric displacement field of a piezoelectric/conductor wedge under a plane strain state. Based on the fundamental equations of transversely isotropic piezoelectric materials and a first-order approximation assumption, the discrete characteristic equation was derived by using displacement functions and electric potential functions with separated variables and the meshless method. The eigenvalue is relative to the order of stress singularity and electric displacement singularity, and the associated eigenvector is with respect to the stress angular variations and electric displacement angular variations. The numerical results of both singularity orders and angular variations obtained by the proposed method agree with those presented in the reference literatures very well. The accuracy and efficiency of the proposed eigenvalue method were also verified.

Key words: interface wedge; eigenvalue method; singularity; meshless method; piezoelectric material

压电材料由于其所具有的压电耦合效应, 常与其他材料(导体、复合材料或压电材料)组成各种不同的结构, 广泛应用于制作传感器、致动器、换能器等压电器件^[1]。

压电材料与导体接合时, 在界面端存在几何或材料不连续现象, 从而导致应力和电位移奇异。界面端奇异点附近的应力场可能以多重奇异性叠加的形式出现, 在某些方向(如与最强的奇异性指数对应的应力角函数为零的方向)上甚至是较弱的应力

奇异性占支配地位^[2]。因此, 为了建立适合压电接合材料的强度和可靠性的评价方法, 必须确定描述奇异点附近的应力场和电位移场的各阶奇异性指数以及相应角函数。

压电接合材料界面端奇异应力场和电位移场的研究, 包括解析法^[3-7]和数值方法^[8-11]。Qin 和 Yu^[3]研究了压电/压电接合材料中存在一条与双材料界面斜交裂纹的平面问题; 针对特征方程有三重根、二重根和无重根的压电材料, 文献[4-5]导出

收稿日期: 2013-03-08; 修改日期: 2013-05-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(51005208, 51175469)

通讯作者: 王效贵(1973-), 男, 山东青州人, 教授, 博士, 博导, 从事固体力学研究(E-mail: hpcwxg@zjut.edu.cn).

作者简介: 周一波(1987-), 男, 浙江江山人, 硕士生, 从事固体力学研究(E-mail: yibozh01@yahoo.com.cn);

李晓叶(1989-), 女, 陕西宝鸡人, 硕士生, 从事固体力学研究(E-mail: lxylixiaoye@163.com).

了轴对称变形情况下压电双材料界面端奇异应力场和电位移场的解析表达式；Xu 和 Rajapakse^[6]导出了平面变形情况下复合压电材料楔形切口与接头端部的奇异电弹性场，并考察了材料属性、接合角和极化方向的影响；Chue 和 Chen^[7]利用特征值法，研究了压电材料楔形切口端部广义平面电弹性场的奇异性问题。数值研究方面，文献[8-9]提出了一种求解压电材料中切口/接头端部平面电弹性场奇异性的一维有限元法；文献[10-11]利用一种全数值法对双压电材料下裂纹的力电耦合奇异场进行数值计算；文献[12-13]提出了一种分析双材料界面端应力奇异行为的特征值法，该方法不但能够得到界面端奇异应力场的各阶奇异性指数和相应的角函数，与真实载荷作用下应力场的数值解相结合还可确定应力强度因子；文献[14]提出了一种确定广义平面应变情况下各向异性弹性接合材料界面端应力奇异性次数的一维特殊有限元法。此外，李兴民和雷振坤^[15]对双材料界面端应力奇异性进行了数字光弹性分析。

本文将借鉴文献[12-13]的思路，将作者提出的特征值法拓展应用于压电/导体接合材料，研究界面端电弹性场的奇异行为，考察接合角和极化角对奇异性阶次和强弱的影响。

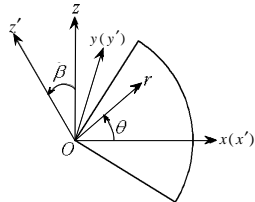


图1 压电材料楔形体
Fig.1 A piezoelectric wedge

1 压电材料的基本方程

横观各向同性压电材料的楔形体模型如图1所示，材料的各向同性平面位于(x', y')面内，极化方向沿着z'轴。材料主轴坐标系(x', y', z')与整体坐标系(x, y, z)的关系为：材料坐标轴x'和y'分别与整体坐标轴x和y一致，极化轴z'与整体坐标轴z的夹角为b(称为极化角，逆时针方向为正)。

平面应变条件下(e_{yy} = e_{yz} = e_{xy} = E_y = 0)，横观各向同性压电材料在整体坐标系(x, z)下的本构方程为：

$$\sigma = L\varepsilon \tag{1}$$

其中：

$$\begin{aligned} \sigma &= \{s_{xx} \quad s_{zz} \quad s_{xz} \quad D_x \quad D_z\}^T; \\ \varepsilon &= \{e_{xx} \quad e_{zz} \quad 2e_{xz} \quad E_x \quad E_z\}^T; \\ L &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & -b_{11} & -b_{21} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & -b_{12} & -b_{22} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & -b_{13} & -b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & d_{11} & d_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

式中，e_{ij}、s_{ij}、E_i和D_i分别代表应变、应力、电场和电位移；a_{kl}、b_{kl}和d_{kl}分别代表弹性系数、压电系数和介电系数，具体表达式参见文献[6]。

为了研究楔形体角点O附近区域的应力和电位移奇异性，需要把直角坐标系(x, z)下的本构方程(1)转换到极坐标系(r, q)下。直角坐标系下的应变和电场分量，可用极坐标下的位移和电势表示为：

$$\varepsilon = \left(D_1 \frac{\partial}{\partial r} + D_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} + D_3 \frac{1}{r} \right) \mathcal{U} \tag{3}$$

式中：

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u_r \quad u_q \quad j\}^T; \\ D_1 &= \begin{bmatrix} c^2 & -pc & 0 \\ p^2 & pc & 0 \\ 2pc & c^2 - p^2 & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}; \\ D_2 &= \begin{bmatrix} -pc & p^2 & 0 \\ pc & c^2 & 0 \\ c^2 - p^2 & -2pc & 0 \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}; \\ D_3 &= \begin{bmatrix} p^2 & pc & 0 \\ c^2 & -pc & 0 \\ -2pc & p^2 - c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

这里，为了书写简洁，引入表达式：

$$c = \cos q, \quad p = \sin q \tag{5}$$

应力和电位移分量的坐标转换关系为：

$$\mathcal{U} = T\sigma \tag{6}$$

式中：

$$\mathcal{U} = \{s_{rr} \quad s_{qq} \quad s_{rq} \quad D_r \quad D_q\}^T;$$

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & p^2 & 2pc & 0 & 0 \\ p^2 & c^2 & -2pc & 0 & 0 \\ -pc & pc & c^2 - p^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & p \\ 0 & 0 & 0 & -p & c \end{bmatrix}. \quad (7)$$

联立式(1)、式(3)和式(6), 可得:

$$\mathcal{B} = \left(\mathcal{D}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \mathcal{D}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial q} + \mathcal{D}_3 \frac{1}{r} \right) \mathcal{U} \quad (8)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 = TLD_1 &= \begin{bmatrix} a_{rr}^r(q) & a_{rr}^q(q) & a_{rr}^j(q) \\ a_{qq}^r(q) & a_{qq}^q(q) & a_{qq}^j(q) \\ a_{rq}^r(q) & a_{rq}^q(q) & a_{rq}^j(q) \\ a_r^r(q) & a_r^q(q) & a_r^j(q) \\ a_q^r(q) & a_q^q(q) & a_q^j(q) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{D}_2 = TLD_2 &= \begin{bmatrix} b_{rr}^r(q) & b_{rr}^q(q) & b_{rr}^j(q) \\ b_{qq}^r(q) & b_{qq}^q(q) & b_{qq}^j(q) \\ b_{rq}^r(q) & b_{rq}^q(q) & b_{rq}^j(q) \\ b_r^r(q) & b_r^q(q) & b_r^j(q) \\ b_q^r(q) & b_q^q(q) & b_q^j(q) \end{bmatrix}; \\ \mathcal{D}_3 = TLD_3 &= \begin{bmatrix} d_{rr}^r(q) & d_{rr}^q(q) & d_{rr}^j(q) \\ d_{qq}^r(q) & d_{qq}^q(q) & d_{qq}^j(q) \\ d_{rq}^r(q) & d_{rq}^q(q) & d_{rq}^j(q) \\ d_r^r(q) & d_r^q(q) & d_r^j(q) \\ d_q^r(q) & d_q^q(q) & d_q^j(q) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

矩阵中的元素 $a(q)$ 、 $b(q)$ 和 $d(q)$, 均为只与角变量 q 有关的函数。

基于式(1)和式(3), 直角坐标系下的平衡方程可用 \mathcal{U} 表示为:

$$f = \left(D_4 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_5}{r} \frac{\partial}{\partial q} \right) L \left(D_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_2}{r} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{D_3}{r} \right) \mathcal{U} \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned} f &= \{f_x \quad f_z \quad f_D\}^T; \\ D_4 &= \begin{bmatrix} c & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & p & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & p \end{bmatrix}; \\ D_5 &= \begin{bmatrix} -p & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & c & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p & c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

由式(10), 利用坐标变换, 可得极坐标系下的平衡方程:

$$\mathcal{F} = M \left(D_4 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_5}{r} \frac{\partial}{\partial q} \right) L \left(D_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{D_2}{r} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{D_3}{r} \right) \mathcal{U} \quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{f_r \quad f_q \quad f_D\}^T; \\ M &= \begin{bmatrix} c & p & 0 \\ -p & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

压电和导体的楔形接合模型如图 2 所示。导体材料占据的区域为 $q_0 \leq q \leq q_1$, 压电材料占据的区域为 $-q_2 \leq q \leq q_0$, 双材料界面为 $q = q_0$ 。边界 OA 和 OB 上的自由表面条件为:

$$\begin{aligned} s_{qq,1}(q_1) = s_{rq,1}(q_1) = 0, \\ s_{qq,2}(q_2) = s_{rq,2}(q_2) = D_{q,2}(q_2) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

界面 OC 上的连续边界条件为:

$$\begin{cases} u_{r,1}(q_0) = u_{r,2}(q_0) \\ u_{q,1}(q_0) = u_{q,2}(q_0) \\ j_2(q_0) = 0 \\ s_{qq,1}(q_0) = s_{qq,2}(q_0) \\ s_{rq,1}(q_0) = s_{rq,2}(q_0) \end{cases} \quad (15)$$

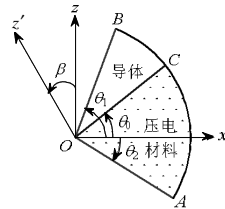


图 2 双材料接合模型

Fig.2 A bi-material system

基于一阶近似假设, 界面端 O 附近的位移和电势可表示成如下变量分离的级数形式:

$$\mathcal{U} = r^s \Lambda = r^s \{L_r(q) \quad L_q(q) \quad L_j(q)\}^T \quad (16)$$

式中: s 是奇异特征值; $L_r(q)$ 和 $L_q(q)$ 分别表示 r 向和 q 向的位移角函数; $L_j(q)$ 表示电势角函数。

将式(16)代入式(8), 可得分离变量形式的应力和电位移:

$$\mathcal{B} = r^{s-1} \Sigma \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ \Sigma_{rr}(q) \Sigma_{qq}(q) \Sigma_{rq}(q) \Sigma_r(q) \Sigma_q(q) \}^T = \\ \left(\mathcal{D}_2 \frac{\partial}{\partial q} + s \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_3 \right) \Lambda \end{aligned} \quad (18)$$

这里, $\Sigma_{rr}(q)$ 、 $\Sigma_{rq}(q)$ 和 $\Sigma_{qq}(q)$ 表示应力角函数,

$\Sigma_r(\mathbf{q})$ 和 $\Sigma_q(\mathbf{q})$ 表示电位移角函数。

联立式(14)、式(15)、式(16)和式(17), 可得用角函数表示的自由边界条件:

$$\begin{cases} \Sigma_{qq,1}(\mathbf{q}_1) = \Sigma_{rq,1}(\mathbf{q}_1) = 0 \\ \Sigma_{qq,2}(\mathbf{q}_2) = \Sigma_{rq,2}(\mathbf{q}_2) = 0 \\ \Sigma_{q,2}(\mathbf{q}_2) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

以及界面连续条件:

$$\begin{cases} L_{r,1}(\mathbf{q}_0) = L_{r,2}(\mathbf{q}_0) \\ L_{q,1}(\mathbf{q}_0) = L_{q,2}(\mathbf{q}_0) \\ L_{j,2}(\mathbf{q}_0) = 0 \\ \Sigma_{qq,1}(\mathbf{q}_0) = \Sigma_{qq,2}(\mathbf{q}_0) \\ \Sigma_{rq,1}(\mathbf{q}_0) = \Sigma_{rq,2}(\mathbf{q}_0) \end{cases} \quad (20)$$

同理, 将式(16)应用于平衡式(12)并且消除公因子 r^{s-2} , 可得:

$$(s^2\mathbf{A} + s\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = 0 \quad (21)$$

式中:

$$\mathbf{A} = \mathbf{MD}_4\mathbf{LD}_1;$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{MD}_4\mathbf{LD}_2 + \mathbf{MD}_5\mathbf{LD}_1)\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{MD}_4\mathbf{LD}_3 - \mathbf{MD}_4\mathbf{LD}_1;$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{MD}_5\mathbf{LD}_2\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{q}^2} + \mathbf{MD}_5\mathbf{LD}_3\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (22)$$

矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 的阶次均为 3×3 。

降阶后的平衡方程式(21)、自由边界条件式(19)和界面连续条件式(20), 构成了一个仅与角变量 \mathbf{q} 以及奇异特征值 s 有关的一维边值问题。

2 数值算法

采用无网格法求解上述一维边值问题时, 给压电/导体双材料模型的每种材料占据的区域分配各自独立的节点。位于双材料界面上坐标相同的节点对分属于不同的材料, 因而插值函数亦不同。位移和电势角函数及其导数的近似形式为:

$$\begin{cases} L_{z,k}(\mathbf{q}_i) = N_{j,k}(\mathbf{q}_i)L_{z,k}^j = N_k(\mathbf{q}_i)A_{z,k} \\ L'_{z,k}(\mathbf{q}_i) = N'_{j,k}(\mathbf{q}_i)L_{z,k}^j = N'_k(\mathbf{q}_i)A_{z,k} \\ L''_{z,k}(\mathbf{q}_i) = N''_{j,k}(\mathbf{q}_i)L_{z,k}^j = N''_k(\mathbf{q}_i)A_{z,k} \end{cases} \quad (23)$$

式中: n_k 表示材料所属区域 k 内的节点个数;

$L_{z,k}^j$ ($z = r, q, j$) 表示区域 k 的第 j 个节点的位移角函数; $N_{j,k}(\mathbf{q}_i)$ 表示核函数的中心固定于 \mathbf{q}_i 且相应于区域 k 的第 j 个节点的插值函数; $N'_{j,k}(\mathbf{q}_i)$ 和

$N''_{j,k}(\mathbf{q}_i)$ 分别表示插值函数的一阶和二阶导数, 重复指标 j 在 $1 \sim n_k$ 范围内求和。

将式(23)依次应用于降阶后的自由边界条件式(19)、界面连续条件式(20)和平衡式(21), 可得:

$$\begin{pmatrix} \kappa_{qq,1}^r & \kappa_{qq,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{rq,1}^r & \kappa_{rq,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{qq,2}^r & \kappa_{qq,2}^q & \kappa_{qq,2}^j \\ 0 & 0 & \kappa_{rq,2}^r & \kappa_{rq,2}^q & \kappa_{rq,2}^j \\ 0 & 0 & \kappa_{q,2}^r & \kappa_{q,2}^q & \kappa_{q,2}^j \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \chi_{qq,1}^r & \chi_{qq,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ \chi_{rq,1}^r & \chi_{rq,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{qq,2}^r & \chi_{qq,2}^q & \chi_{qq,2}^j \\ 0 & 0 & \chi_{rq,2}^r & \chi_{rq,2}^q & \chi_{rq,2}^j \\ 0 & 0 & \chi_{q,2}^r & \chi_{q,2}^q & \chi_{q,2}^j \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_{r,1} \\ A_{q,1} \\ A_{r,2} \\ A_{q,2} \\ A_{j,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_{qq,1}^r & \kappa_{qq,1}^q & -\kappa_{qq,2}^r & -\kappa_{qq,2}^q & -\kappa_{qq,2}^j \\ \kappa_{rq,1}^r & \kappa_{rq,1}^q & -\kappa_{rq,2}^r & -\kappa_{rq,2}^q & -\kappa_{rq,2}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} N_1 & 0 & -N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & -N_2 & 0 \\ \chi_{qq,1}^r & \chi_{qq,1}^q & -\chi_{qq,2}^r & -\chi_{qq,2}^q & -\chi_{qq,2}^j \\ \chi_{rq,1}^r & \chi_{rq,1}^q & -\chi_{rq,2}^r & -\chi_{rq,2}^q & -\chi_{rq,2}^j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_{r,1} \\ A_{q,1} \\ A_{r,2} \\ A_{q,2} \\ A_{j,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$\begin{pmatrix} A_{r,1} & A_{q,1} & 0 & 0 & 0 \\ A_{q,1} & A_{q,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{r,2} & A_{q,2} & A_{j,2} \\ 0 & 0 & A_{q,2} & A_{q,2} & A_{q,2} \\ 0 & 0 & A_{j,2} & A_{j,2} & A_{j,2} \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} B_{r,1}^r & B_{r,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ B_{q,1}^r & B_{q,1}^q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{r,2}^r & B_{r,2}^q & B_{r,2}^j \\ 0 & 0 & B_{q,2}^r & B_{q,2}^q & B_{q,2}^j \\ 0 & 0 & B_{j,2}^r & B_{j,2}^q & B_{j,2}^j \end{pmatrix} s +$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} \mathbf{C}_{r,1}^r & \mathbf{C}_{r,1}^\theta & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{\theta,1}^r & \mathbf{C}_{\theta,1}^\theta & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{C}_{r,2}^r & \mathbf{C}_{r,2}^\theta & \mathbf{C}_{r,2}^\varphi \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{\theta,2}^r & \mathbf{C}_{\theta,2}^\theta & \mathbf{C}_{\theta,2}^\varphi \\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{\varphi,2}^r & \mathbf{C}_{\varphi,2}^\theta & \mathbf{C}_{\varphi,2}^\varphi \end{array} \right] \begin{Bmatrix} A_{r,1} \\ A_{\theta,1} \\ A_{r,2} \\ A_{\theta,2} \\ A_{\varphi,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (26)$$

各子矩阵的详细表达式为:

$$\begin{aligned} [A_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= (\mathbf{MD}_4 \mathbf{LD}_1)_\zeta^\tau N_{j,k}(\theta_i); \\ [B_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= (\mathbf{MD}_4 \mathbf{LD}_2 + \mathbf{MD}_5 \mathbf{LD}_1)_\zeta^\tau N'_{j,k}(\theta_i) + (\mathbf{MD}_4 \mathbf{LD}_3 - \mathbf{MD}_4 \mathbf{LD}_1)_\zeta^\tau N_{j,k}(\theta_i); \\ [C_{\zeta,k}^\tau]_{ij} &= (\mathbf{MD}_5 \mathbf{LD}_2)_\zeta^\tau N''_{j,k}(\theta_i) + (\mathbf{MD}_5 \mathbf{LD}_3)_\zeta^\tau N'_{j,k}(\theta_i); \\ [\kappa_{\xi,k}^\tau(\theta_i)]_j &= a_{\xi,k}^\tau(\theta_i) N_{j,k}(\theta_i); \\ [\chi_{\xi,k}^\tau(\theta_i)]_j &= b_{\xi,k}^\tau(\theta_i) N'_{j,k}(\theta_i) + d_{\xi,k}^\tau(\theta_i) N_{j,k}(\theta_i). \end{aligned} \quad (27)$$

这里, 指标 τ 和 ζ 的取值为 r 、 θ 和 φ , 下标 ξ 的取值为 θ 、 $\theta\theta$ 和 $r\theta$ 。

位于边界 OB 和 OC 上的节点, 需满足自由边界条件式(24); 位于界面 OA 上的节点, 需满足界面连续条件式(25); 其余的内部节点, 则需满足平衡方程式(26)。用边界条件式(24)和式(25)依次替换平衡方程式(26)中的对应行, 可得到关于奇异特征值 s 的非线性特征方程:

$$(\hat{A}s^2 + \hat{B}s + \hat{C})\mathbf{x} = 0 \quad (28)$$

其中:

$$\mathbf{x} = \{A_{r,1} \quad A_{\theta,1} \quad A_{r,2} \quad A_{\theta,2} \quad A_{\varphi,2}\}^T \quad (29)$$

非线性特征方程式(28), 可转化为如下关于 $\omega = s^{-1}$ 的标准特征方程:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\hat{C}^{-1}\hat{A} & -\hat{C}^{-1}\hat{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega\mathbf{x} \end{Bmatrix} = \omega \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega\mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

数值求解式(30), 可以得到应力和电位移的奇异性指数 $(1-s)$ 、位移角函数和电势角函数。把 A 的数值结果代入式(18), 可得对应于各阶奇异性的应力和电位移角函数。

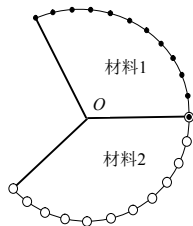


图3 无网格节点分布示意图

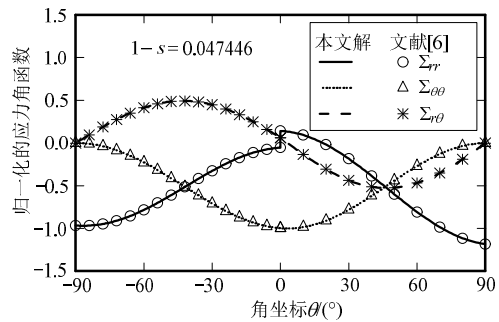
Fig.3 Distribution of the meshless scattered points

3 算例

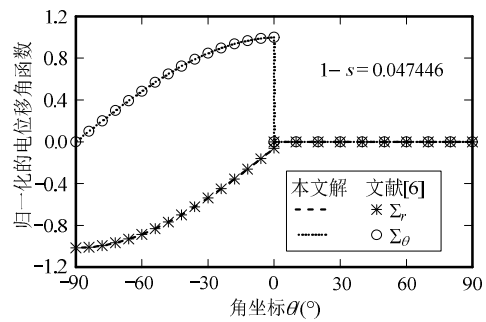
双材料界面端模型如图2所示。采用无网格进行求解时, 节点分布由两个隶属不同材料区域的、各自独立的节点分布组成, 如图3所示。实心点表示材料1的节点分布, 空心圆表示材料2的节点分布。位于界面上的两节点, 尽管角坐标相同, 但由于分属于不同的节点分布, 故而插值函数不同。

算例 1. 双材料界面端模型的界面角 $\theta_0 = 0^\circ$, 接合角 $\theta_1 = 90^\circ$ 和 $\theta_2 = 90^\circ$, 横观各向同性压电材料和导体分别为 PZT-4(极化角 $\beta = 90^\circ$)和 Al, 材料常数参见文献[6]。

数值计算发现, 此时只有一个实数奇异性指数 $1-s = 0.047446$, 与文献[6]中的结果一致。把与 $(1-s)$ 相应的特征向量代入式(18), 得到离散的应力角函数($\Sigma_{rr}(\theta_i)$ 、 $\Sigma_{\theta\theta}(\theta_i)$ 和 $\Sigma_{r\theta}(\theta_i)$)以及电位移角函数($\Sigma_r(\theta_i)$ 和 $\Sigma_\theta(\theta_i)$)。把 $\Sigma_{rr}(\theta_i)$ 、 $\Sigma_{\theta\theta}(\theta_i)$ 和 $\Sigma_{r\theta}(\theta_i)$ 逐个除以 $\Sigma_{\theta\theta}(\theta_i)$ 的最大值, 即可得到归一化的应力角函数, 如图 4(a)所示; 把 $\Sigma_r(\theta_i)$ 和 $\Sigma_\theta(\theta_i)$ 逐个除以 $\Sigma_\theta(\theta_i)$ 的最大值, 则得到归一化的电位移角函数, 如图 4(b)所示。在双材料界面上, $\Sigma_{\theta\theta}(\theta_i)$ 和 $\Sigma_{r\theta}(\theta_i)$ 是连续的, 然而 $\Sigma_{rr}(\theta_i)$ 、 $\Sigma_r(\theta_i)$ 和 $\Sigma_\theta(\theta_i)$ 是不连续的。显然, 本文计算结果与文献[6]中的结果完全吻合。



(a)



(b)

图4 接合材料 PZT-4/Al 的归一化应力和电位移角函数
Fig.4 Normalized angular variations of the stress and electric displacement for a PZT-4/Al wedge

算例 2. 双材料界面端模型的界面角 $\theta_0 = 0^\circ$ ，接合角 $\theta_2 = 180^\circ$ ，接合角 θ_1 的取值介于 0° 到 180° 之间。横观各向同性压电材料为 PZT-4(极化角 $\beta = 0^\circ$)，各向同性导体为 Ni，材料常数参见文献[6]。

奇异性指数 $(1-s)$ 随接合角 θ 的变化曲线如图 5 所示。当 $\theta_1 < 66.75^\circ$ 时，只有两重实数奇异性；当 $\theta_1 > 66.75^\circ$ 时，有三重实数奇异性，并且奇异性指数随着接合角 θ_1 的增大而增强。在 $\theta_1 = 180^\circ$ 时，PZT-4/Ni 双材料界面端演变成界面裂纹，但是没有出现振荡奇异性。

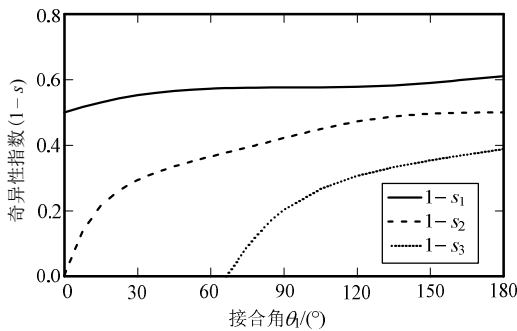
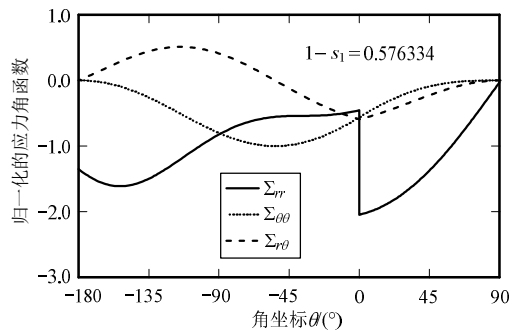


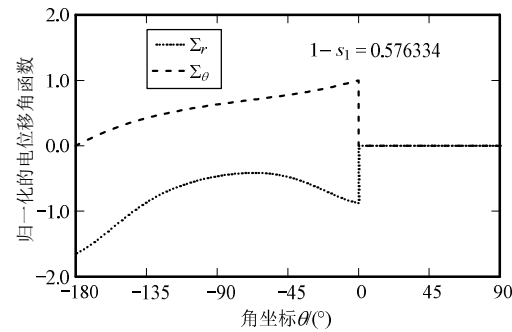
图 5 接合材料 PZT-4/Ni 的奇异性指数随接合角 θ 的变化曲线

Fig.5 Variations of singularity orders with θ for a PZT-4/Ni wedge

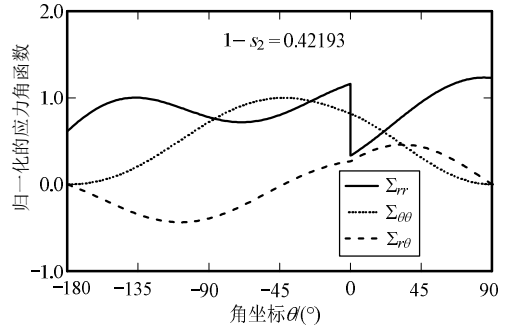
当接合角 $\theta_1 = 90^\circ$ 时，三个实数奇异性指数分别为 0.576334、0.421930 和 0.203013，与其相应的应力和电位移角函数的归一化曲线如图 6 所示。



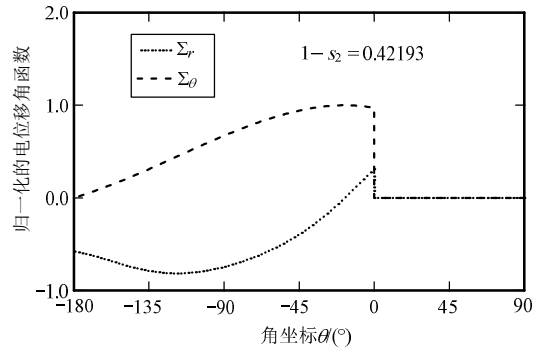
(a)



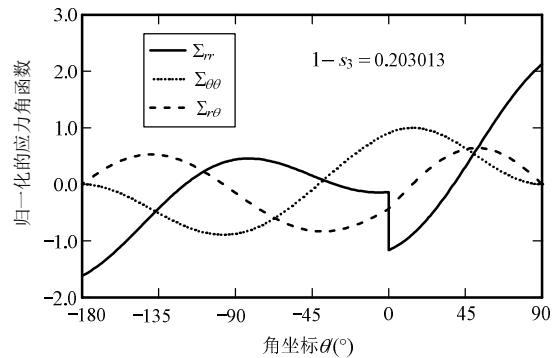
(b)



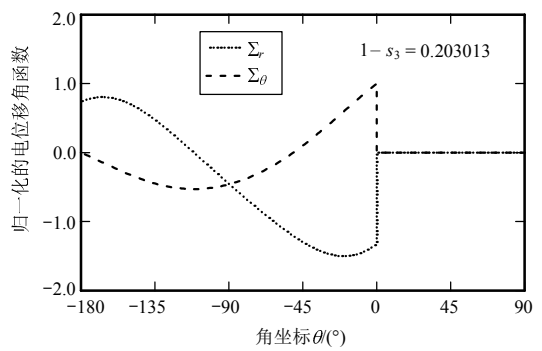
(c)



(d)



(e)



(f)

图 6 三重实数奇异性时的归一化应力和电位移角函数
Fig.6 Normalized angular variations of stress and electric displacement for three real singularity orders

算例 3. PZT-4/Ni 双材料界面端模型的界面角 $\theta_0 = 0^\circ$ ，接合角 $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ，压电材料 PZT-4 的极化角 β 取值介于 -180° 到 180° 之间。

奇异性指数 $(1-s)$ 和极化角 β 的关系曲线如

图 7 所示。极化角在 -180° 与 180° 之间变化时, 奇异性指数随之发生周期性变化。当极化角的取值范围分别为 $-180^\circ \leq \beta \leq -167^\circ$ 、 $-102^\circ \leq \beta \leq -91^\circ$ 、 $0^\circ \leq \beta \leq 13^\circ$ 和 $77^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ 时, 有两重实数奇异性。当 $-91^\circ \leq \beta \leq 0^\circ$ 和 $90^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$ 时, 只有一个实数奇异性, 最大值为 0.236297。当 $-167^\circ \leq \beta \leq -102^\circ$ 和 $13^\circ \leq \beta \leq 77^\circ$ 时, 表现出振荡奇异性; 极化角 β 的变化对奇异性指数的实部影响很小, 但是对虚部的影响非常大, 并且在 β 为 -135° 和 45° 时虚部有最大值 0.107002i。极化角 $\beta = 45^\circ$ 时振荡奇异性指数为 $0.070065 \pm 0.107002i$, 与其对应的应力和电位移角函数的归一化曲线如图 8 所示。

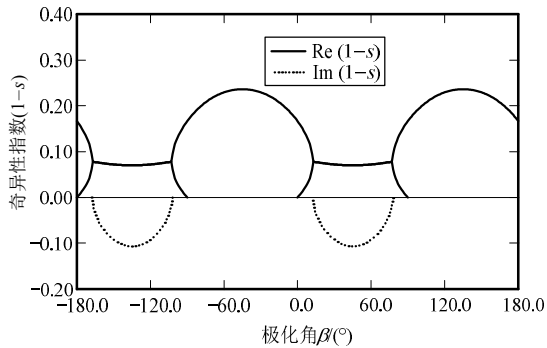
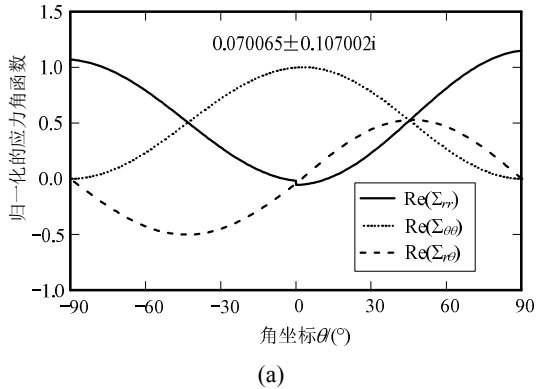
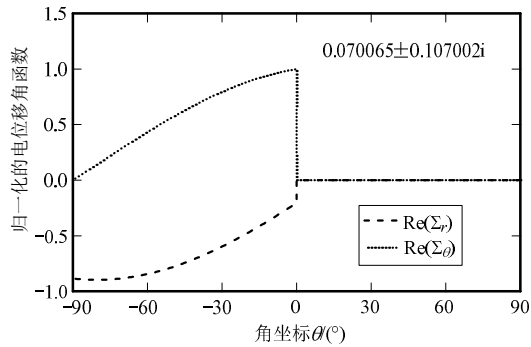


图 7 奇异性指数和极化角的关系曲线

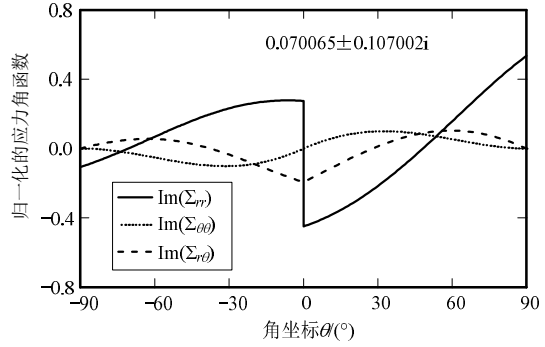
Fig.7 Relationship between singularity order and polarization angle



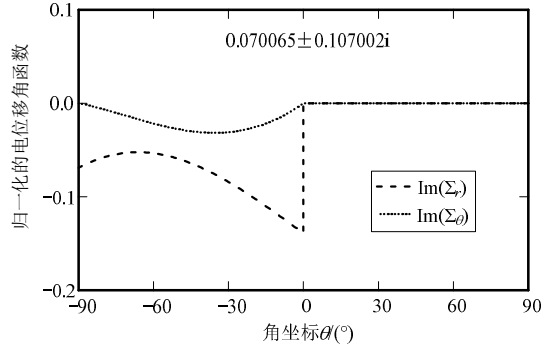
(a)



(b)



(c)



(d)

图 8 振荡奇异性时的归一化应力和电位移角函数

Fig.8 Normalized angular variations of stress and electric displacement for oscillating singularity

4 结论

基于本文建立的求解压电/导体接合材料界面端奇异性问题的特征值法, 通过三个典型算例研究了材料组合、接合角和极化角对界面端电弹性场奇异行为的影响, 得到以下结论:

(1) 基于一阶近似假设和变量分离的特征值法, 不但可以确定压电/导体接合材料界面端电弹性场的各阶奇异性指数, 还可给出相应的应力和电位移角函数。

(2) 界面端电弹性场的奇异性阶次和强弱, 与双材料模型的接合角和压电材料的极化角密切相关。

(3) 基于特征值法得到的各阶奇异性指数和相应角函数, 结合真实载荷作用下界面端奇异电弹性场的数值解, 即可确定应力和电位移强度因子。

参考文献:

[1] Denda M, Lua J. Development of the boundary element method for 2D piezoelectricity[J]. Composites: Part B, 1999, 30(7): 699-707.
 [2] Xu J Q, Liu Y H, Wang X G. Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1999, 63(6): 755-790.

- [3] Qin Q H, Yu S W. An arbitrary orientated plane crack terminating at the interface between dissimilar piezoelectric materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(5): 581—590.
- [4] Xu J Q, Mutoh Y. Singularity at the interface edge of bonded transversely isotropic piezoelectric dissimilar materials[J]. *JSME International Journal (Series A)*, 2001, 44(4): 556—566.
- [5] Wang X G, Xu J Q. Edge singularity of bonded piezoelectric materials with repeated eigenvalues[J]. *Journal of Zhejiang University (Science A)*, 2001, 2(2): 157—160.
- [6] Xu X L, Rajapakse R K N D. On singularities in composite piezoelectric wedges and junctions[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1999, 37(23): 3253—3275.
- [7] Chue C H, Chen C D. Decoupled formulation of piezoelectric elasticity under generalized plane deformation and its application to wedge problems[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(12): 3131—3158.
- [8] Chen M C, Zhu J J, Sze K Y. Electroelastic singularities in piezoelectric-elastic wedges and junctions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, 73(7): 855—868.
- [9] 陈梦成, 平学成, 朱剑军. 压电材料中切口/接头端部平面电弹性场奇异性有限元分析[J]. *固体力学学报*, 2005, 26(2): 157—162.
Chen Mengcheng, Ping Xuecheng, Zhu Jianjun. Finite element analysis of singular electroelastic fields near piezoelectric wedges[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2005, 26(2): 157—162. (in Chinese)
- [10] 王海涛, 杨笑梅. 用裂纹单位分析双压电材料界面力电耦合场奇异性场[J]. *工程力学*, 2007, 24(3): 170—178.
Wang Haitao, Yang Xiaomei. Analysis of singular electromechanical fields at the interfaces of bimorph with a “cracked element”[J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(3): 170—178. (in Chinese)
- [11] 王海涛. 分析不同材料界面应力奇异性的一维杂交有限元法[J]. *工程力学*, 2009, 26(2): 21—26.
Wang Haitao. A one-dimensional hybrid finite element method for the analysis of stress singularities at bi-material interfaces [J]. *Engineering Mechanics*, 2009, 26(2): 21—26. (in Chinese)
- [12] Wang X G. A boundary value method for the singular behavior of biomaterial systems under inplane loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(20): 513—5535.
- [13] 王美. 考虑尺寸效应的横观各向同性压电结合材料轴对称界面端的奇异行为[D]. 杭州: 浙江工业大学, 2010.
Wang Mei. Singularity at axisymmetric interface wedge of bonded dissimilar transversely isotropic piezoelectric materials considering dimension effects[D]. Hangzhou: Zhejiang University of Technology, 2010. (in Chinese)
- [14] 王效贵, 胡涛, 徐峰. 各向异性复合材料尖劈的应力奇异性次数研究[J]. *工程力学*, 2012, 29(11): 21—25.
Wang Xiaogui, Hu Tao, Xu Feng. Stress singularities in tips of three-dimensional anisotropic multi-material wedges[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(11): 21—25. (in Chinese)
- [15] 李兴民, 雷振坤. 双材料界面端应力奇异性的数字光滑性分析[J]. *工程力学*, 2011, 28(12): 7—12.
Li Xingmin, Lei Zhenkun. Digital photoelasticity analysis of stress singularity of biomaterial joints [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(12): 7—12 (in Chinese)