文章编号: 1001-0920 (2010) 10-1494-05

基于正态分布区间数的信息不完全的群决策方法

汪新凡, 肖满生
(湖南工业大学 理学院，湖南 株洲 412008)

摘 要: 针对属性值为正态分布区间数而属性权重信息不完全的多属性群决策问题, 定义了一些新的集成算子, 即正态分布区间数的加权算术平均 (NDINWAA) 算子、正态分布区间数的有序加权平均 (NDINOWA) 算子和正态分布区间数的混合加权平均 (NDINHA) 算子, 进而提出一种基于正态分布区间数的信息不完全的多属性群决策方法. 该方法利用 NDINWAA 算子和 NDINHA 算子对正态分布区间数属性值进行集成, 利用正态分布区间数属性值的方差, 通过建立优化模型确定最优属性权重, 利用期望-方差准则对方案进行排序并择优. 实例分析表明了该方法的可行性和有效性.

关键词: 群决策；正态分布区间数；信息不完全；集成算子
中图分类号: C934 **文献标识码:** A

Approach of group decision making based on normal distribution interval number with incomplete information

WANG Xin-fan, *XIAO Man-sheng*
(School of Science，Hu'nan University of Technology，Zhuzhou 412008，China．Correspondent：WANG Xin-fan, E-mail：zzwxfydm@126.com)

Abstract：For multiple attribute group decision making problems, in which the attribute values are normal distribution interval numbers and the attribute weight information is incomplete, some new aggregation operators are defined, such as the normal distribution interval number weighted arithmetic averaging(NDINWAA) operator, the normal distribution interval number ordered weighted averaging(NDINOWA) operator and the normal distribution interval number hybrid weighted averaging(NDINHA) operator. Then an approach is developed for solving multiple attribute group decision making based on normal distribution interval number with incomplete information. In this method, normal distribution interval number attribute values are aggregated by the NDINWAA operator and the NDINHA operator, some optimal models are constructed to determine the optimal attribute weights by using the variance of normal distribution interval number attribute values, and ranking of alternatives is performed by using expectation-variance principle. Finally, an example shows the effectiveness of this method.

Key words：Group decision making；Normal distribution interval number；Incomplete information；Aggregation operator

1 引 言

多属性决策理论与方法的研究已成为决策科学、信息科学、系统科学和管理科学等领域中一个十分活跃的课题, 在工程设计、经济、管理及军事等诸多领域有着广泛的实际应用背景. 由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性, 采用确定的信息来刻画复杂问题在很多场合并不现实, 也不符合实际. 在实际的决策过程中, 一方面, 人们往往很难给出属性值的具体数值, 而用区间数表示更方便也更适合; 另一方面, 人们很难给出属性权重的确定值, 或不能对属性间的重要性程度进行两两比较, 进而不能由 AHP (层次分析法) 和 ANP (网络层次分析法) 等方法确定属性权重, 但通常能以不完全信息的形式给出属性权重之间的关系. 因此, 对于这类属性值为区间数而属性权重信息不完全的多属性决策理论与方法的研究有着重要的理论和实际意义.

目前, 有关这方面的研究虽已引起重视, 但还不够成熟[1-6]. 特别在属性值为区间数的多属性决策问

收稿日期: 2009-09-13；**修回日期:** 2009-11-08.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60874025).
作者简介: 汪新凡(1966−), 男, 湖南安化人, 教授, 从事决策理论与应用等研究；肖满生(1968−), 男, 湖南邵东人, 副教授, 从事数据挖掘与智能计算等研究.

题中, 将属性值视为一个随机变量, 认为其落在某个区间数内. 但现有文献很少说明变量落在区间数内的分布规律[1-5], 仅有少量文献进行了说明. 如文献 [7,8] 认为其服从均匀分布, 文献 [6,9] 认为其服从正态分布. 事实上, 属性评价值服从正态分布更合理, 为此本文针对属性值为正态分布区间数而属性权重信息不完全的多属性群决策问题, 给出了正态分布区间数的几种集成算子. 并在群体决策情形下, 提出一种基于正态分布区间数的信息不完全的多属性群决策方法.

2　正态分布区间数及其集成算子

在决策过程中, 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为方案集, $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 为属性集, 决策者给出方案 $A_i\in A(i=1,2,\cdots,m)$ 在属性 $I_j\in I(j=1,2,\cdots,n)$ 下的属性值为 $\tilde{\alpha}_{ij}$, 其中 $\tilde{\alpha}_{ij}=[a_{ij},b_{ij}]$ 为区间数且已经规范化[4](根据数据规范化处理的知识, 可假定区间数均为非负区间数). 一般认为, 在区间数 $[a_{ij},b_{ij}]$ 中, 上下限之间的各个数值取值机会均等, 即服从均匀分布 (可称之为均匀分布区间数). 但是, 由中心极限定理可知, 决策者给出的属性值 r_{ij} 具有稳定性, 属性值趋于某一点即最可能的属性值, r_{ij} 是模糊随机变量, 故认为 r_{ij} 服从以区间中点 μ_{ij} 为均值的正态分布 $N(\mu_{ij},\sigma_{ij}^2)$ 更符合实际. 其中均值 $\mu_{ij}=\dfrac{1}{2}(a_{ij}+b_{ij})$, 并由正态分布的 3σ 原则 $P(r_{ij}\in[a_{ij},b_{ij}])=0.997\,4$, 可得方差 $\sigma_{ij}=\dfrac{1}{6}(b_{ij}-a_{ij})$.

定义 1　设 $\tilde{\alpha}=[a,b]$ 为区间数, 若属性值 $r\in[a,b]$ 且服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则称 $[a,b]$ 为正态分布区间数, 记作 $\tilde{\beta}=\{\mu,\sigma\}$. 其中根据正态分布的 3σ 原则, 均值 μ 和方差 σ 由下式确定:

$$\mu=\frac{1}{2}(a+b), \tag{1}$$

$$\sigma=\frac{1}{6}(b-a). \tag{2}$$

并令 Ω 为全体正态分布区间数的集合.

根据有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布的性质, 可定义正态分布区间数的运算法则.

定义 2　设 $\tilde{\beta}_1=\{\mu_1,\sigma_1\}$ 和 $\tilde{\beta}_2=\{\mu_2,\sigma_2\}$ 是任意的 2 个正态分布区间数, 则: 1) $\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2=\{\mu_1+\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\}$; 2) $\lambda\tilde{\beta}_1=\{\lambda\mu_1,\lambda\sigma_1\},\lambda\geqslant0$.

易证: 1) $\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2=\tilde{\beta}_2\oplus\tilde{\beta}_1$; 2) $\lambda(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2)=\lambda\tilde{\beta}_1\oplus\lambda\tilde{\beta}_2,\lambda\geqslant0$; 3) $\lambda_1\tilde{\beta}_1\oplus\lambda_2\tilde{\beta}_1=(\lambda_1+\lambda_2)\tilde{\beta}_1,\ \lambda_1,\lambda_2\geqslant0$.

针对均匀分布区间数的比较, 文献 [3-5] 利用可能度进行排序, 文献 [10] 则提出一种期望-方差排序方法, 并证明了这种方法与带可能度排序法的一致性, 且简单易行. 针对正态分布区间数的比较, 文献 [9] 给出了一种带可能度的排序法, 但该法繁琐. 本文采用期望-方差准则来定义正态分布区间数的一种比较与排序方法.

定义 3　设 $\tilde{\beta}_1=\{\mu_1,\sigma_1\}$ 和 $\tilde{\beta}_2=\{\mu_2,\sigma_2\}$ 是任意的 2 个正态分布区间数, 则:

1) 若 $\mu_1<\mu_2$, 则 $\tilde{\beta}_1$ 小于 $\tilde{\beta}_2$, 记作 $\tilde{\beta}_1<\tilde{\beta}_2$.

2) 若 $\mu_1=\mu_2$, 则: ① 若 $\sigma_1=\sigma_2$, 则 $\tilde{\beta}_1$ 等于 $\tilde{\beta}_2$, 记作 $\tilde{\beta}_1=\tilde{\beta}_2$; ② 若 $\sigma_1<\sigma_2$, 则 $\tilde{\beta}_1$ 大于 $\tilde{\beta}_2$, 记作 $\tilde{\beta}_1>\tilde{\beta}_2$; ③ 若 $\sigma_1>\sigma_2$, 则 $\tilde{\beta}_1$ 小于 $\tilde{\beta}_2$, 记作 $\tilde{\beta}_1<\tilde{\beta}_2$.

基于上述正态分布区间数的运算法则, 下面给出正态分布区间数的 3 种集成算子: 正态分布区间数的加权算术平均 (NDINWAA) 算子、正态分布区间数的有序加权平均 (NDINOWA) 算子和正态分布区间数的混合加权平均 (NDINHA) 算子, 以便对基于正态分布区间数的决策信息进行集成.

定义 4　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组正态分布区间数, 且设 NDINWAA: $\Omega^n\rightarrow\Omega$, 若

$$\text{NDINWAA}_w(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n)=w_1\tilde{\beta}_1\oplus w_2\tilde{\beta}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{\beta}_n. \tag{3}$$

其中: $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\tilde{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量, $w_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$. 则称函数 NDINWAA 为正态分布区间数的加权算术平均算子, 简称为 NDINWAA 算子. 特别地, 若 $w=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm{T}}$, 则相应的 NDINWAA 算子退化为正态分布区间数的算术平均 (NDINAA) 算子

$$\text{NDINWAA}_w(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n)=\frac{1}{n}(\tilde{\beta}_1\oplus\tilde{\beta}_2\oplus\cdots\oplus\tilde{\beta}_n). \tag{4}$$

根据定义 2, 对式 (3) 进一步推导, 可得如下定理:

定理 1　设 $\tilde{\beta}_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组正态分布区间数, $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 为 $\tilde{\beta}_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量, $w_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^{n}w_j=1$, 则由式 (3) 集成得到的结果仍为正态分布区间数, 且

$$\text{NDINWAA}_w(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2,\cdots,\tilde{\beta}_n)=\left\{\sum_{j=1}^{n}w_j\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^{n}w_j^2\sigma_j^2}\right\}. \tag{5}$$

证明　由定义 2 可知, 由式 (3) 集成得到的结果仍为正态分布区间数. 下面用数学归纳法证明式 (5) 成立.

1) 当 $n=2$ 时, 由于

$$w_1\tilde{\beta}_1=\{w_1\mu_1,w_1\sigma_1\},\ w_2\tilde{\beta}_2=\{w_2\mu_2,w_2\sigma_2\},$$

有

$$\text{NDINWAA}_w(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2)=w_1\tilde{\beta}_1\oplus w_2\tilde{\beta}_2=$$
$$\{w_1\mu_1,w_1\sigma_1\}\oplus\{w_2\mu_2,w_2\sigma_2\}=$$

$$\{w_1\mu_1+w_2\mu_2,\ \sqrt{(w_1\sigma_1)^2+(w_2\sigma_2)^2}\}=$$
$$\{w_1\mu_1+w_2\mu_2,\ \sqrt{w_1^2\sigma_1^2+w_2^2\sigma_2^2}\}.$$

2) 假设当 $n=k$ 时, 式 (5) 成立, 即

$$\mathrm{NDINWAA}_w(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_k)=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^k w_j\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^k w_j^2\sigma_j^2}\Big\},$$

则当 $n=k+1$ 时, 由定义 2 可得

$$\mathrm{NDINWAA}_w(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_k,\tilde\beta_{k+1})=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^k w_j\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^k w_j^2\sigma_j^2}\Big\}\oplus w_{k+1}\{\mu_{k+1},\sigma_{k+1}\}=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^k w_j\mu_j+$$
$$w_{k+1}\mu_{k+1},\sqrt{\Big(\sqrt{\sum_{j=1}^k w_j^2\sigma_j^2}\Big)^2+(w_{k+1}\sigma_{k+1})^2}\Big\}=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^{k+1} w_j\mu_j,\sqrt{\sum_{j=1}^{k+1} w_j^2\sigma_j^2}\Big\},$$

即当 $n=k+1$ 时, 式 (5) 也成立.

综合上述 1) 和 2) 可知, 对于一切 $n\in N$, 式 (5) 均成立. □

定义 5 设 $\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组正态分布区间数, 且设 NDINOWA: $\Omega^n\to\Omega$, 若

$$\mathrm{NDINOWA}_\omega(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n)=$$
$$\omega_1\tilde\beta_{\tau(1)}\oplus\omega_2\tilde\beta_{\tau(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde\beta_{\tau(n)}. \tag{6}$$

其中: $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm T}$ 为与函数 NDINOWA 相关联的加权向量, $\omega_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^n\omega_j=1$; $(\tau(1),\tau(2),\cdots,\tau(n))$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个置换, 使得对于任意 j, 均有 $\tilde\beta_{\tau(j-1)}\geqslant\tilde\beta_{\tau(j)}$. 则称函数 NDINOWA 为正态分布区间数的有序加权平均算子, 简称为 NDINOWA 算子. 特别地, 若 $\omega=(1/n,1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$, 则相应的 NDINOWA 算子退化为正态分布区间数的算术平均 (NDINAA) 算子.

类似于定理 1, 由式 (6) 集成得到的结果仍为正态分布区间数, 且

$$\mathrm{NDINOWA}_\omega(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n)=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^n\omega_j\mu_{\tau(j)},\sqrt{\sum_{j=1}^n\omega_j^2\sigma_{\tau(j)}^2}\Big\}. \tag{7}$$

NDINOWA 算子的根本特点是: 对正态分布区间数 $\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,\cdots,n)$ 按从大到小的顺序重新排序后加权集成, 且元素 $\tilde\beta_j$ 与 ω_j 没有任何联系, 则 ω_j 只与集成过程的第 j 个位置有关. 有关 NDINOWA 算子的加权向量 ω, 文献 [11] 已对目前主要的赋权方法进行了综述, 并给出了一种基于正态分布的赋权法.

定义 6 设 $\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 是一组正态分布区间数, 且设 NDINHA: $\Omega^n\to\Omega$, 若

$$\mathrm{NDINHA}_{w,\omega}(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n)=$$
$$\omega_1\tilde\beta'_{\tau(1)}\oplus\omega_2\tilde\beta'_{\tau(2)}\oplus\cdots\oplus\omega_n\tilde\beta'_{\tau(n)}. \tag{8}$$

其中: $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^{\mathrm T}$ 为与函数 NDINHA 相关联的加权向量, $\omega_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^n\omega_j=1$; $\tilde\beta'_{\tau(j)}$ 为加权的正态分布区间数组 $(nw_1\tilde\beta_1,nw_2\tilde\beta_2,\cdots,nw_n\tilde\beta_n)$ 中第 j 个最大的元素, 这里 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$ 是正态分布区间数组 $\tilde\beta_j=\{\mu_j,\sigma_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 的加权向量, $w_j\in[0,1],j=1,2,\cdots,n,\sum\limits_{j=1}^n w_j=1$, 且 n 是平衡因子. 则称函数 NDINHA 为正态分布区间数的混合加权平均算子, 简称为 NDINHA 算子. 特别地, 若 $\omega=(1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$, 则函数 NDINHA 退化为 NDINWAA 算子; 若 $w=(1/n,\cdots,1/n)^{\mathrm T}$, 则函数 NDINHA 退化为 NDINOWA 算子.

类似于式 (5) 和 (7), 由式 (8) 集成得到的结果仍为正态分布区间数, 且有

$$\mathrm{NDINHA}_{w,\omega}(\tilde\beta_1,\tilde\beta_2,\cdots,\tilde\beta_n)=$$
$$\Big\{\sum_{j=1}^n\omega_j\mu'_{\tau(j)},\sqrt{\sum_{j=1}^n\omega_j^2\sigma'^2_{\tau(j)}}\Big\}. \tag{9}$$

显然, NDINHA 算子同时推广了 NDINWAA 算子和 NDINOWA 算子, 它不仅体现了正态分布区间数自身的重要性, 而且反映了正态分布区间数所在位置的重要性程度.

3 基于正态分布区间数的群决策方法

属性值为正态分布区间数形式, 属性权重信息不完全的多属性群决策方法的具体步骤如下:

Step 1 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 为方案集, $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_n\}$ 为属性集, $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_t\}$ 为决策者集. 设决策者 d_k 给出方案 A_i 在属性 I_j 下的属性值为 $\tilde\alpha_{ij}^{(k)}$ (这里 $\tilde\alpha_{ij}^{(k)}=[a_{ij}^{(k)},b_{ij}^{(k)}]$ 为区间数). 先利用文献 [4] 中的方法将其规范化, 然后利用式 (1) 和 (2) 将其转化为正态分布区间数 $\tilde\beta_{ij}^{(k)}$ (这里 $\tilde\beta_{ij}^{(k)}=\{\mu_{ij}^{(k)},\sigma_{ij}^{(k)}\}$), 从而得到正态分布区间数决策矩阵

$$R_k=(\tilde\beta_{ij}^{(k)})_{m\times n},\ i=1,2,\cdots,m,$$
$$j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,t.$$

已知决策者的权重向量为 $e=(e_1,e_2,\cdots,e_t)^{\mathrm T},e_k\in[0,1],k=1,2,\cdots,t,\sum\limits_{k=1}^t e_k=1$, 但属性的权重向量不完全确定. 设 Θ 表示决策者给出的属性权重的不完全信息的集合, 属性权重的不完全信息可分为下列

3 类[12]:

1) $\{w: Bw \geqslant b,\ w>0,\ b\geqslant 0\}$;

2) $\{w: Bw \leqslant b,\ w>0,\ b\geqslant 0\}$;

3) $\{w: Bw = b,\ w>0,\ b\geqslant 0\}$.

其中: $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$, B 为 $1\times n$ 矩阵.

Step 2　假设根据属性权重不完全信息求出的最优属性权重为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$, 则可以利用 NDINWAA 算子

$$\tilde\beta_i^{(k)} = {\rm NDINWAA}_w(\tilde\beta_{i1}^{(k)},\tilde\beta_{i2}^{(k)},\cdots,\tilde\beta_{in}^{(k)}), \tag{10}$$

对决策矩阵 $R_k=(\tilde\beta_{ij}^{(k)})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 中第 i 行的属性值进行加权集成, 得到决策者 d_k 所给出的方案 A_i 的综合属性值 $\tilde\beta_i^{(k)}=\{\mu_i^{(k)},\sigma_i^{(k)}\}$. 其中

$$\mu_i^{(k)}=\sum_{j=1}^n w_j\mu_{ij}^{(k)},\ \sigma_i^{(k)}=\sqrt{\sum_{j=1}^n w_j^2(\sigma_{ij}^{(k)})^2},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ k=1,2,\cdots,t.$$

下面提供一种属性权重以不完全信息形式给出时, 根据正态分布区间数属性值的方差建立优化模型, 从而求出最优属性权重的方法. 特别地, 当属性权重信息完全未知时, 建立了另一个优化模型, 并给出了求解最优属性权重的简洁公式.

1) 首先考虑决策者 d_k 所给出的决策矩阵 $R_k=(\tilde\beta_{ij}^{(k)})_{m\times n},\ k=1,2,\cdots,t$. 因为属性值是正态分布区间数, 故从 $R_k=(\tilde\beta_{ij}^{(k)})_{m\times n}$ 中求出的合理的属性权重 $w^{(k)}=(w_1^{(k)},w_2^{(k)},\cdots,w_n^{(k)})^{\rm T}$, 应使得所有方案的方差总和最小化, 即极小化

$$\min\ \sum_{i=1}^m(\sigma_i^{(k)})^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(w_j^{(k)})^2(\sigma_{ij}^{(k)})^2,$$
$$\text{s.t.}\quad w^{(k)}\in\Theta,\ \sum_{j=1}^n w_j^{(k)}=1,\ w_j^{(k)}\geqslant 0,$$
$$j=1,2,\cdots,n. \tag{11}$$

如果属性权重信息完全未知, 模型 (11) 则变为

$$\min\ \sum_{i=1}^m(\sigma_i^{(k)})^2=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(w_j^{(k)})^2(\sigma_{ij}^{(k)})^2,$$
$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^n w_j^{(k)}=1,\ w_j^{(k)}\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{12}$$

下面求解模型 (12). 构造 Lagrange 函数

$$L(w^{(k)},\theta)=$$
$$\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n(w_j^{(k)})^2(\sigma_{ij}^{(k)})^2-2\theta\Big(\sum_{j=1}^n w_j^{(k)}-1\Big). \tag{13}$$

根据极值存在的必要条件, 有

$$\frac{\partial L(w^{(k)},\theta)}{\partial w_j^{(k)}}=2w_j^{(k)}\sum_{i=1}^m(\sigma_{ij}^{(k)})^2-2\theta=0,$$
$$j=1,2,\cdots,n; \tag{14}$$

$$\frac{\partial L(w^{(k)},\theta)}{\partial\theta}=-2\Big(\sum_{j=1}^n w_j^{(k)}-1\Big)=0. \tag{15}$$

令 $s_j=\sum\limits_{i=1}^m(\sigma_{ij}^{(k)})^2,\ j=1,2,\cdots,n$, 则由式 (14) 和 (15) 联立, 可求得优化模型 (12) 的唯一最优解

$$w^{(k)}=\Big[1\Big/\Big(s_1\sum_{j=1}^n\frac{1}{s_j}\Big),1\Big/\Big(s_2\sum_{j=1}^n\frac{1}{s_j}\Big),\cdots,$$
$$1\Big/\Big(s_n\sum_{j=1}^n\frac{1}{s_j}\Big)\Big]^{\rm T}. \tag{16}$$

2) 考虑决策者的权重 $e=(e_1,e_2,\cdots,e_t)^{\rm T}$, 则决策属性的最优权重向量 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$ 可由下式计算:

$$w_j=\sum_{k=1}^t e_k w_j^{(k)},\ j=1,2,\cdots,n. \tag{17}$$

Step 3　利用 NDINHA 算子

$$\tilde\beta_i={\rm NDINHA}_{e,v}(\tilde\beta_i^{(1)},\tilde\beta_i^{(2)},\cdots,\tilde\beta_i^{(t)})=$$
$$v_1\tilde\beta_i'^{(\tau(1))}\oplus v_2\tilde\beta_i'^{(\tau(2))}\oplus\cdots\oplus v_t\tilde\beta_i'^{(\tau(t))}, \tag{18}$$

对 t 位决策者给出的方案 A_i 的综合属性值 $\tilde\beta_i^{(k)}(k=1,2,\cdots,t)$ 进行集成, 得到方案 A_i 的群体综合属性值 $\tilde\beta_i=\{\mu_i,\sigma_i\}$, 其中

$$\mu_i=\sum_{k=1}^t v_k\mu_i'^{(\tau(k))},$$
$$\sigma_i=\sqrt{\sum_{k=1}^t v_k^2(\sigma_i'^{(\tau(k))})^2},\ \ i=1,2,\cdots,m.$$

$v=(v_1,v_2,\cdots,v_t)^{\rm T}$ 是与 NDINHA 算子相关联的加权向量, $v_k\in[0,1],k=1,2,\cdots,t,\sum\limits_{k=1}^t v_k=1;\tilde\beta_i'^{(\tau(k))}=\{\mu_i'^{(\tau(k))},\sigma_i'^{(\tau(k))}\}$ 为加权正态分布区间数组 $(te_1\tilde\beta_i^{(1)},te_2\tilde\beta_i^{(2)},\cdots,te_t\tilde\beta_i^{(t)})$ 中第 k 个最大的元素; $(\tau(1),\tau(2),\cdots,\tau(t))$ 为 $(1,2,\cdots,t)$ 的一个置换, t 是平衡因子.

Step 4　根据定义 3 对方案 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序, 从而得到最佳方案.

4　实例分析

通常, 一些大学采用教学 (I_1), 科研 (I_2) 和服务 (I_3) 这 3 个属性作为评估的一级指标 (属性), 属性权重满足条件 $0.33\leqslant w_1\leqslant 0.36, 0.30\leqslant w_2\leqslant 0.32, w_3\geqslant 0.31$. 现有 3 位决策者 $d_k, k=1,2,3$, 权重向量为 $e=(0.3,0.4,0.3)^{\rm T}$, 依照评估标准对 4 个学院 $A_i(i=1,2,3,4)$ 进行评估打分, 各指标下的评估信息用区间数表示. 不妨假设已利用式 (1) 和 (2) 转化为正态分布区间数 (由于所有指标的量纲一致, 不将决策矩阵规范化), 决策矩阵见表 1～表 3, 试确定最佳学院.

下面利用本文提出的群决策方法进行求解.

Step 1　利用优化模型 (11) 和 (17) 求得最优属性权重向量为 $w=(0.358\,7,0.320\,0,0.321\,3)^{\rm T}$.

表 1 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

方案	属性		
	I_1	I_2	I_3
A_1	{75.5, 0.7}	{85.3, 0.8}	{86.5, 0.9}
A_2	{82.5, 0.6}	{79.5, 0.5}	{83.5, 0.7}
A_3	{78.0, 0.3}	{82.5, 0.2}	{81.5, 0.8}
A_4	{89.5, 0.8}	{83.5, 0.6}	{80.5, 0.5}

表 2 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2$

方案	属性		
	I_1	I_2	I_3
A_1	{82.5, 0.6}	{85.0, 0.3}	{89.0, 0.2}
A_2	{81.5, 0.5}	{86.0, 0.4}	{90.0, 0.8}
A_3	{83.0, 0.4}	{84.5, 0.2}	{88.5, 0.3}
A_4	{82.0, 0.2}	{85.5, 0.3}	{89.5, 0.5}

表 3 决策矩阵 $\boldsymbol{R}_3$

方案	属性		
	I_1	I_2	I_3
A_1	{84.5, 0.8}	{88.5, 0.7}	{91.5, 0.7}
A_2	{85.5, 0.7}	{89.5, 0.4}	{92.5, 0.2}
A_3	{84.0, 0.3}	{88.0, 0.5}	{90.5, 0.6}
A_4	{83.5, 0.2}	{89.0, 0.5}	{91.0, 0.7}

Step 2 利用NDINWAA算子, 即式(10)对决策矩阵 $R_k=(\tilde{\beta}_{ij}^{(k)})_{4\times 3}(k=1,2,3)$ 中第 i 行的属性值进行加权集成, 得到决策者 d_k 所给出的方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{\beta}_i^{(k)}(i=1,2,3,4,\ k=1,2,3)$ 如下:

$$\tilde{\beta}_1^{(1)}=\{82.1703,0.4607\},\ \tilde{\beta}_1^{(2)}=\{85.3884,0.2443\},$$
$$\tilde{\beta}_1^{(3)}=\{88.0291,0.4279\},\ \tilde{\beta}_2^{(1)}=\{81.8613,0.3500\},$$
$$\tilde{\beta}_2^{(2)}=\{85.6711,0.3386\},\ \tilde{\beta}_2^{(3)}=\{89.0291,0.2891\},$$
$$\tilde{\beta}_3^{(1)}=\{80.5646,0.2859\},\ \tilde{\beta}_3^{(2)}=\{85.2472,0.1843\},$$
$$\tilde{\beta}_3^{(3)}=\{87.3685,0.2727\},\ \tilde{\beta}_4^{(1)}=\{84.6883,0.3808\},$$
$$\tilde{\beta}_4^{(2)}=\{85.5298,0.2004\},\ \tilde{\beta}_4^{(3)}=\{87.6698,0.2852\}.$$

Step 3 利用NDINHA算子, 即式(18)对3位决策者给出的方案 A_i 的综合属性值 $\tilde{\beta}_i^{(k)}(k=1,2,3)$ 进行集成, 得到方案 A_i 的群体综合属性值 $\tilde{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 为

$$\tilde{\beta}_1=\{83.5904,0.2333\},\ \tilde{\beta}_2=\{84.0680,0.1830\},$$
$$\tilde{\beta}_3=\{82.8924,0.1507\},\ \tilde{\beta}_4=\{84.0157,0.1666\}.$$

其中NDINHA算子的加权向量由基于正态分布的赋权法[11]确定为 $v=(0.2429,0.5142,0.2429)^{\mathrm{T}}$.

Step 4 根据定义3对方案 $A_i(i=1,2,3,4)$ 进行排序, 有 $A_2\succ A_4\succ A_1\succ A_3$. 因此, 最佳方案(学院)为 A_2.

5 结 论

本文对属性值为正态分布区间数而属性权重信息不完全的多属性群决策问题进行了研究. 针对正态分布区间数的集成问题, 提出了正态分布区间数的几种集成算子, 即NDINWAA算子、NDINOWA算子和NDINHA算子; 针对属性权重信息不完全的问题, 利用正态分布区间数属性值的方差, 通过建立优化模型确定最优属性权重; 进而在群体决策情形下, 提出了一种基于正态分布区间数的信息不完全的多属性群决策方法, 并详细讨论了其实现步骤. 该方法既考虑了正态分布区间数相比均匀分布区间数描述模糊评价值的优越性, 又考虑了现实生活中信息的不完全, 更符合决策的实际情况以及人们决策时提供信息的方式, 使决策结果更加客观有效, 可用于投资决策、项目评估以及经济效益综合评价等相关决策中.

参考文献(References)

[1] Bryson N, Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multiple criteria decision making problems[J]. European J of Operational Research, 1996, 96(2): 379-386.

[2] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
(Xu Z S. Uncertain multiple attribute decision making: Methods and applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[3] 达庆利, 徐泽水. 不确定多属性决策的单目标最优化模型[J]. 系统工程学报, 2002, 17(1): 50-55.
(Da Q L, Xu Z S. Singule-objective optimization model in uncertain multi-attribute decision-making[J]. J of Systems Engineering, 2002, 17(1): 50-55.)

[4] 徐泽水, 孙在东. 一类不确定型多属性决策问题的排序方法[J]. 管理科学学报, 2002, 5(3): 35-39.
(Xu Z S, Sun Z D. Priority method for a kind of multi-attribute decision making problems[J]. J of Management Sciences in China, 2002, 5(3): 35-39.)

[5] 徐泽水. 基于相离度和可能度的偏差最大化多属性决策方法[J]. 控制与决策, 2001,16(增刊): 818-821.
(Xu Z S. Maximum deviation method based on deviation degree and possibility degree for uncertain multi-attribute decision making[J]. Control and Decision, 2001, 16(S): 818-821.)

[6] 刘琳, 陈云翔, 葛志浩. 基于正态分布区间数的概率测度及多属性决策[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(4): 652-654.
(Liu L, Chen Y X, Ge Z H. Probability measure of interval-number based on normal distribution and multi-attribute decision making[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(4): 652-654.)

(下转第1506页)