

文章编号: 1001-0920(2010)12-1917-04

## 基于 Volterra 级数并行递推 AP 算法的陀螺漂移预测

孔祥玉, 胡昌华, 洪 贝, 胡友涛, 陈 亮

(第二炮兵工程学院 302 教研室, 西安 710025)

**摘要:** 为了预测某导弹陀螺漂移趋势, 以该陀螺漂移角速度时间序列为对象, 建立基于 Volterra 级数的非线性时间预测模型, 提出了一种基于 Volterra 级数的并行递推放射投影 AP 自适应算法. 以系统 Volterra 核向量增量的模与某约束总和为损失函数, 按照最陡下降原理导出各阶 Volterra 核更新公式; 再利用矩阵求逆引理递推求取各阶 Volterra 子系统自相关逆矩阵导出算法. 某导弹实测的陀螺漂移数据预测应用研究表明, 该算法运算速度快、预测精度高.

**关键词:** 非线性系统; Volterra 级数; 自适应辨识; 陀螺漂移预测; AP 算法

**中图分类号:** TP277

**文献标识码:** A

## Gyro drift prediction based on parallel recursive AP algorithm of volterra series

KONG Xiang-yu, HU Chang-hua, HONG Bei, HU You-tao, CHEN Liang

(Unit 302, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China. Correspondent: KONG Xiang-yu, E-mail: xiangyukong@126.com)

**Abstract:** For forecasting the gyro drift tendency of a missile, a prediction model based on Volterra series is established by taking the time series of gyro's drift as study object, and a parallel recursive affine projection(AP) algorithm for nonlinear system based on Volterra series is presented in this paper. Taking the minimum norm of the Volterra kernel vector increments and certain constraints as the overall cost function, by the steepest descent principle, the adaptive updating formula of the Volterra kernel vector of each order is derived, and the matrix inverse lemma is applied to recursively estimate the inverse of autocorrelation matrix of Volterra subsystem of each order, thus the algorithm is derived. The algorithm is applied to prediction research on real gyro drift data of certain missile, and experiment results show that the algorithm has fast operation speed and high prediction precision.

**Key words:** Nonlinear system; Volterra series; Adaptive identification; Gyro drift prediction; AP algorithm

### 1 引言

作为导航系统核心的惯性器件, 陀螺仪在整个导航系统中起着十分重要的作用. 影响陀螺仪工作精度的一个重要指标是陀螺漂移, 漂移量是影响陀螺仪精度的主要漂移误差, 也是影响陀螺仪性能可靠性的主要因素. 利用历史数据, 采用时间序列分析方法对陀螺漂移数据进行建模, 预测漂移性能的变化趋势, 并对误差进行补偿, 及时预报陀螺仪故障, 对提高整个导航系统的精度具有十分重要的意义<sup>[1]</sup>. 陀螺漂移时间序列的最大特点是具有非线性特性, 需要一种非线性映射能力的预测模型. 文献 [1,2] 采用支持向量回归机模型及其各种优化方法, 成功地预测了陀螺漂移趋

势, 但该类方法的模型训练时间较长, 预测精度有待提高.

本文拟用 Volterra 级数非线性模型对某陀螺漂移趋势数据进行建模并预测. 对陀螺漂移趋势数据进行建模预测必然涉及到模型辨识算法. 多年来, 寻求简化、收敛速度快、跟踪性能好的自适应算法一直是 Volterra 级数模型自适应辨识算法研究的一个热点. 近年来, 许多收敛性与跟踪能力好的自适应算法(如 affine projection(AP) 算法)及其一些快速改进算法先后被提出<sup>[3-6]</sup>, 该类算法提供了高的收敛速度与好的跟踪能力, 而且具有较小的计算复杂度. 文献 [7] 首次将 AP 自适应算法应用于 Volterra 系统的

收稿日期: 2009-10-12; 修回日期: 2009-12-10.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60736026); 中国博士后基金项目(20080441273); 中国博士后基金(特别资助)项目(200801480).

作者简介: 孔祥玉(1967—), 男, 山西洪洞人, 博士后, 从事非线性系统辨识、复杂系统故障诊断与预测等研究; 胡昌华(1966—), 男, 湖北罗田人, 教授, 从事复杂系统故障诊断与预测、潜在问题等研究.

自适应滤波, 文献 [8] 则提出了一种低复杂度的非线性自适应滤波算法, 对基于简化的 Volterra 级数模型的 AP 自适应算法在 GSM 手机接收机声音回波消除中的应用进行了研究。

本文在研究上述算法的基础上, 提出了一种基于 Volterra 级数的并行递推 AP 自适应算法, 应用该算法对某导弹陀螺漂移时间序列的实测数据进行了预测研究, 取得了良好的预测效果。

## 2 问题提出

本文所要解决的陀螺漂移趋势预测问题可以归结为非线性时间预测问题, 时间序列预测的基础是状态空间的重构理论。假设观测到的陀螺漂移时间序列为  $x(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ , 则在状态空间中重构的一点状态矢量可表示为  $x(t) = (x(t), x(t + \tau), \dots, x(t + (m - 1)\tau))$ , 其中  $m$  为嵌入维数,  $\tau$  为延迟时间。由 Takens 定理可知, 时间序列的预测重构本质上是一个动力系统的逆问题, 即通过动力系统的状态构造系统模型

$$x(t + T) = F(x(t)), \quad t = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

其中:  $T$  为前向预测步长 ( $T > 0$ ),  $F(\cdot)$  为重构的预测模型。时间序列不可能全是系统产生的干净序列值, 它还叠加了测量误差等各种噪声, 因此实际的预测模型应为

$$x(t + T) = \hat{F}(x(t)) + \epsilon(t), \quad (2)$$

其中  $\epsilon$  为噪声或拟合误差。上述问题变成了一个预测模型的构建问题。

理论研究和实践经验业已表明, 实际中的大量的非线性系统可用 Volterra 级数来表征, 因此可用 Volterra 级数展开式构造陀螺漂移时间序列的非线性预测模型。设非线性离散系统的输入  $x(n) = [x(n), x(n - 1), \dots, x(n - N + 1)]^T$ , 输出  $y(n) = \hat{x}(n + 1)$ , 则该非线性系统函数的 Volterra 级数展开式为

$$\begin{aligned} x(n + 1) = F(x(n)) = & h_0 + \sum_{m=0}^{\infty} h_1(m)x(n - m) + \\ & \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_2(m_1, m_2)x(n - m_1)x(n - m_2) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

其中:  $h_1(m_1), h_2(m_1, m_2)$  为 1 阶、2 阶 Volterra 核。在实际应用中, 这种无穷级数展开式难以实现, 必须采用有限截断和有限次求和的形式。

## 3 Volterra 级数 AP 自适应算法

定义 Volterra 系统输入观测向量为  $x(n) = [x_1^T(n), x_2^T(n), \dots, x_k^T(n)]^T$ , 其中  $x_i(n) (i = 1, 2, \dots, k)$  是系

统在  $n$  时刻的第  $i$  阶输入向量。与此相对应, 定义第  $i$  阶 Volterra 核向量, 将 Volterra 系统的核向量记为  $H = [h_1^T, h_2^T, \dots, h_k^T]^T$ , 则 Volterra 模型输出可表示为  $y(n) = H^T x(n)$ , 输出误差为  $e(n) = y(n) - d(n)$ ,  $d(n)$  为系统在  $n$  时刻的输出。

基于 Volterra 级数的 AP 自适应算法可表示为<sup>[7]</sup>

$$H(n + 1) = H(n) + \mu G(n)G^T(n)G(n)^{-1}e(n). \quad (4)$$

其中:  $G(n) = [X(n), X(n - 1), \dots, X(n - L + 1)]$ ,  $e(n) = [e(n), (1 - \mu)e(n - 1), \dots, (1 - \mu)^{L-1}e(n - L + 1)]^T$ ,  $L$  是仿射投影阶次。AP 自适应算法能够正交化输入信号, 在实际应用中收敛性能较好, 尤其是由于自适应 Volterra 滤波器对输入信号的统计特性依赖较大, 使得基于 Volterra 级数的 AP 自适应算法的效果较为明显。然而上述算法是将 Volterra 级数模型整体地看作一个伪线性算子, 在辨识过程中无法避免 Volterra 模型各阶非线性因素之间的较强耦合, 这将会影响算法的收敛速度, 不利于辨识算法的并行实现, 每一步迭代的运算量相对较大, 且在算法中还存在复杂的矩阵求逆运算。为了克服这些缺点, 需要研究并探索新的算法。

## 4 Volterra 级数并行递推 AP 算法

定义  $n - j + 1$  时刻的后向估计误差为

$$\begin{aligned} e_{n+1}(n - j + 1) = & \\ & d(n - j + 1) - H^T(n + 1)X(n - j + 1), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $j (j = 1, 2, \dots, L)$  表示仿射投影的阶次。

将以上  $j$  个后向估计误差置为零, 并应用  $j$  个拉格朗日乘子, 取下列损失函数:

$$\begin{aligned} J = & \delta H^T(n + 1)\delta H(n + 1) + \\ & \sum_{j=1}^L \lambda_j (d(n - j + 1) - \\ & H^T(n + 1)X(n - j + 1)), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $\delta H(n + 1) = H(n + 1) - H(n)$ 。

最小化损失函数, 并对损失函数  $J$  相对于  $\delta H(n + 1)$  求导, 并令导数为零, 得

$$\begin{aligned} 2\delta H(n + 1) = & \\ & \sum_{j=1}^L \lambda_j X(n - j + 1) = G(n)\Lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

其中:  $P \times L$  矩阵  $G(n)$  被定义为  $G(n) = [X(n), X(n - 1), \dots, X(n - L + 1)]$ ,  $P$  是 Volterra 系统输入观测向量  $X(n)$  的向量长度;  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L]^T$ 。

对式 (7) 左乘  $G^T(n)$ , 可得

$$\Lambda = (G^T(n)G(n))^{-1}G^T(n)2\delta H(n + 1). \quad (8)$$

其中  $L \times 1$  向量  $G^T(n)2\delta H(n + 1)$  还可表示为

$$G^T(n)2\delta H(n+1) = 2 \begin{bmatrix} X^T(n)\delta H(n+1) \\ X^T(n-1)\delta H(n+1) \\ \vdots \\ X^T(n-L+1)\delta H(n+1) \end{bmatrix} = 2e(n), \quad (9)$$

其中  $e(n)$  是前向估计误差向量。

结合式(7)~(9), 可推导出如下关系:

$$\delta H(n+1) = G(n)(G^T(n)G(n))^{-1}e(n). \quad (10)$$

若 Volterra 系统输入观测向量与核向量均按不同的阶表示, 则式(10)可表示为

$$\delta H_i(n+1) = G_i(n)(G_i^T(n)G_i(n))^{-1}e(n). \quad (11)$$

其中

$$G_i(n) = [x_i(n) \ x_i(n-1) \ \cdots \ x_i(n-L+1)],$$

$i(i = 1, 2, \dots, K)$  表示 Volterra 系统的非线性的阶次, 则 Volterra 各阶核向量更新公式可表示为

$$H_i(n+1) = H_i(n) + \mu_i G_i(n)(G_i^T(n)G_i(n))^{-1}e(n). \quad (12)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, K$ ;  $\mu_i$  是步长参数, 它控制着算法的收敛速度与稳定性。

式(12)中  $G_i^T(n)G_i(n)$  是通过最后的  $L$  个输入向量而获得的第  $i$  阶输入观测向量的自相关矩阵的估计, 可以考虑用第  $i$  阶输入向量的部分采样值的估计值代替式(12)中的  $G_i^T(n)G_i(n)$ , 且通过应用矩阵求逆引理来递推估计  $G_i^T(n)G_i(n)$  的逆。

设

$$\hat{R}_i(n) = I_i(n)I_i^T(n), \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (13)$$

其中

$$I_i(n) = [u^i(n) \ u^i(n-1) \ \cdots \ u^i(n-L+1)]^T.$$

对第  $i$  阶输入观测向量的自相关矩阵的估计, 可由递推表示为

$$R_i(n) = \lambda R_i(n-1) + \hat{R}_i(n), \quad (14)$$

其中  $\lambda$  是遗忘因子, 取值为  $0 < \lambda < 1$ 。

应用矩阵求逆引理, 由式(14)得

$$R_i^{-1}(n) = \frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1) - \frac{\frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1) I_i(n) I_i^T(n) \frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1)}{1 + \frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1) I_i(n) I_i^T(n)}. \quad (15)$$

定义

$$K_i(n) = \frac{\frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1) I_i(n)}{1 + \frac{1}{\lambda} R_i^{-1}(n-1) I_i(n) I_i^T(n)}, \quad (16)$$

$$P_i(n) = R_i^{-1}(n).$$

可得

$$P_i(n) = \frac{1}{\lambda} (P_i(n-1) - K_i(n) I_i^T(n) P_i(n-1)). \quad (17)$$

将式(12)中的  $(G_i^T(n)G_i(n))^{-1}$  由  $P_i(n)$  替代, 则可得出 Volterra 各阶核向量的更新公式

$$H_i(n+1) = H_i(n) + \mu_i G_i(n) P_i(n) e(n). \quad (18)$$

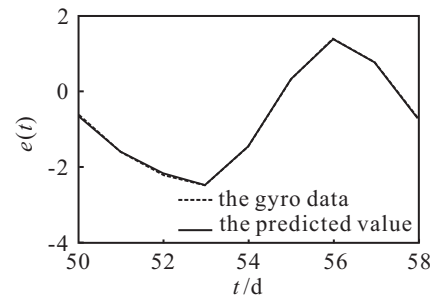
综合式(16)~(18)即得本文算法, 算法初始化  $P_i = \delta I, H_i = \mathbf{0}$ , 任意  $i, i = 1, 2, \dots, K$ 。

### 5 某陀螺漂移数据预测应用研究

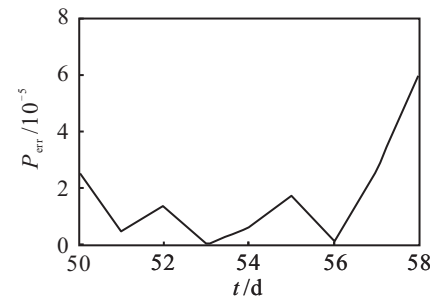
下面运用本文算法对某导弹陀螺仪的一批漂移实测数据进行预测. 以该陀螺仪的 58 个逐日漂移数据作为样本数据, 前 50 个用于训练, 后 8 个用于预测. 预测相对误差定义为

$$P_{\text{err}} = \sum_{k=1}^{N_p} [\hat{x}(k) - x(k)]^2 / \sum_{k=1}^{N_p} x^2(k). \quad (19)$$

图 1(a) 和图 1(b) 分别是采用本文算法对某导弹控制系统陀螺仪漂移的预测结果及其相对误差曲线。



(a) 陀螺漂移预测结果



(b) 陀螺漂移预测相对误差

图 1 采用本文算法对陀螺漂移预测结果及误差图

图 2(a) 和图 2(b) 分别是采用 Volterra 级数 AP 自适应算法(4)对某导弹控制系统陀螺仪漂移的预测结果及其相对误差曲线。

由图 1 和图 2 可见, 本文算法可以有效地预测某陀螺漂移趋势序列, 预测达到了很高的精度, 预测误差小于采用 Volterra 级数 AP 自适应算法的预测结果. 实验中, 采用二阶 Volterra 级数模型, 每阶模型的记忆长度取值为 10, 计算量小, 在计算机上训练建模与预测用 Matlab 实现, 1 s 内即可完成。

在预测实验中, 还研究了嵌入维数对预测性能的影响. 表 1 给出了相对预测误差值随嵌入维数的增

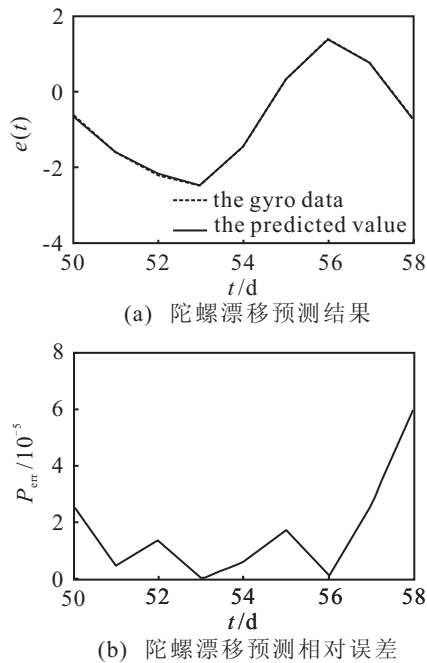


图 2 采用 Volterra 模型 AP 算法对陀螺漂移预测的结果

大而变化的数据. 实验中 Volterra 级数模型阶次取为 2, 58 个逐日漂移数据的前 50 个用于训练建模, 后 8 个数据用于预测. 预测使用了两种算法, 即本文算法与 Volterra 级数 AP 自适应算法.

表 1 嵌入维数对预测性能的影响

算法	嵌入维数				
	8	9	10	11	12
AP	3.8e-005	2.5e-005	1.1e-005	5.1e-005	5.2e-005
RAP	6.9e-006	4.4e-006	3.1e-006	5.4e-006	8.8e-006

从表 1 可以看出, 本文算法与 Volterra 级数 AP 算法在嵌入维数为 10 时取得最小相对预测误差, 而且对于嵌入维数大于或者小于 10, 相对预测误差均增加. 尽管这一结论仍需要大量实验验证, 但对于这些算法的实际使用是有益的.

## 6 结 论

本文针对某导弹陀螺漂移数据预测建模的需要, 建立了基于 Volterra 级数的非线性时间预测模型,

提出了一种 Volterra 级数并行递推 AP 自适应算法. 算法用于某陀螺漂移趋势预测, 取得了良好的预测结果.

## 参考文献(References)

- [1] 蔡艳宁, 胡昌华. 基于支持向量回归机的陀螺漂移预测模型[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(5): 593-597. (Cai Y N, Hu C H. Gyro drift prediction model based on support vector regression machine[J]. J of Chinese Inertial Technology, 2007, 15(5): 593-597.)
- [2] 张伟, 胡昌华, 焦李成, 等. 遗忘因子最小二乘支持向量机及在陀螺仪漂移预测中的应用研究[J]. 宇航学报, 2007, 28(2): 448-451. (Zhang W, Hu C H, Jiao L C, et al. Forgetting-factor least square support vector machine and application on drift forecasting of gyro[J]. J of Astronautics, 2007, 28(2): 448-451.)
- [3] Ozeki K, Umeda T. An adaptive filtering algorithm using an orthogonal projection to an affine subspace and its properties[J]. Electronics and Communication in Japan, 1984, 67-A(5):126-132.
- [4] Gay S. Fast projection algorithms with application to voice excited echo cancellers[D]. Piscataway: Rutgers University, 1994.
- [5] ontazeri M, Duhamel P. A set of algorithms linking NLMS and block RLS algorithms[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1995, 43(2): 444-453.
- [6] Tanaka M, Kaneda Y, Makino S, et al. Fast projection algorithm for adaptive filtering[J]. IEICE Trans on Fundamentals, 1995, E-78-A(10): 1355-1361.
- [7] Kajikawa Y. The adaptive volterra filter: Its present and future[J]. Electronics and Communications in Japan, 2000, 83(12): 51-61.
- [8] Andrea F, Alberto C, Giovanni L S. Low-complexity nonlinear adaptive filters for acoustic echo cancellation in GSM handset receivers[J]. Europe Trans on Telecomms, 2003, 14: 161-169.
- [9] Schetzen M. The volterra and wiener theories of nonlinear systems[M]. New York: Wiley, 1980.