文章编号: 1001-0920(2010)12-1810-05

多属性群决策达成一致方法研究

徐迎军, 李 东

(南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016)

摘 要: 在群决策过程中, 专家对于候选方案的每个属性都提出自己的个体决策信息. 关于专家意见的一致化问题, 提出一种迭代算法, 能自动完成个体意见的一致化, 不需要专家修改决策信息. 在群体决策矩阵的基础上, 用乘性加权集结算子把方案的属性值进行集结, 得到方案的群体综合属性值, 从而选出最优方案. 详细介绍了算法的实现过程, 并用一实际例子说明了算法的可行性.

关键词: 多属性群决策；一致；乘性加权集结算子；迭代算法

中图分类号: C934　　　　**文献标识码:** A

Approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making

XU Ying-jun, LI Dong

(1. Economics and Management College，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China. Correspondent：XU Ying-jun，E-mail：xuyingjun5007@sina.com)

Abstract: In the process of group decision making, each expert provides the preferences over the alternatives with repect to each attribute, and constructs an individual decision matrix. As to the problem of consensus of the experts' decision matrix, an iterative method is proposed to complete consensus among group opinions, which can avoid forcing the experts to modify their opinions. Based on the consentaneous group decision matrix, the approach utilizes the multiplicative weighted aggregation operator to derive the overall attribute values of alternatives, by which the most desirable alternative can be found out. Then the implementation process of the approach is introduced detailedly with a practical example, which demonstrates the feasibility and practicability of the proposed method.

Key words: Multiple attribute group decision making；Consensus；Multiplicative weighted aggregation operator；Iterative algorithm

1 引 言

多属性群决策问题是现代决策科学的重要组成部分, 已被广泛应用于社会学、经济学、军事学、管理学等诸多领域[1]. 多属性决策问题一般是由多个专家就多个属性对一组方案进行比较, 建立决策矩阵. 各个专家通常来自不同的研究领域, 他们的知识结构、表达能力、实践经验以及个性不尽相同, 因此他们的决策矩阵可能会有较大的差异. 如果直接把差异较大的专家意见进行集结, 专家意见的极端值可能会对最终结果产生不合理的影响. 因此, 如何修正专家的决策矩阵, 从而实现合理的一致是一个重要的研究课题, 已引起了研究者的广泛关注[2−6]. 一致化是一个动态、迭代的群体决策过程[7], 在每一阶段, 如果专家之间的一致化程度未满足预定的一致化指标, 则该一致化程度是不可接受的. 协调员会把专家的决策信息返回本人, 让他们进行讨论, 然后修改个体决策信息, 直到满足预定的一致化指标为止. Herrera-Viedma[8]研究了不同偏好结构群决策问题的一致化问题, 提出用个体决策信息与群体决策信息之间的距离来衡量一致化程度. Xu[9]研究了基于语言偏好关系的群决策问题, 定义了两个语言值之间以及两个语言偏好关系之间的偏离度与相似度, 证明了个体语言偏好关系与群体语言偏好关系之间的偏离度, 不超过任意两个个体语言偏好关系之间偏离度的最大值, 为基于语言偏好关系的群决策问题提供了理论基础. 已有方法大都

收稿日期: 2009-10-09；**修回日期:** 2010-02-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10671108).

作者简介: 徐迎军(1974−), 男, 山东临沂人, 讲师, 博士生, 从事决策理论与应用、信息融合等研究；李东(1949−), 男, 江苏常州人, 教授, 博士生导师, 从事决策理论与应用、信息融合等研究.

重点关注基于语言环境群决策问题的一致化, 需要把与群体意见偏离较大的个体决策信息返回专家, 进行重新评估, 直至获得合理的一致. 这种方法可靠准确, 但在许多实际的群决策问题中, 成本昂贵, 时间拖得过长. 本文提出的群决策一致化迭代模型, 避免了让专家多次修改决策信息的繁琐程序.

2 问题描述

在多属性群决策问题中, 假设方案集为 $X=\{x_1, x_2,\cdots,x_m\}(m\geqslant 2)$, 专家集为 $E=\{e_1,e_2,\cdots,e_t\}(t\geqslant 2)$. $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)^{\rm T}$ 是专家对应的权重向量, λ_k 是专家 k 的重要性度量, 满足 $\lambda_k\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,t$, $\sum\limits_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 属性集为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $W=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\rm T}$ 是属性对应的权重向量, 满足 $w_i\geqslant 0$, $i=1,2,\cdots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$. 令 $A_k=(a_{ijk})_{m\times n}$ 为数值型决策矩阵, 其中 a_{ijk} 表示专家 $e_k\in E$ 给出的方案 $x_i\in X$ 关于属性 $u_j\in U$ 的属性值.

一般而言, 在多属性群决策问题中, 属性可以分为效益型属性和成本型属性. 为了消除属性的量纲, 以便进行属性间的比较, 首先把决策矩阵 $A_k=(a_{ijk})_{m\times n}$ 进行标准化, 得到新的决策矩阵 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}$, 其中:

若 u_j 为效益型属性, 则有

$$r_{ijk}=\frac{a_{ijk}}{\max\limits_{i}\{a_{ijk}\}},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,t. \tag{1}$$

若 u_j 为成本型属性, 则有

$$r_{ijk}=\frac{\max\limits_{i}\{a_{ijk}\}}{a_{ijk}},$$
$$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n,\ k=1,2,\cdots,t. \tag{2}$$

然后, 可用乘型加权集结 (MWA) 算子

$$r_{ij}=\prod_{k=1}^{t}r_{ijk}^{\lambda_k},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

将标准化的个体决策矩阵 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 集结成一个群体决策矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$.

为了测量每个标准化的个体决策矩阵与群体决策矩阵之间的相似度, 首先定义如下的距离公式:

$$d(R_k,R)=\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\max(r_{ijk},r_{ij})}{\min(r_{ijk},r_{ij})}\right)^{\frac{1}{m\times n}}, \tag{4}$$

称 $d(R_k,R)$ 为 R_k 与 R 之间的距离. 令

$$S(R_k,R)=\frac{1}{d(R_k,R)}, \tag{5}$$

称 $S(R_k,R)$ 为 R_k 与 R 之间的相似度.

$S(R_k,R)$ 具有如下性质: 1) $0\leqslant S(R_k,R)\leqslant 1$; 2) $S(R_k,R)=S(R,R_k)$; 3) $S(R_k,R)=1$ 当且仅当 $r_{ijk}=r_{ij}$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, 此时称 R_k 和 R 完全相似.

令 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 为 t 个标准化的个体决策矩阵, $R=(r_{ij})_{m\times n}$ 为由式 (3) 集结得到的群体决策矩阵, 如果 $S(R_k,R)\geqslant\alpha$, 则称 R_k 和 R 是可接受相似的, 或具有可接受相似度. α 是可接受临界值, 在实际应用中, 可由专家事先确定, 一般 α 应大于或等于 0.5. 在进行群决策的过程中, 如果 $S(R_k,R)<\alpha$, 则 R_k 和 R 之间的相似度是不可接受的, 或者说 R_k 和 R 是不可接受相似的. 此时将矩阵 R_k 返回专家 $e_k\in E$, 让专家 e_k 重新考虑决策矩阵 R_k, 直到 R_k 和 R 之间具有可接受相似度为止. 这个方案是可靠的, 也是准确的, 但需要专家花费巨大的精力, 以及较长的时间, 因此实践中的可行性较差.

3 算法说明

为了解决上述问题, 本文构造一迭代算法, 使得与群体决策矩阵之间不具有可接受相似度的个体决策矩阵不断被调整, 直至与群体决策矩阵之间具有可接受相似度.

对于一群决策问题, 令 $A_k=(a_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 为专家 $e_t\in E$ 的个体决策矩阵, 其中 a_{ijk} 表示专家 $e_k\in E$ 给出的方案 $x_i\in X$ 关于属性 $u_j\in U$ 的属性值. 令 l 为迭代次数, η 为一常数, 满足 $0<\eta<1$.

Step 1 利用标准化公式 (1) 和 (2) 把个体决策矩阵 $A_k=(a_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 分别进行标准化, 得到标准化决策矩阵 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$.

Step 2 利用 MWA 算子把标准化个体决策矩阵 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 集结成群体决策矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times n}$. 为方便起见, 令 $R_k^{(0)}=(r_{ijk}^{(0)})_{m\times n}=R_k=(r_{ijk})_{m\times n}$, $k=1,2,\cdots,t$; $R^{(0)}=(r_{ij}^{(0)})_{m\times n}=R=(r_{ij})_{m\times n}$; $l=0$, $\alpha=\alpha^*$, α^* 为标准化个体决策矩阵与群体决策矩阵之间可接受相似度的下界.

Step 3 计算每一个标准化个体决策矩阵 $R_k^{(l)}=(r_{ijk}^{(l)})_{m\times n}$ 与群体决策矩阵 $R^{(l)}=(r_{ij}^{(l)})_{m\times n}$ 之间的相似度

$$S(R_k^{(l)},R^{(l)})=\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{\min(r_{ijk}^{(l)},r_{ij}^{(l)})}{\max(r_{ijk}^{(l)},r_{ij}^{(l)})}\right)^{\frac{1}{m\times n}},$$
$$k=1,2,\cdots,t.$$

如果 $S(R_k^{(l)},R^{(l)})\geqslant\alpha^*$, 对 $k=1,2,\cdots,t$ 均成立, 则转 Step 5; 否则, 转 Step 4.

Step 4 令 $R_k^{(l+1)}=(r_{ijk}^{(l+1)})_{m\times n}$, $R^{(l+1)}=(r_{ij}^{(l+1)})_{m\times n}$. 其中 $r_{ijk}^{(l+1)}=(r_{ijk}^{(l)})^{\eta}(r_{ij}^{(l)})^{1-\eta}$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, $k=1,2,\cdots,t$; $r_{ij}^{(l+1)}=$

$\prod\limits_{k=1}^{t}(r_{ijk}^{(l+1)})^{\lambda_k}$, $i=1,2,\cdots,m$, $j=1,2,\cdots,n$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t)^{\mathrm{T}}$ 是专家对应的权重向量, 满足 $\lambda_k\geqslant 0$, $k=1,2,\cdots,t$, $\sum\limits_{k=1}^{t}\lambda_k=1$. 令 $l=l+1$, 转Step 3.

Step 5 输出 l, $R_k^{(l)}(k=1,2,\cdots,t)$ 以及 $R^{(l)}$. 此时, 每一个标准化的个体决策矩阵 $R_k^{(l)}(k=1,2,\cdots,t)$ 与群体决策矩阵 $R^{(l)}$ 之间均具有可接受相似度, 此时的 $R^{(l)}$ 是意见一致的群体决策矩阵.

Step 6 利用MWA算子 $r_i^{(l)}=\prod\limits_{j=1}^{n}(r_{ij}^{(l)})^{w_j}$, $i=1,2,\cdots,m$, 将 $R^{(l)}=(r_{ij}^{(l)})_{m\times n}$ 第 i 行的元素进行集结, 得到方案 $x_i\in X(i=1,2,\cdots,m)$ 的综合属性值 $r_i^{(l)}$, $i=1,2,\cdots,m$.

Step 7 根据综合属性值 $r_i^{(l)}(i=1,2,\cdots,m)$ 对方案 $x_i\in X(i=1,2,\cdots,m)$ 进行排序, 从而选择出最优方案.

由如下定理可保证迭代算法的收敛性.

定理 1 令 $R_k=(r_{ijk})_{m\times n}(k=1,2,\cdots,t)$ 为标准化的个体决策矩阵, $\{R_k^{(l)}\}$ 和 $\{R^{(l)}\}$ 为前面的算法所产生的矩阵序列, 对任意 l, 有: 1) $S(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)})=\big(S(R_k^{(l)},R^{(l)})\big)^{\eta}$, $0<\eta<1$; 2) $\lim\limits_{l\to+\infty}d(R_k^{(l)},R^{(l)})=1$, $k=1,2,\cdots,t$.

证明 因

$$d(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)})=$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\max\big(r_{ijk}^{(l+1)},r_{ij}^{(l+1)}\big)}{\min\big(r_{ijk}^{(l+1)},r_{ij}^{(l+1)}\big)}\Big)\Big)^{\frac{1}{mn}}=$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\max\Big(r_{ijk}^{(l+1)},\Big(\prod\limits_{k'=1}^{t}\Big(r_{ijk'}^{(l+1)}\Big)^{\lambda_{k'}}\Big)\Big)}{\min\Big(r_{ijk}^{(l+1)},\Big(\prod\limits_{k'=1}^{t}\big(r_{ijk'}^{(l+1)}\big)^{\lambda_{k'}}\Big)\Big)}\Big)\Big)^{\frac{1}{mn}}=$$
$$=\cdots=$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\max\Big(\prod\limits_{k'=1}^{t}\big(r_{ijk}^{(l)}\big)^{\lambda_{k'}},\prod\limits_{k'=1}^{t}\big(r_{ijk'}^{(l)}\big)^{\lambda_{k'}}\Big)}{\min\Big(\prod\limits_{k'=1}^{t}\big(r_{ijk}^{(l)}\big)^{\lambda_{k'}},\prod\limits_{k'=1}^{t}\big(r_{ijk'}^{(l)}\big)^{\lambda_{k'}}\Big)}\Big)\Big)^{\frac{\eta}{mn}}=$$
$$\Big(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Big(\frac{\max(r_{ijk}^{(l)},r_{ij}^{(l)})}{\min(r_{ijk}^{(l)},r_{ij}^{(l)})}\Big)\Big)^{\frac{\eta}{mn}}=$$
$$\big(d\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)\big)^{\eta}$$

对任意 $k=1,2,\cdots,t$ 均成立, 即

$$d\big(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)}\big)=\big(d\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)\big)^{\eta}\tag{6}$$

对任意 $k=1,2,\cdots,t$ 均成立, 从而 $S\big(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)}\big)=\big(S\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)\big)^{\eta}$, 即定理 1 中的 1) 成立.

把式 (6) 依次递推可得

$$d\big(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)}\big)=\big(d\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)\big)^{\eta}=$$
$$\big(\big(d\big(R_k^{(l-1)},R^{(l-1)}\big)\big)^{\eta}\big)^{\eta}=\cdots=\big(d\big(R_k^{(0)},R^{(0)}\big)\big)^{\eta^{l+1}}$$

对任意 $k=1,2,\cdots,t$ 均成立. 因为 $\lim\limits_{l\to+\infty}\big(d\big(R_k^{(0)},R^{(0)}\big)\big)^{\eta^{l+1}}=1$, 所以有 $\lim\limits_{l\to+\infty}d\big(R_k^{(l+1)},R^{(l+1)}\big)=1$, 对任意 $k=1,2,\cdots,t$ 均成立. 从而有 $\lim\limits_{l\to+\infty}S\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)=\lim\limits_{l\to+\infty}\dfrac{1}{d\big(R_k^{(l)},R^{(l)}\big)}=1$, 即定理 1 中的 2) 成立. □

由定理 1 可知, 算法产生的序列使得个体决策矩阵与群体决策矩阵之间的相似度逐渐增大, 且以 1 为极限, 因此对满足 $0<\alpha<1$ 的 α 值, 在有限步迭代之后, 一定能得到满足要求的 $R_k^{(l)}(k=1,2,\cdots,t)$ 及 $R^{(l)}$. 算法不需要把与群体决策矩阵之间不具有可接受相似度的个体决策矩阵返回专家, 因此在实际应用中更方便.

4 算例分析

下面考虑一个空调系统选择问题[10]. 某城市计划建造一城市图书馆, 城市规划部门需要考虑图书馆中安装哪种空调系统. 建筑商提供了 5 个备选方案 (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5). 假设现在有 3 位专家 (e_1,e_2,e_3) (假设决策者对这 3 位专家进行两两比较, 建立判断矩阵, 利用 AHP 方法获得 3 位专家的权重向量为 $\lambda=(0.2,0.5,0.3)^{\mathrm{T}}$). 对于空调系统, 考虑 8 个属性: 2 个货币属性, 6 个非货币属性. 即: G_1(购买成本 (元)), G_2 (运行成本 (元)), G_3(效果 (0-1标度)), G_4(噪声水平 (分贝)), G_5(维修便利 (0-1标度)), G_6(可靠性 (百分比标度)); G_7(灵活性 (0-1标度)), G_8(安全性((0-1标度)). 属性 G_1,G_2,G_4 是成本属性, 其余 5 个属性是效益属性. 假设 3 位专家给出的决策矩阵分别如表 1∼ 表 3 所示. 另外, 假设专家根据经济性、功能性以及操作性 3 个准则对 8 个属性进行两两比较, 建立判断矩阵, 用 AHP 方法获得属性的权重向量为 $W=(0.11,0.09,$

表 1 专家 e_1 给出的决策矩阵 A_1

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	5.00	7.00	0.80	36.00	0.60	94.00	0.50	0.80
x_2	2.00	6.00	0.50	72.00	0.50	76.00	0.80	0.60
x_3	6.00	6.00	0.70	64.00	0.70	84.00	0.90	0.70
x_4	7.00	5.00	0.80	42.00	0.80	91.00	0.70	0.80
x_5	5.00	7.00	0.70	54.00	0.60	96.00	0.60	0.90

表 2 专家 e_2 给出的决策矩阵 A_2

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	6.00	7.00	0.80	38.00	0.40	97.00	0.60	0.50
x_2	3.00	6.00	0.70	76.00	0.70	72.00	0.70	0.60
x_3	6.00	5.00	0.60	70.00	0.90	83.00	0.70	0.70
x_4	5.00	6.00	0.80	45.00	0.95	87.00	0.90	0.70
x_5	4.00	8.00	0.90	55.00	0.80	91.00	0.40	0.90

表 3　专家 e_3 给出的决策矩阵 A_3

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	4.00	7.00	0.90	43.00	0.70	95.00	0.50	0.60
x_2	5.00	8.00	0.60	75.00	0.50	82.00	0.90	0.80
x_3	7.00	6.00	0.70	78.00	0.90	87.00	0.95	0.70
x_4	8.00	7.00	1.00	49.00	0.80	96.00	0.70	0.60
x_5	6.00	5.00	0.80	62.00	0.90	93.00	0.60	0.90

$0.11, 0.12, 0.18, 0.16, 0.10, 0.13)$. 下面把提出的方法应用于空调系统的选择问题.

Step 1　首先利用标准化公式 (1) 和 (2) 把个体决策矩阵 $A_k = (a_{ijk})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 分别进行标准化, 得到标准化决策矩阵 $R_k = (r_{ijk})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 如表 4∼ 表 6 所示.

表 4　标准化决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.40	1.00	1.00	2.00	0.75	0.98	0.56	0.89
x_2	3.50	1.17	0.63	1.00	0.63	0.79	0.89	0.67
x_3	1.17	1.17	0.88	1.13	0.88	0.88	1.00	0.78
x_4	1.00	1.40	1.00	1.71	1.00	0.95	0.78	0.89
x_5	1.40	1.00	0.88	1.33	0.75	1.00	0.67	1.00

表 5　标准化决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.00	1.14	0.89	2.00	0.42	1.00	0.67	0.56
x_2	2.00	1.33	0.78	1.00	0.74	0.74	0.78	0.67
x_3	1.00	1.60	0.67	1.09	0.95	0.86	0.78	0.78
x_4	1.20	1.33	0.89	1.69	1.00	0.90	1.00	0.78
x_5	1.50	1.00	1.00	1.38	0.84	0.94	0.44	1.00

表 6　标准化决策矩阵 $\boldsymbol{R}_3$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	2.00	1.14	0.90	1.81	0.78	0.99	0.53	0.67
x_2	1.60	1.00	0.60	1.04	0.56	0.85	0.95	0.89
x_3	1.14	1.33	0.70	1.00	1.00	0.91	1.00	0.78
x_4	1.00	1.14	1.00	1.59	0.89	1.00	0.74	0.67
x_5	1.33	1.60	0.80	1.26	1.00	0.97	0.63	1.00

Step 2　令 $\alpha = 0.95$, 利用 MWA 算子把标准化个体决策矩阵 $R_k = (r_{ijk})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 集结成群体决策矩阵 $R = (r_{ij})_{5\times 8}$, 如表 7 所示.

表 7　群体决策矩阵 $\boldsymbol{R}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.32	1.11	0.91	1.94	0.57	0.99	0.60	0.64
x_2	2.09	1.19	0.69	1.01	0.66	0.78	0.85	0.73
x_3	1.07	1.42	0.71	1.07	0.95	0.87	0.88	0.78
x_4	1.10	1.29	0.94	1.66	0.97	0.94	0.87	0.76
x_5	1.43	1.15	0.91	1.33	0.87	0.96	0.54	1.00

Step 3　计算每一个标准化个体决策矩阵 $R_k^{(0)} = (r_{ijk}^{(0)})_{5\times 8} = R_k = (r_{ijk})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 与群体决策矩阵 $R^{(0)} = (r_{ij}^{(0)})_{5\times 8} = R = (r_{ij})_{5\times 8}$ 之间的相似度.

$$S(R_1^{(0)}, R^{(0)}) = \frac{1}{d(R_1^{(0)}, R^{(0)})} = 0.910\,9;$$

$$S(R_2^{(0)}, R^{(0)}) = \frac{1}{d(R_2^{(0)}, R^{(0)})} = 0.928\,2;$$

$$S(R_3^{(0)}, R^{(0)}) = \frac{1}{d(R_3^{(0)};, R^{(0)})} = 0.898\,8.$$

由于 3 个相似度均小于 α, 转 Step 4.

Step 4　令 $\eta = 0.9$, 修正个体决策矩阵, 得到新的个体决策矩阵 $R_1^{(1)}$, $R_2^{(1)}$, $R_3^{(1)}$ 如表 8∼表 10 所示. 利用 MWA 算子把标准化个体决策矩阵 $R_k^{(1)} = (r_{ijk}^{(1)})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 集结成群体决策矩阵 $R^{(1)} = (r_{ij}^{(1)})_{5\times 8}$ 如表 11 所示.

表 8　一次修正后的个体决策矩阵 $\boldsymbol{R}_1^{(1)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.39	1.01	0.99	1.99	0.73	0.98	0.56	0.86
x_2	3.32	1.17	0.63	1.00	0.63	0.79	0.88	0.67
x_3	1.16	1.19	0.86	1.12	0.88	0.87	0.99	0.78
x_4	1.01	1.39	0.99	1.71	1.00	0.95	0.79	0.88
x_5	1.40	1.01	0.88	1.33	0.76	1.00	0.65	1.00

表 9　一次修正后的个体决策矩阵 $\boldsymbol{R}_2^{(1)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.03	1.14	0.89	1.99	0.43	1.00	0.66	0.56
x_2	2.01	1.32	0.77	1.00	0.73	0.75	0.78	0.67
x_3	1.01	1.58	0.67	1.08	0.95	0.86	0.79	0.78
x_4	1.19	1.33	0.89	1.69	1.00	0.90	0.99	0.78
x_5	1.49	1.01	0.99	1.38	0.84	0.94	0.45	1.00

表 10　一次修正后的个体决策矩阵 $\boldsymbol{R}_3^{(1)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.92	1.14	0.90	1.83	0.75	0.99	0.53	0.66
x_2	1.64	1.02	0.61	1.04	0.56	0.85	0.94	0.87
x_3	1.14	1.34	0.70	1.01	0.99	0.90	0.99	0.78
x_4	1.01	1.16	0.99	1.60	0.90	0.99	0.75	0.68
x_5	1.34	1.55	0.81	1.27	0.99	0.97	0.62	1.00

表 11　一次修正后的群体决策矩阵 $\boldsymbol{R}^{(1)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.32	1.11	0.91	1.94	0.57	0.99	0.60	0.64
x_2	2.09	1.19	0.69	1.01	0.66	0.78	0.85	0.73
x_3	1.07	1.42	0.71	1.07	0.95	0.87	0.88	0.78
x_4	1.10	1.29	0.94	1.66	0.97	0.94	0.87	0.76
x_5	1.43	1.15	0.91	1.33	0.87	0.96	0.54	1.00

Step 5　计算每一个标准化个体决策矩阵 $R_k^{(1)} = (r_{ijk}^{(1)})_{5\times 8}(k = 1, 2, 3)$ 与群体决策矩阵 $R^{(1)} = (r_{ij}^{(1)})_{5\times 8}$ 之间的相似度

$$S(R_1^{(1)}, R^{(1)}) = \frac{1}{d(R_1^{(1)}, R^{(1)})} = \frac{1}{1.087\,7} = 0.919\,4 < 0.95;$$

$$S(R_2^{(1)}, R^{(1)}) = \frac{1}{d(R_2^{(1)}, R^{(1)})} = \frac{1}{1.0693} = 0.9352 < 0.95;$$

$$S(R_3^{(1)}, R^{(1)}) = \frac{1}{d(R_3^{(1)}, R^{(1)})} = \frac{1}{1.1008} = 0.9084 < 0.95.$$

每一个个体决策矩阵与群体决策矩阵之间的相似度均小于预先设定的 α 值, 因此需要继续进行修正, 转Step 6.

Step 6 经过 7 次修正后得个体决策矩阵以及集结得到的群体决策矩阵分别如表 12~表 15 所示.

表 12 7 次修正后的个体决策矩阵 $R_1^{(7)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.36	1.06	0.95	1.97	0.65	0.99	0.58	0.75
x_2	2.68	1.18	0.66	1.01	0.64	0.79	0.87	0.70
x_3	1.12	1.29	0.79	1.09	0.91	0.87	0.94	0.78
x_4	1.05	1.34	0.97	1.69	0.98	0.94	0.82	0.82
x_5	1.41	1.08	0.89	1.33	0.81	0.97	0.59	1.00

表 13 7 次修正后的个体决策矩阵 $R_2^{(7)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.15	1.13	0.90	1.97	0.49	1.00	0.63	0.60
x_2	2.05	1.26	0.73	1.01	0.69	0.76	0.81	0.70
x_3	1.04	1.50	0.69	1.08	0.95	0.87	0.83	0.78
x_4	1.14	1.31	0.92	1.68	0.98	0.92	0.93	0.77
x_5	1.46	1.08	0.95	1.36	0.85	0.95	0.49	1.00

表 14 7 次修正后的个体决策矩阵 $R_3^{(7)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.61	1.13	0.91	1.88	0.66	0.99	0.56	0.66
x_2	1.84	1.10	0.64	1.03	0.61	0.82	0.89	0.80
x_3	1.11	1.38	0.71	1.03	0.97	0.89	0.94	0.78
x_4	1.05	1.22	0.97	1.63	0.93	0.97	0.80	0.72
x_5	1.38	1.35	0.86	1.30	0.93	0.96	0.58	1.00

表 15 7 次修正后的群体决策矩阵 $R^{(7)}$

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	G_8
x_1	1.32	1.11	0.91	1.94	0.57	0.99	0.60	0.64
x_2	2.09	1.19	0.69	1.01	0.66	0.78	0.85	0.73
x_3	1.07	1.42	0.71	1.07	0.95	0.87	0.88	0.78
x_4	1.10	1.29	0.94	1.66	0.97	0.94	0.87	0.76
x_5	1.43	1.15	0.91	1.33	0.87	0.96	0.54	1.00

计算每一个修正的个体决策矩阵 $R_k^{(7)} = (r_{ijk}^{(7)})_{5\times 8}(k=1, 2, 3)$ 与群体决策矩阵 $R^{(7)} = (r_{ij}^{(7)})_{5\times 8}$ 之间的相似度

$$S(R_1^{(7)}, R^{(7)}) = \frac{1}{d(R_1^{(7)}, R^{(7)})} = \frac{1}{1.0457} = 0.9563 > 0.95;$$

$$S(R_2^{(7)}, R^{(7)}) = \frac{1}{d(R_2^{(7)}, R^{(7)})} = \frac{1}{1.0363} = 0.9650 > 0.95;$$

$$S(R_3^{(7)}, R^{(7)}) = \frac{1}{d(R_3^{(7)}, R^{(7)})} = \frac{1}{1.0523} = 0.9503 > 0.95.$$

每一个个体决策矩阵与群体决策矩阵之间的相似度均大于预先设定的 α 值, 因此 l 的值为 7. $R^{(7)}$ 是意见一致的群体决策矩阵. 转Step 7.

Step 7 利用MWA算子 $r_i^{(7)} = \prod_{j=1}^{8}(r_{ij}^{(7)})^{w_j}$, 把 $R^{(7)} = (r_{ij}^{(7)})_{5\times 8}$ 第 i 行的元素进行集结, 得到方案 $x_i \in X(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 的综合属性值 $r_i^{(7)}(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 如下: $r_1^{(7)} = 0.9033$; $r_2^{(7)} = 0.8907$; $r_3^{(7)} = 0.9360$; $r_4^{(7)} = 1.0214$; $r_5^{(7)} = 0.9814$. 转Step 8.

Step 8 根据综合属性值 $r_i^{(7)}(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 对方案 $x_i \in X$ 进行排序, 得

$$x_4 \succ x_5 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_2.$$

因此最优候选方案是方案 x_4.

5 结 论

本文提出的迭代算法, 能完成个体意见的一致化, 不需要专家修改决策信息, 节约了时间, 并提高了工作效率. 在群体决策矩阵的基础上, 用乘性加权集结算子把方案的属性值进行集结, 得到方案的群体综合属性值, 从而选出最优方案. 空调系统选择问题的例子说明了算法的可行性和实用性.

参考文献(References)

[1] Xu Z S. An automatic approach to reaching consensus in multiple attribute group decision making[J].Computers Industrial Engineering, 2009, 56(4): 1369-1374.

[2] Xu Z S. Deviation measures of linguistic preference relations in group decision making[J]. Omega, 2005, 33(3): 249-254.

[3] Kacprzyk J, Fedrizzi M, Nurmi H. Group decision making and consensus under fuzzy preferences and fuzzy majority[J].Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49(10): 21-31.

[4] Herra-Viedma E, Martinez L, Mata F, Chichana F. A consensus support systems model for group decision making problems with multigranular linguistic preference relations[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2005, 13(5): 644-658.

[5] Ben-Arieh D, Chen Z F. Linguistic-labels aggregation and consensus measure for autocratic decision making using group recommendations[J]. IEEE Trans on Systems,Man and Cybernetics-Part A, 2006, 36(5): 558-568.

[6] Regan H M, Colyvan M, Markovchick-Nicholls L. A formal model for consensus and negotiation in environmental management[J]. J of Environmental Management, 2006, 80(2): 167-176.

(下转第1820页)