

文章编号: 1001-0920(2010)11-1698-05

基于容许集的变终端约束MPC控制

秦伟伟^{1,2}, 马建军¹, 郑志强¹, 刘刚²

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 长沙 410073; 2. 第二炮兵工程学院 自动控制系, 西安 710025)

摘要: 针对一类输入和状态受约束的离散线性系统, 提出一种基于 N 步容许集的变终端约束集模型预测控制方法. 首先给出多面体不变集序列作为终端约束集的离线模型预测控制算法, 扩大了终端约束集. 为进一步扩大初始状态可镇定区域, 引入 N 步容许集, 设计了基于容许集的变终端约束集模型预测控制方法. 该算法采用离线设计、在线优化方法, 实现了系统渐近稳定, 不仅降低了在线运算量, 而且扩大了初始状态可镇定区域. 仿真结果表明了算法的有效性.

关键词: 约束离散系统; N 步容许集; 多面体不变集; 模型预测控制

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Efficient varying terminal constraint set MPC based on admissible set

QIN Wei-wei^{1,2}, MA Jian-jun¹, ZHENG Zhi-qiang¹, LIU Gang²

(1. College of Machronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering Institution, Xi'an 710025, China.

Correspondent: QIN Wei-wei, E-mail: qww_1982@163.com)

Abstract: An efficient model predictive controller(MPC) with a time varying terminal constraint set based on N -step admissible set is developed for a discrete-time linear system with input and state constraints. Firstly, off-line MPC is designed for an LTI system with input and state constraints by constructing a continuum of polytopic invariant sets. The terminal constraint set is constructed by the union of these polytopic invariant sets, so this method enlarges the size of terminal constraint set effectively. In order to enlarge the size of allowable set of initial conditions, a synthesis approach of on-line and off-line MPC with N -step admissible set is presented. This algorithm not only dramatically reduces on-line computation but also significantly enlarges the size of the allowable set of initial conditions. The digital simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: Constrained discrete-time system; N -step admissible set; Polytopic invariant set; Model predictive control

1 引言

模型预测控制(MPC), 又称滚动时域控制(RHC), 广泛应用于约束系统^[1]. 在模型预测控制中, 渐近稳定正不变集是重要的研究方向, 也是一直以来研究的热点问题. 目前广泛采用的不变集有两种: 椭圆不变集和多面体不变集. 在二次Lyapunov函数的基础上, Kothare等^[2]提出了基于椭圆不变集的鲁棒模型预测控制算法. 针对采用固定的椭圆矩阵保守性大的问题, Cuzzola等^[3]提出了参数时变的渐近稳定椭圆集. 为了解决实时性问题, Wan等^[4,5]在文献[2]的基础上, 提出了离线预测控制算法, 大大降低了计算量. 与椭圆集相比, 多面体不仅更符合系统的多面体约束, 而

且具有更大的灵活性, 进而可能获得更大的初始状态允许集. 为此, Cannon等^[6,7]设计了基于多面体不变集的渐近稳定控制方法; Pluymers等^[8,9]扩展了基于反馈控制律的多面体不变集构造方法. 为进一步扩大初始状态允许集, 并降低在线计算量, 席裕庚等^[10]通过求解递减的性能指标上界优化问题, 提出了基于多面体不变集的离线控制方法. 为了扩大模型预测控制可控区域, Wan和Pluymers等^[11,4]提出了基于变时域和变化终端约束的MPC控制方法, 但该方法采用椭圆不变集作为终端约束集, 增加了算法的保守性; 另外由于在线优化的自由变量个数 N 无法事先获知, 降低了算法的可操作性.

收稿日期: 2009-09-16; 修回日期: 2009-11-22.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60675005).

作者简介: 秦伟伟(1982—), 男, 安徽淮北人, 博士生, 从事精确制导、模型预测控制的研究; 郑志强(1964—), 男, 湖南常德人, 教授, 博士生导师, 从事精确制导与控制、机器人等研究.

针对上述问题, 本文提出一种基于多步容许集的变终端约束模型预测控制器设计方法. 首先针对输入和状态约束线性时不变系统, 设计了基于多面体不变集的离线模型预测控制算法. 该方法以多面体不变集序列的并集作为终端约束集, 从而扩大了终端约束集. 为了进一步扩大系统初始状态可控区域, 通过引入 N 步容许集, 设计基于 N 步容许集的变终端约束集模型预测控制方法. 该算法将 N 步在线优化分解为 N 个单步优化, 从而降低了计算量, 实现了系统的渐近稳定.

2 问题描述

考虑一类约束离散线性时不变系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \quad (1)$$

其中: 状态变量 $x(k) \in \mathbf{R}^n$, 控制输入 $u(k) \in \mathbf{R}^m$. 输入和状态约束满足

$$u \in U \triangleq \{u | A_u u \leq \mathbf{1}\}, \quad (2)$$

$$x \in X \triangleq \{x | A_x x \leq \mathbf{1}\}. \quad (3)$$

其中: $U \subset \mathbf{R}^m$ 是紧集, $X \subset \mathbf{R}^n$ 是闭集, 且每个集合均包含原点; $\mathbf{1}$ 表示元素均为 1 的列向量, 且维数与式中矩阵相对应.

预测控制器设计目标是针对系统 (1), 在满足约束 (2) 和 (3) 的条件下设计控制器, 将系统状态驱动到原点, 并最小化性能指标

$$J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2 \right\}, \quad (4)$$

其中 Q_1 和 R 为正定加权矩阵. 文献 [2] 选择 Lyapunov 函数 $V(x) = x^T P x$, $P > 0$ 且满足不等式

$$V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) \leq - \left\{ \|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2 \right\}, \quad i \geq 0. \quad (5)$$

从而得到

$$J_\infty(k) \leq V(x(k)) \leq \gamma, \quad (6)$$

其中 γ 是性能指标的一个上界.

3 基于多面体不变集的离线 MPC

3.1 基于多面体不变集模型预测控制

首先介绍椭圆不变集的构造方法. 文献 [4] 中算法 1 给出了椭圆不变集序列构造方法. 该方法通过改变参数 r , 利用 LMI 在线优化性能指标上界 γ , 得到不同大小的椭圆集. 因此对参数 r 采用二元搜索, 可得到最大和最小椭圆不变集 Σ_l 和 Σ_s ; 及其优化参数 Q_l, P_l 和 Q_s, P_s ; 性能指标上界 γ_l 和 γ_s ; 以及状态反馈增益 K_l 和 K_s .

为了扩大初始状态容许集, 文献 [8,9] 介绍了基于状态反馈的多面体不变集控制方法. 该算法给出了在反馈控制律 K 下, 多面体不变集 S 的构造方法, 该

集合即为控制不变集. 基于此, 文献 [9] 中算法 5 和定理 3 进一步讨论了基于多面体不变集的 MPC 在线优化方法, 对不变集内部的状态进行优化, 得到新的控制增益, 从而实现基于多面体不变集的在线优化控制. 但是由于在线优化和多面体的运算量较大, 降低了算法的可操作性. 为此, 本文提出一种多面体不变集的离线 MPC 算法, 这是对文献 [10] 中多面体不变集构造方法的改进, 以期获得更大的不变集序列.

3.2 基于多面体不变集的离线 MPC

算法 1 (基于多面体不变集的离线 MPC)

对于离散系统 (1), 满足约束 (2) 和 (3), 设计基于多面体不变集的离线模型预测控制器.

1) 离线部分

Step 1: 依据文献 [4] 的椭圆集构造方法, 计算满足约束 (2) 和 (3) 的最大和最小椭圆不变集 Σ_l 和 Σ_s ; 及其对应的参数 Q_l, P_l 和 Q_s, P_s ; 性能指标上界 γ_l 和 γ_s ; 以及状态反馈增益 K_l 和 K_s .

Step 2: 计算状态反馈增益 K_l 和 K_s 对应的多面体不变集, 记为 S_l 和 S_s .

Step 3: 在不变集 S_l 和 S_s 之间的区域内, 选择 n 个逐渐收敛于原点的状态点 $(x_{1_2}, x_{2_2}), (x_{1_3}, x_{2_3}), \dots, (x_{1_{n+1}}, x_{2_{n+1}})$. 在文献 [9] 算法 5 中加入约束 $Q_i - \gamma_i Q_j \gamma_j^{-1} > 0 (2 \leq j \leq n+1, i = j-1)$ 进行优化, 确定不同状态点对应的状态反馈增益 K_2, \dots, K_{n+1} 和多面体不变集 S_2, \dots, S_{n+1} , 使 $\bigcup_{i=1}^{n+2} S_i$ 尽可能大, 从而得到初始状态允许集 $S = \bigcup_{i=1}^{n+2} S_i$ (控制不变集的并集仍是控制不变集 [13]).

2) 在线部分

Step 1: 给定初始状态 $x(0) \in S$.

Step 2: 当前时刻状态判断: 如果 $x(k) \in S$, 则查找包含该状态的最大下标多面体不变集 S_i , 并选择状态反馈增益 $K(k) \in K_i$ 作用于系统.

Step 3: 测量下一时刻的系统状态, 返回在线 Step 2.

注 1 与文献 [10] 的多面体不变集序列构造方法不同之处: 1) 本文方法在最大多面体不变集内部选择状态, 保证了状态点的有效性, 扩大了状态点的选择区域, 容易构造更大的终端约束集; 2) 在选择离散的状态点时, 可根据需要进行选择和调整, 使得不变集序列的构造简单、方便; 3) 本算法采用文献 [9] 中算法 5 对选定状态点进行优化, 可保证性能指标的最优性.

定理 1 对于系统 (1), 如果初始状态处于多面

体不变集序列 S 中, 则采用算法 1 设计的控制策略, 可保证闭环系统在满足输入和状态约束条件下渐近稳定.

证明 对于离散系统 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$, 初始状态 $x(0) \in S$. 假设 k 时刻系统状态 $x(k) \in S_i$, 由多面体不变集的性质可知, 采用控制律 $K(k) = K_i$ 构成的闭环系统渐近稳定, 因此 $x(k+1) = (A + BK_i)x(k) \in S_i$, 对应的 Lyapunov 函数满足 $V_i(x(k+1)) \leq V_i(x(k))$ (当系统状态处于原点时等号成立).

对于 $k+1$ 时刻系统状态 $x(k+1)$, 或者 $x(k+1) \in S_i$, $x(k+1) \notin S_j (i < j \leq n+1)$; 或者 $x(k+1) \in S_i$, $x(k+1) \in S_j (i < j \leq n+1)$. 如果 $x(k+1) \notin S_j$, 则采用控制律 $K(k) = K_i$ 构成闭环系统, 可保证 Lyapunov 函数 $V_i(x(k+1)) \leq V_i(x(k))$. 如果 $x(k+1) \in S_i$, $x(k+1) \in S_j$, 则 $x(k+1) \in S_j \cap S_i$. 因 $x(k+1) \in S_i$, 故 Lyapunov 函数满足 $V_i(x(k+1)) \leq V_i(x(k))$. 在 $k+1$ 时刻, $x(k+1) \in S_j$, 控制器切换到 $K(k+1) = K_j$, 使得 Lyapunov 函数 V_j 满足 $V_j(x(k+2)) \leq V_j(x(k+1))$. 因优化过程中存在约束 $Q_i \gamma_i^{-1} - Q_j \gamma_j^{-1} > 0$ 使得 $P_i > P_j$, 故

$$\begin{aligned} V_j(x(k+1) = x(k+1)^T P_j x(k+1)) &< \\ x(k+1)^T P_i x(k+1) &= V_i(x(k+1)). \end{aligned}$$

所以系统 Lyapunov 函数递减, 系统渐近稳定. \square

4 基于容许集的变终端约束 MPC 方法

上节讨论了基于多面体不变集的离线控制算法, 扩大了系统初始状态容许集. 只要系统状态属于该集合, 便可采用离线设计的控制增益实现系统渐近稳定. 但如果系统状态不属于该集合, 则上述算法可能无法实现有效控制. 为此, 借鉴文献 [11] 的变终端约束思想, 将多面体不变集序列作为终端约束集, 设计基于变终端约束集的双模 MPC 算法.

在双模预测控制中, 在线优化步数 N (优化的自由变量个数) 越大, 计算量越大. 因此对于给定状态, 总是期望 N 尽可能地小. 目前 N 的选择是普遍遇到的难题, 常用方法是基于经验多次尝试来确定. 为了解决 N 的选择问题, 本文引入多步容许集. 即以终端约束集为目标集, 计算多步容许集, 进而根据状态所处的位置确定在线优化步数 N .

首先介绍多步容许集的相关概念.

定义 1 (一步容许集)^[13] 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$. 如果满足输入和状态约束, 存在容许控制输入, 使得 $x(k+1) \in \Omega$, 则称 $\tilde{\Xi}(\Omega)$ 是集合 Ω 的一步容许集, 即

$$\tilde{\Xi}(\Omega) \triangleq \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : f(x(k), u(k)) \in \Omega\}. \quad (7)$$

定义 2 (N 步容许集)^[13] 对于离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega) \subset \mathbf{R}^n$. 如果在满足输入和状态约束的条件下, 存在容许控制输入 $u_i(k) (i = 0, 1, \dots, N-1)$, 使得 $x(k+N) \in \Omega$, 则称 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 是集合 Ω 的 N 步容许集, 即

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) \triangleq \{x(k) \in X | \exists u_i(k) \in U, i = 0, 1, \dots, N; x(k+N) \in \Omega\}. \quad (8)$$

下面给出 N 步容许集 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 的计算方法.

1) 若目标集 Ω 是凸多面体集, 则集合 Ω 的 N 步容许集 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$ 可采用下面算法计算:

Step 1: 令 $k = 0$, $X_0 = \{x_i : x_i \in \text{Vert}(\Omega)\}$.

Step 2: 经计算得到点集

$$\begin{aligned} Y = \{y_{ij} \in X : y_{ij} = A^{-1}x_i - A^{-1}Bu_j, \\ \forall x_i \in X_0, \forall u_j \in \text{Vert}(U)\}. \end{aligned}$$

Step 3: 凸包运算 $\text{Vert}(\text{conv}(Y))$, 令 $X_0 = \text{Vert}(\text{conv}(Y))$, 即

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}(\Omega) = \text{conv}\{y_{ij} \in X | \forall u_j \in \text{Vert}(U), \\ x_i \in \text{Vert}(\Omega) : y_{ij} = A^{-1}(x_i - Bu_j)\}. \end{aligned}$$

Step 4: 令 $k = k + 1$. 若 $k > N$, 则计算结束; 否则, 返回 Step 2 (Vert 表示多面体的顶点, conv 表示顶点凸组合).

2) 若终端约束集为凸多面体不变集的并集 $\Omega \triangleq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 则容许集的计算方法如下:

Ω 的一步容许集为

$$\tilde{\Xi}(\Omega) = \tilde{\Xi}\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}(\Omega_j); \quad (9)$$

Ω 的 N 步容许集为

$$\tilde{\Xi}_N(\Omega) = \tilde{\Xi}_N\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_N(\Omega_j). \quad (10)$$

基于多面体不变集 MPC 和终端约束集的 N 步容许集, 本文提出一种 MPC 综合算法.

算法 2 (基于容许集的变终端约束 MPC 控制)

对于离散系统 (1), 满足约束 (2) 和 (3), 设计模型预测控制器.

1) 离线部分

Step 1: 利用算法 1 计算多面体不变集序列 $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, 并计算终端约束集 $\Omega = \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$.

Step 2: 计算终端约束集 Ω 的 N 步容许集 $\tilde{\Xi}_N(\Omega)$.

2) 在线部分

Step 1: 给定系统初始状态 $x(0)$.

Step 2: 判断当前时刻状态 $x(k)$. 若 $x(k) \in \Omega =$

$\bigcup_{j=1}^M \Omega_j$, 则

$$u(k) = K_j x(k), j = \max\{j : x(k) \in \Omega_j\}.$$

若 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)$, $x(k) \notin \Omega$, $\ell = \min\{i : x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)\}$, 则

$$\min_{u(k)} J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2 + \|x(k+1)\|_{Q_f}^2. \quad (11a)$$

$$\text{s.t. } x(k) \in X, u(k) \in U; \quad (11b)$$

$$x(k+1) \in \tilde{\Xi}_{\ell-1}(\Omega); \quad (11c)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad (11d)$$

$$\text{if } \ell = 1, \text{ then } x(k+1) \in \Omega. \quad (11e)$$

Step 3: 将控制输入作用于系统, 并测量下一时刻状态, 返回在线 Step 2.

注 2 本算法通过计算 N 步容许集来判断系统状态达到终端约束集需要的优化步数, 并采用 N 个单步优化代替步数递减的 N 步优化, 以降低在线计算量.

注 3 式 (11a) 中 Q_f 的选择可参见文献 [14].

定理 2 (算法 2 稳定性定理) 对于离散系统 (1), 满足约束 (2) 和 (3), 采用算法 2 设计的模型预测控制器可以保证系统渐近稳定.

证明 根据算法 2 设计控制器并作用于系统. 假设 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)$. 若 $x(k) \in \Omega$, 则采用基于多面体不变集的 MPC, 实施增益调度策略, 保证了系统收敛于原点; 若 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N(\Omega)$, $x(k) \notin \Omega$, $\ell = \min\{i : x(k) \in \tilde{\Xi}_i(\Omega)\}$, 则以 $\tilde{\Xi}_{\ell-1}(\Omega)$ 为目标终端约束集进行一步在线优化.

由一步容许集性质可知, 必存在可行控制输入 $u(k) \in U$, 使得 $x(k+1) \in \tilde{\Xi}_{\ell-1}(\Omega)$. 若 $\ell = 1$, 则必存在可行控制输入 $u(k) \in U$, 使得 $x(k+1) \in \Omega$. 如果 $x(k+1) \in \Omega$, 则不变集控制策略可保证系统收敛. 因此本算法能够保证系统渐近稳定. \square

5 仿真算例

为了检验控制算法的有效性, 以下面离散双积分线性模型为例设计控制器:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

状态约束和输入约束满足

$$A_x = [0.1I \quad -0.1I]^T, A_u = [1 \quad -1]^T,$$

性能指标函数中的加权矩阵 $Q_1 = I, R = 1$.

依据算法 1 设计多面体终端约束集, 并将控制增益存入数据库以备调用; 然后计算终端约束集的 N 步容许集 ($N = 6$). 如图 1 所示, 虚线多面体区域代表多

面体终端约束集, 实线多面体区域为 6 步容许集. 很明显, N 步容许集大于终端约束集.

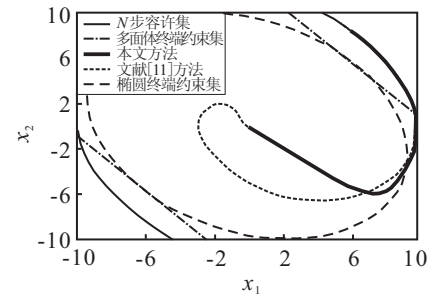


图 1 系统状态轨迹曲线

选择 N 步容许集的边界状态 $[5.5, 9]^T$ 为初始状态进行仿真验证, 结果如图 1~图 4 所示. 其中: 实线为本文方法得到的系统轨迹; 虚线为文献 [11] 方法得到的轨迹. 图 2 和图 3 表明, 系统的状态和输入均满足约束要求, 并最终收敛到原点. 图 4 表明, 本文方法优于文献 [11] 的方法.

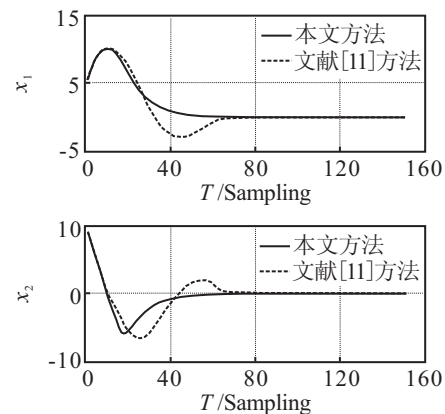


图 2 状态变量时间响应曲线

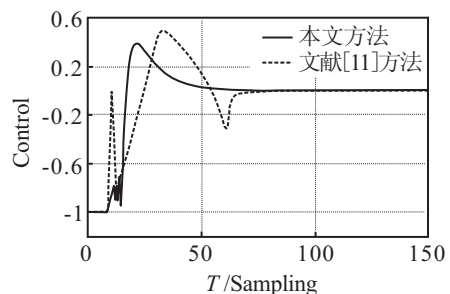


图 3 控制输入变化曲线

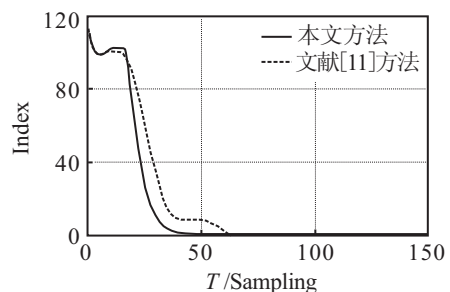


图 4 性能指标曲线

本文算法将 N 步在线优化分解为 N 个单步在线优化, 大大降低了计算量. 表 1 给出了在线优化的计算时间.

表 1 运算时间比较

Step	文献[11]方法		本文方法	
	N	时间/s	N	时间/s
1	8	1.9623	1	0.3976
2	7	1.3966	1	0.3664
3	6	1.1476	1	0.3290
4	5	0.9621	1	0.3028
5	4	0.8613	1	0.2779
6	3	0.7312	1	0.2830
7	2	0.6402	1	0.0013
8	1	0.5613	1	0.0015

由表 1 可知, 文献 [11] 方法需要 8 步在线控制才能达到终端约束集, 而本文算法只需 6 步. 另外, 在终端约束集 Ω 中直接调用离线设计好的反馈增益, 运算时间可以忽略, 因此大大降低了计算量, 达到了期望的目标.

6 结 论

针对一类输入和状态受约束的离散线性系统, 本文提出了一种基于容许集的变终端约束 MPC 设计方法. 首先设计了基于多面体不变集的离线 MPC 算法, 扩大了终端约束集. 为进一步扩大系统的初始状态可镇定区域, 引入 N 步容许集, 设计了基于容许集的变终端约束集 MPC 算法. 该算法不仅降低了 MPC 的在线运算量, 而且扩大了初始状态可镇定区域. 仿真结果表明了算法的合理性和有效性.

参考文献(References)

- [1] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(2): 789-814.
- [2] Kothare M V, Balakrishnan V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1361-1379.
- [3] Cuzzola F A, Geromel J C, Morari M. An improved approach for constrained robust model predictive control[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1183-1189.
- [4] Wan Zhaoyang, Kothare M V. Effective robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set[J]. *System & Control Letters*, 2003, 48(5): 375-383.
- [5] Wan Zhaoyang, Kothare M V. An effective off-line formulation of robust constrained model predictive control using LMI[J]. *Automatica*, 2003, 39(5): 827-846.
- [6] Cannon M, Deshmukh V, Kouvaritakis B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets[J]. *Automatica*, 2003, 39(8): 1487-1494.
- [7] Cannon M, Kouvaritakis B, Deshmukh V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance[J]. *Automatica*, 2004, 40(2): 311-317.
- [8] Pluymers B, Rossiter J A, Suykens J A K, et al. The effective computation of polyhedral invariant sets for linear system with polytopic uncertainty[C]. *Proc of American Control Conf. Portland*, 2005: 804-809.
- [9] Pluymers B, Suykens J A K, Kothare M V, et al. Robust synthesis of constrained linear state feedback using LMIs and polyhedral sets[C]. *Proc of American Control Conf. Minneapolis*, 2006: 881-886.
- [10] 席裕庚, 杨红林, 李德伟. 基于多面体不变集的离线鲁棒模型预测控制器综合[J]. *控制与决策*, 2009, 24(2): 302-307.
(Xi Y G, Yang H L, Li D W. Synthesis off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 302-307.)
- [11] Wan Zhaoyang, Pluymers B, Kothare M V, et al. Comments on: "Effective robust constrained model predictive control with a terminal constraint set" by Wan and Kothare[J]. *System & Control Letters*, 2006, 55(4): 618-621.
- [12] 于树友, 陈虹, 张鹏, 等. 一种基于 LMI 的非线性模型预测控制终端域优化方法[J]. *自动化学报*, 2008, 34(7): 798-804.
(Yu S Y, Chen H, Zhang P, et al. An LMI optimization approach for enlarging the terminal region of MPC for nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(7): 798-804.)
- [13] Eric C Kerrigan. Robust constraint satisfaction: Invariant sets and predictive control[D]. Cambridge: University of Cambridge, 2000.
- [14] 邹涛. 约束模型预测控制系统的分析与设计[D]. 上海: 上海交通大学, 2004: 83-85.
(Zou T. Analysis and design for constrained model predictive control system[D]. Shanghai: Shanghai Jiaotong University, 2004: 83-85.)