第 25 卷 第 9 期
Vol. 25 No. 9

控 制 与 决 策
Control and Decision

2010 年 9 月
Sep. 2010

文章编号: 1001-0920 (2010) 09-1369-05

基于覆盖的直觉模糊粗糙集

张植明[1a], 白云超[1b], 田景峰[2]

(1. 河北大学 a. 数学与计算机学院，b. 经济学院，河北 保定 071002；
2. 华北电力大学 科技学院，河北 保定 071051)

摘 要: 通过直觉模糊覆盖概念将覆盖粗糙集模型进行推广, 提出一种基于直觉模糊覆盖的直觉模糊粗糙集模型. 首先, 介绍了直觉模糊集、直觉模糊覆盖和直觉模糊逻辑算子等概念; 然后, 利用直觉模糊三角模和直觉模糊蕴涵, 构建两对基于直觉模糊覆盖的下直觉模糊粗糙近似算子和上直觉模糊粗糙近似算子; 最后, 给出了这些算子的基本性质并研究了它们之间的对偶性.

关键词: 粗糙集；直觉模糊集；直觉模糊逻辑算子；直觉模糊覆盖；直觉模糊粗糙集
中图分类号: TP181　　**文献标识码:** A

Intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy coverings

ZHANG Zhi-ming[1a], *BAI Yun-chao*[1b], *TIAN Jing-feng*[2]

(1a. College of Mathematics and Computer Sciences，1b. College of Economics，Hebei University，Baoding 071002, China；2. Science and Technology College，North China Electric Power University，Baoding 071051，China. Correspondent：ZHANG Zhi-ming，E-mail：zhangzm1978@yahoo.com.cn)

Abstract: Generalizations of covering-based rough set models are made by the concept of intuitionistic fuzzy coverings. The intuitionistic fuzzy rough set models based on intuitionistic fuzzy coverings are proposed. Firstly, the concepts of an intuitionistic fuzzy set, an intuitionistic fuzzy covering and intuitionistic fuzzy logical operators are introduced. Secondly, based on an intuitionistic fuzzy covering of a universe of discourse, two pairs of generalized lower and upper intuitionistic fuzzy rough approximation operators are constructed by means of an intuitionistic fuzzy triangular norm and an intuitionistic fuzzy implicator. Finally, basic properties of the generalized intuitionistic fuzzy rough approximation operators are investigated, and the duality between these approximation operators is examined.

Key words: Rough sets；Intuitionistic fuzzy sets；Intuitionistic fuzzy logical operators；Intuitionistic fuzzy coverings; Intuitionistic fuzzy rough sets

1 引 言

粗糙集理论是由Pawlak[1]提出的一种处理不精确、不确定和不完全数据的数学方法. 它已被成功应用于人工智能、模式识别、机器学习、数据挖掘和决策分析等众多领域. 在经典粗糙集理论中, 论域上的等价关系起着至关重要的作用. 然而, 在实际应用中, 等价关系是非常苛刻的条件, 论域上的二元关系经常不是等价的. 于是, 许多学者将粗糙集进行推广, 得到了许多拓展形式, 直觉模糊粗糙集模型[2-7]就是其中一种. Coker[2]首先揭示了直觉模糊集理论和粗糙集理论之间的关系, 证明模糊粗糙集实际上就是直觉 L-模糊集. 徐小来等[3]构建了基于直觉模糊剩余蕴涵和直觉模糊相似关系的直觉模糊粗糙集. Zhou等[4]利用直觉模糊三角模 $\mathcal{T}=\min$, 直觉模糊三角余模 $\mathcal{S}=\max$ 和标准直觉模糊逆算子 $\mathcal{N}$ 定义了直觉模糊粗糙近似算子. 进一步, Zhou等[5]利用更一般的直觉模糊逻辑算子构建了 $(\mathcal{I},\mathcal{T})$-直觉模糊粗糙集, 这种直觉模糊粗糙集模型是到目前为止所提出的最广泛的基于关系的直觉模糊粗糙集. 然而, 已有的这些直觉模糊粗糙集模型都是基于直觉模糊关系的. 本文利用直觉模糊逻辑算子提出了两对基于直觉模糊覆盖的直觉模糊粗糙近似算子, 并讨论了它们的一些性质和对偶性. 所得结果拓展了直觉模糊粗糙集理论, 为直觉模糊粗糙集的更广泛应用奠定了基础.

收稿日期: 2009-08-27；**修回日期:** 2009-10-22.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60773062)；教育部科学技术研究重点项目(206012)；河北省自然科学基金项目(2008000633)；河北省教育厅科研计划重点项目(2005001D).
作者简介: 张植明(1978−), 男, 河北黄骅人, 讲师, 硕士, 从事不确定信息处理、粗糙集理论等研究；白云超(1977−), 女, 河北丰宁人, 讲师, 硕士, 从事模糊统计与决策分析等研究.

2 预备知识

2.1 直觉模糊集

定义 1[8] 设 U 是一个非空集合, U 上的一个直觉模糊集 A 具有如下形式:

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle | x \in U\}.$$

其中: $\mu_A : U \to [0,1], \nu_A : U \to [0,1]$, 且满足条件 $0 \leqslant \mu_A(x) + \nu_A(x) \leqslant 1, \forall x \in U$. 这里 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别表示 U 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度. 本文用 $\mathrm{IF}(U)$ 表示 U 上直觉模糊集的全体.

定义 2[8] 设 $A, B \in \mathrm{IF}(U)$, 定义运算如下:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \nu_A(x) \geqslant \nu_B(x), \forall x \in U$;

$A \supseteq B \Leftrightarrow B \subseteq A$;

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B, B \subseteq A$;

$A \cap B = \{\langle x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)\rangle\}$;

$A \cup B = \{\langle x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)\rangle\}$.

定义 3[8] 设 U 是一个非空论域, 定义在直积空间 $U \times U$ 上的直觉模糊子集称为 U 上的二元直觉模糊关系, 记为

$$R = \{\langle (x,y), \mu_R(x,y), \nu_R(x,y)\rangle | (x,y) \in U \times U\}.$$

其中: $\mu_R : U \times U \to [0,1], \nu_R : U \times U \to [0,1]$, 且满足 $0 \leqslant \mu_R(x,y) + \nu_R(x,y) \leqslant 1, \forall (x,y) \in U \times U$.

本文用 $\mathrm{IF}(U \times U)$ 表示 U 上直觉模糊子集的全体.

2.2 直觉模糊逻辑算子

定义 4[9] 设 $L = \{(\alpha,\beta) | \alpha \in [0,1], \beta \in [0,1], \alpha + \beta \leqslant 1\}$, 在 L 上定义如下关系 $\leqslant_L$:

$$\forall (\alpha,\beta), (\xi,\eta) \in L, (\alpha,\beta) \leqslant_L (\xi,\eta) \Leftrightarrow \alpha \leqslant \xi, \beta \geqslant \eta.$$

可以看出, $(L, \leqslant_L)$ 是一个完备格, 最小的元素是 $0_L = (0,1)$, 最大的元素是 $1_L = (1,0)$.

$\forall (\alpha,\beta), (\xi,\eta) \in L$, 定义

$(\alpha,\beta) \wedge (\xi,\eta) = \{\min(\alpha,\xi), \max(\beta,\eta)\}$,

$(\alpha,\beta) \vee (\xi,\eta) = \{\max(\alpha,\xi), \min(\beta,\eta)\}$.

定义 5[9] 如果 $\mathcal{N} : L \to L$ 是一个递减的映射, 且满足 $\mathcal{N}(0_L) = 1_L$ 和 $\mathcal{N}(1_L) = 0_L$, 则称 $\mathcal{N}$ 是一个直觉模糊逆算子. 特别地, 假如对于任意的 $x \in L$, $\mathcal{N}(\mathcal{N}(x)) = x$, 则称 $\mathcal{N}$ 为对合的直觉模糊逆算子.

定义 6[9] 如果 $\mathcal{T} : L \times L \to L$ 是一个递增、可交换、可结合的映射, 并且满足 $\mathcal{T}(1_L, x) = x, \forall x \in L$, 则称 $\mathcal{T}$ 是一个直觉模糊三角模或简称为直觉模糊 T 模.

定义 7[9] 如果 $\mathcal{S} : L \times L \to L$ 是一个递增、可交换、可结合的映射, 且满足 $\mathcal{S}(0_L, x) = x, \forall x \in L$, 则称 $\mathcal{S}$ 是一个直觉模糊三角余模或简称直觉模糊 T 余模.

定义 8[9] 如果

$$\mathcal{T}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) = \mathcal{N}(\mathcal{S}(x,y)),$$

$$\mathcal{S}(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)) = \mathcal{N}(\mathcal{T}(x,y)),$$

$$\forall x, y \in L.$$

则称直觉模糊 T 模 $\mathcal{T}$ 和直觉模糊 T 余模 $\mathcal{S}$ 关于 $\mathcal{N}$ 对偶.

定义 9[9] 如果映射 $\mathcal{I} : L \times L \to L$ 关于第 1 个变元递减, 关于第 2 个变元递增, 并且满足边界条件 $\mathcal{I}(0_L, 0_L) = 1_L, \mathcal{I}(1_L, 0_L) = 0_L, \mathcal{I}(0_L, 1_L) = 1_L, \mathcal{I}(1_L, 1_L) = 1_L$, 则称 $\mathcal{I}$ 是定义在 L 上的直觉模糊蕴涵.

定义 10[9] 设 $\mathcal{S}$ 是一个定义在 L 上的直觉模糊 T 余模, $\mathcal{N}$ 是一个直觉模糊逆算子, 则称 $\mathcal{I}_{\mathcal{S},\mathcal{N}}(x,y) = \mathcal{S}(\mathcal{N}(x), y)$ 是由 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{N}$ 生成的直觉模糊 S-蕴涵.

定义 11[9] 设 $\mathcal{T}$ 是一个定义在 L 上的直觉模糊 T 模, 则称 $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(x,y) = \sup\{\gamma \in L | \mathcal{T}(x,\gamma) \leqslant_L y\}, \forall x, y \in L$ 是由 $\mathcal{T}$ 生成的直觉模糊 R-蕴涵.

假设 $\mathcal{N}$ 是一个直觉模糊逆算子, $\mathcal{T}$ 是一个直觉模糊 T 模, $\mathcal{S}$ 是一个直觉模糊 T 余模, $\mathcal{I}$ 是定义在 L 上的直觉模糊蕴涵, 定义如下直觉模糊集:

1) $(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))(x) = \mathcal{N}(A(x)), \forall x \in U$;

2) $\left(A \bigcap_{\mathcal{T}} B\right)(x) = \mathcal{T}(A(x), B(x)), \forall x \in U$;

3) $\left(A \bigcup_{\mathcal{S}} B\right)(x) = \mathcal{S}(A(x), B(x)), \forall x \in U$;

4) $(A \to_{\mathcal{I}} B)(x) = \mathcal{I}(A(x), B(x)), \forall x \in U$.

引理 1[9] 假设 $\mathcal{T}$ 是连续的直觉模糊 T 模, $\mathcal{I}$ 是由 $\mathcal{T}$ 生成的直觉模糊 R-蕴涵, $\mathcal{N}$ 是由 $\mathcal{I}$ 诱导的直觉模糊逆算子, 即 $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{I}(\alpha, 0_L)$. I 是任意指标集, 对于任意的 $a, b \in L, a_i, b_i \in L, i \in I$, 即

1) $\mathcal{T}(\alpha, 0_L) = 0_L, \mathcal{T}(a,b) \leqslant_L b$;

2) $\mathcal{T}(a, \mathcal{I}(a,b)) \leqslant_L b, b \leqslant_L \mathcal{I}(a, \mathcal{T}(a,b)), a \leqslant_L \mathcal{I}(\mathcal{I}(a,b), b)$;

3) $a \leqslant_L b \Leftrightarrow \mathcal{I}(a,b) = 1_L$;

4) $\mathcal{I}(1_L, a) = a$;

5) $\mathcal{I}(\mathcal{T}(a,b), c) = \mathcal{I}(a, \mathcal{I}(b,c))$;

6) $\mathcal{T}(a, \mathcal{I}(b,c)) \leqslant_L \mathcal{I}(\mathcal{I}(a,b), c)$;

7) $a \leqslant_L \mathcal{N}(\mathcal{N}(a))$;

8) $\mathcal{N}\Big(\bigvee_{i \in I} a_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{N}(a_i)$;

9) $\mathcal{T}\Big(a, \bigvee_{i \in I} b_i\Big) = \bigvee_{i \in I} \mathcal{T}(a, b_i)$;

10) $\mathcal{I}\Big(a, \bigwedge_{i \in I} b_i\Big) = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{I}(a, b_i)$;

11) $\mathcal{I}\Big(\bigvee_{i \in I} a_i, b\Big) = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{I}(a_i, b)$;

12) $\bigvee_{i \in I} \mathcal{I}(a_i, b) \leqslant_L \mathcal{I}\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i, b\Big)$;

13) $\bigvee_{i \in I} \mathcal{I}(a_i, b_i) \leqslant_L \mathcal{I}\Big(\bigwedge_{i \in I} a_i, \bigvee_{i \in I} b_i\Big)$.

定义 12　设 $\mathcal{C}$ 是非空论域 U 上一些直觉模糊子集构成的集类. 如果 $\cup\mathcal{C} = \cup\{C : C \in \mathcal{C}\} = U$, 则称 $\mathcal{C}$ 是 U 的直觉模糊覆盖. 如果 $\mathcal{C}$ 是 U 的直觉模糊覆盖, 并且对于任意 $C \in \mathcal{C}$, 在 U 中至少存在一个 x 使得 $C(x) = 1_L$, 则称 $\mathcal{C}$ 是正则的.

3　直觉模糊粗糙集

3.1　基于直觉模糊关系的直觉模糊粗糙集

下面介绍 Zhou 等[5]提出的 $(\mathcal{I},\mathcal{T})$-直觉模糊粗糙集模型.

定义 13　设 R 是论域 U 的直觉模糊关系, 称二元组 (U,R) 是一个直觉模糊近似空间. 假设 $\mathcal{T}$ 是 L 上连续直觉模糊 T 模, $\mathcal{I}$ 是定义在 L 上的直觉模糊蕴涵, 对于任意的 $A \in \mathrm{IF}(U)$, A 关于近似空间 (U,R) 的 $\mathcal{T}$-上近似和 $\mathcal{I}$-下近似是定义在 U 上的一对直觉模糊集, 其中

$$\overline{R}^{\mathcal{T}}(A)(x) = \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(R(x,y), A(y)),$$

$$\underline{R}_{\mathcal{I}}(A)(x) = \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(R(x,y), A(y)), \forall x \in U.$$

3.2　基于直觉模糊覆盖的直觉模糊粗糙集

定义 14　假设 $\mathcal{C}$ 是 U 的一个直觉模糊覆盖, 称二元组 $(U,\mathcal{C})$ 是一个推广的直觉模糊近似空间. 设 $\mathcal{T}$, $\mathcal{I}$ 分别是定义在 L 上的连续直觉模糊 T 模和直觉模糊蕴涵. 下面定义两对近似算子:

$$\underline{\mathcal{C}}'(A)(x) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(y), A(y))\Big),$$

$$\overline{\mathcal{C}}'(A)(x) = \bigwedge_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{I}\Big(C(x), \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(C(y), A(y))\Big),$$

$$\underline{\mathcal{C}}''(A)(x) = \bigwedge_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{I}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(y), A(y))\Big),$$

$$\overline{\mathcal{C}}''(A)(x) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(C(y), A(y))\Big),$$

$\forall A \in \mathrm{IF}(U), x \in U.$

算子 $\underline{\mathcal{C}}'$, $\overline{\mathcal{C}}'$, $\underline{\mathcal{C}}''$ 和 $\overline{\mathcal{C}}''$ 分别称为 $\mathcal{TI}$-下, $\mathcal{IT}$-上, $\mathcal{II}$-下和 $\mathcal{TT}$-上直觉模糊粗糙近似算子. 直觉模糊集 $\underline{\mathcal{C}}'(A)$, $\overline{\mathcal{C}}'(A)$, $\underline{\mathcal{C}}''(A)$ 和 $\overline{\mathcal{C}}''(A)$ 分别称为 A 关于 $(U,\mathcal{C})$ 的 $\mathcal{TI}$-下, $\mathcal{IT}$-上, $\mathcal{II}$-下和 $\mathcal{TT}$-上直觉模糊粗糙近似.

由此可以看出: 1) 如果 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{I}$ 分别是 $[0,1]$ 上的模糊三角模和模糊蕴涵, $\mathcal{C}$ 是 U 的模糊覆盖, 则定义 14 退化成 Li 等[10]提出的模糊粗糙集. 2) 假如 $\mathcal{C}$ 是 U 的普通划分, $\mathcal{T} = \min$, $\mathcal{I} = \max(1-a,b)$, 则 $\underline{\mathcal{C}}'$ 和 $\overline{\mathcal{C}}'$, $\underline{\mathcal{C}}''$ 和 $\overline{\mathcal{C}}''$ 分别为经典粗糙近似算子[1]. 3) 本文用 $\{Ry : y \in U\}$ 表示 U 中所有元素关于模糊关系 R 的 R-前缀所构成的集合. 假如在定义 14 中用 $\{Ry : y \in U\}$ 来替换 $\mathcal{C}$, 则定义 14 退化成 Cock 等[11]定义的近似算子. 4) 假如 $\mathcal{C}$ 是 U 的一个普通覆盖, $\mathcal{T} = \min$, $\mathcal{I} = \max(1-a,b)$, 则 $\underline{\mathcal{C}}'$ 退化成 Zhu 等[12]定义的覆盖下近似算子, $\overline{\mathcal{C}}''$ 退化成 Zhu 等[12]定义的第 2 种类型的覆盖上近似算子.

例 1　设论域 $U = \{a,b,c\}$,

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2\} = \{\{\langle a,0.4,0.1\rangle, \langle b,0.7,0.2\rangle, \langle c,1,0\rangle\}, \{\langle a,1,0\rangle, \langle b,1,0\rangle, \langle c,0.8,0.1\rangle\}\},$$

则 $(U,\mathcal{C})$ 为一个推广的直觉模糊近似空间. 令

$$A = \{\langle a,0.3,0.2\rangle, \langle b,0.4,0.5\rangle, \langle c,0.6,0.1\rangle\},$$

$$\mathcal{T}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (\max(0, x_1+y_1-1), \min(1, x_2+y_2)),$$

$$\mathcal{I}_{\mathcal{T}}((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (\min(1, 1+y_1-x_1, 1+x_2-y_2), \max(0, y_2-x_2)).$$

根据定义 14, 计算可得

$$\underline{\mathcal{C}}'(A) = \{\langle a,0.3,0.4\rangle, \langle b,0.3,0.5\rangle, \langle c,0.6,0.3\rangle\},$$

$$\overline{\mathcal{C}}'(A) = \{\langle a,0.4,0.2\rangle, \langle b,0.4,0.2\rangle, \langle c,0.6,0.1\rangle\},$$

$$\underline{\mathcal{C}}''(A) = \{\langle a,0.3,0.5\rangle, \langle b,0.3,0.5\rangle, \langle c,0.5,0.4\rangle\},$$

$$\overline{\mathcal{C}}''(A) = \{\langle a,0.4,0.2\rangle, \langle b,0.4,0.2\rangle, \langle c,0.6,0.1\rangle\}.$$

下面讨论如无特殊说明, 均假定 $\mathcal{T}$ 是连续直觉模糊 T 模, $\mathcal{I}$ 是由 $\mathcal{T}$ 生成的直觉模糊 R-蕴涵.

4　基于覆盖的直觉模糊粗糙近似算子的性质

4.1　$\mathcal{TI}$-下和 $\mathcal{IT}$-上近似算子的性质

定理 1　对于算子 $\underline{\mathcal{C}}'$ 和 $\overline{\mathcal{C}}'$, $\forall A, B \in \mathrm{IF}(U)$, $\forall(\alpha,\beta) \in L$, 有以下性质成立:

1) $\underline{\mathcal{C}}'(U) = \overline{\mathcal{C}}'(U) = U, \underline{\mathcal{C}}'(\varnothing) = \overline{\mathcal{C}}'(\varnothing) = \varnothing$;

2) $\underline{\mathcal{C}}'(\overline{(\alpha,\beta)}) \supseteq \overline{(\alpha,\beta)}, \overline{\mathcal{C}}'(\overline{(\alpha,\beta)}) \subseteq \overline{(\alpha,\beta)}$, 如果 $\mathcal{C}$ 是正则的, 则有 $\underline{\mathcal{C}}'(\overline{(\alpha,\beta)}) = \overline{\mathcal{C}}'(\overline{(\alpha,\beta)}) = \overline{(\alpha,\beta)}$;

3) $\forall\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, \underline{\mathcal{C}}'(\cup\mathcal{D}) = \cup\mathcal{D}$;

4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\mathcal{C}}'(A) \subseteq \underline{\mathcal{C}}'(B), \overline{\mathcal{C}}'(A) \subseteq \overline{\mathcal{C}}'(B)$;

5) $\underline{\mathcal{C}}'(A) \subseteq A, A \subseteq \overline{\mathcal{C}}'(A)$;

6) $\underline{\mathcal{C}}'(\underline{\mathcal{C}}'(A)) = \underline{\mathcal{C}}'(A), \overline{\mathcal{C}}'(\overline{\mathcal{C}}'(A)) = \overline{\mathcal{C}}'(A)$.

证明　由于定理中 1), 2) 和 4) 容易得证, 本文仅证明性质 3), 5) 和 6).

对于性质 3), $\forall\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, x \in U$, 有

$$\underline{\mathcal{C}}'(\cup\mathcal{D})(x) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(y), (\cup\mathcal{D})(y))\Big) \geqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{D}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(y), (\cup\mathcal{D})(y))\Big) = \bigvee_{C\in\mathcal{D}} \mathcal{T}(C(x), 1_L) = (\cup\mathcal{D})(x).$$

因而, $\cup\mathcal{D} \subseteq \underline{\mathcal{C}}'(\cup\mathcal{D})$. 结合性质 5)可得 $\underline{\mathcal{C}}'(\cup\mathcal{D}) = \cup\mathcal{D}$.

对于性质 5), $\forall A \in \mathrm{IF}(U), x \in U$, 有

$\underline{\mathcal{C}}'(A)(x) \leqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(C(x), \mathcal{I}(C(x), A(x))) \leqslant_L A(x)$,

$\overline{\mathcal{C}}'(A)(x) \geqslant_L \bigwedge_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{I}(C(x), \mathcal{T}(C(x), A(x))) \geqslant_L A(x)$;

对于性质6), $\forall A \in \mathrm{IF}(U), x \in U$, 有

$$\underline{\mathcal{C}}'(\underline{\mathcal{C}}'(A))(x) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(y), \underline{\mathcal{C}}'(A)(y))\Big) \geqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{z\in U} \mathcal{I}(C(z), A(z))\Big) = \underline{\mathcal{C}}'(A)(x).$$

因而, $\underline{\mathcal{C}}'(A) \subseteq \underline{\mathcal{C}}'(\underline{\mathcal{C}}'(A))$. 结合性质5)可得$\underline{\mathcal{C}}'(A) = \underline{\mathcal{C}}'(\underline{\mathcal{C}}'(A))$. 另外一个等式同理可证. □

4.2 $\mathcal{II}$-下和$\mathcal{TT}$-上近似算子的性质

设$(U,\mathcal{C})$为一个推广的直觉模糊近似空间. 对于直觉模糊覆盖$\mathcal{C}$, 本文定义U上的一个直觉模糊相容关系(即满足自反性和对称性的关系)为

$$R_{\mathcal{C}}(x,y) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(C(x), C(y)), \forall x, y \in U.$$

定理 2 设$(U,\mathcal{C})$为一个推广的直觉模糊近似空间, 则有$\underline{\mathcal{C}}'' = \underline{R}_{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}}, \overline{\mathcal{C}}'' = \overline{R}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}$.

证明 对于$\forall A \in \mathrm{IF}(U), x \in U$, 有

$$\underline{\mathcal{C}}''(A)(x) = \bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(C(x), \mathcal{I}(C(y), A(y))) = \bigwedge_{y\in U}\bigwedge_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{I}(\mathcal{T}(C(x), C(y)), A(y)) = \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(C(x), C(y)), A(y)\Big) = \bigwedge_{y\in U} \mathcal{I}(R_{\mathcal{C}}(x,y), A(y)) = \underline{R}_{\mathcal{C}_{\mathcal{I}}}(A)(x).$$

$$\overline{\mathcal{C}}''(A)(x) = \bigvee_{C\in\mathcal{C}}\bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(C(x), \mathcal{T}(C(y), A(y))) = \bigvee_{y\in U}\bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(\mathcal{T}(C(x), C(y)), A(y)) = \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(C(x), C(y)), A(y)\Big) = \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(R_{\mathcal{C}}(x,y), A(y)) = \overline{R}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}(A)(x).$$ □

定理 3 对于算子$\underline{\mathcal{C}}''$和$\overline{\mathcal{C}}''$, $\forall A, B, A_i \in \mathrm{IF}(U)$, $i \in I$, $\forall(\alpha,\beta) \in L$, $\forall x, y \in U$, 有以下性质成立:

1) $\underline{\mathcal{C}}''(U) = \overline{\mathcal{C}}''(U) = U, \underline{\mathcal{C}}''(\varnothing) = \overline{\mathcal{C}}''(\varnothing) = \varnothing$;

2) $\underline{\mathcal{C}}''(\overline{(\alpha,\beta)}) = \overline{\mathcal{C}}''(\overline{(\alpha,\beta)}) = \overline{(\alpha,\beta)}$;

3) $\overline{\mathcal{C}}''\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \overline{\mathcal{C}}''(A_i)$, $\underline{\mathcal{C}}''\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcap_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}''(A_i)$;

4) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{\mathcal{C}}''(A) \subseteq \underline{\mathcal{C}}''(B), \overline{\mathcal{C}}''(A) \subseteq \overline{\mathcal{C}}''(B)$;

5) $\underline{\mathcal{C}}''(A) \subseteq A, A \subseteq \overline{\mathcal{C}}''(A)$;

6) $\overline{\mathcal{C}}''(\underline{\mathcal{C}}''(A)) \subseteq A, A \subseteq \underline{\mathcal{C}}''(\overline{\mathcal{C}}''(A))$;

7) $\overline{\mathcal{C}}''(1_x)(y) = \overline{\mathcal{C}}''(1_y)(x)$, $\underline{\mathcal{C}}''(1_x \to_{\mathcal{I}} \overline{(\alpha,\beta)})(y) = \underline{\mathcal{C}}''(1_y \to_{\mathcal{I}} \overline{(\alpha,\beta)})(x)$;

8) $\underline{\mathcal{C}}''\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \supseteq \bigcup_{i\in I} \underline{\mathcal{C}}''(A_i)$, $\overline{\mathcal{C}}''\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subseteq \bigcap_{i\in I} \overline{\mathcal{C}}''(A_i)$;

9) $\underline{\mathcal{C}}''(\overline{(\alpha,\beta)} \to_{\mathcal{I}} A) = \overline{(\alpha,\beta)} \to_{\mathcal{I}} \underline{\mathcal{C}}''(A)$, $\overline{\mathcal{C}}''\Big(\overline{(\alpha,\beta)} \bigcap_{\mathcal{I}} A\Big) = \overline{(\alpha,\beta)} \bigcap_{\mathcal{I}} \overline{\mathcal{C}}''(A)$.

证明 对于性质1), $\underline{\mathcal{C}}''(U) = U$和$\overline{\mathcal{C}}''(\varnothing) = \varnothing$来自文献[5]中的定理6 (IFL4)和定理4 (IFU4); $\overline{\mathcal{C}}''(U) = U$和$\underline{\mathcal{C}}''(\varnothing) = \varnothing$来自性质5).

性质2)来自性质5), 定理2, 文献[5]中的定理6 (IFL3)和定理4 (IFU3).

性质3)来自定理2, 文献[5]中的定理6 (IFL2)和定理4 (IFU2).

性质4)来自定理2, 文献[5]中的定理6 (IFL7)和定理4 (IFU7).

性质5)来自定理2, 文献[5]中的定理8和定理5中的性质2).

对于性质6), 本文仅证明$\overline{\mathcal{C}}''(\underline{\mathcal{C}}''(A)) \subseteq A$. 另一个同理可证.

$$\overline{\mathcal{C}}''(\underline{\mathcal{C}}''(A))(x) \leqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}\Big(C(y), \mathcal{I}\Big(C(y), \bigwedge_{z\in U} \mathcal{I}(C(z), A(z))\Big)\Big)\Big) \leqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}\Big(C(x), \bigvee_{y\in U} \mathcal{T}(C(y), \mathcal{I}(C(y), \mathcal{I}(C(x), A(x))))\Big) \leqslant_L \bigvee_{C\in\mathcal{C}} \mathcal{T}(C(x), \mathcal{I}(C(x), A(x))) \leqslant_L A(x).$$

性质7)来自定理2, 文献[5]中的定理9和定理5中的性质3).

性质8)来自定理2, 文献[5]中的定理6 (IFL6)和定理4 (IFU6).

性质9)来自定理2, 文献[5]中的定理6 (IFL1)和定理4 (IFU1). □

4.3 基于覆盖的直觉模糊粗糙近似算子的对偶性

定理 4 设$(U,\mathcal{C})$是一个推广的直觉模糊近似空间, $\mathcal{T}$是L上连续的直觉模糊T模, $\mathcal{I}$是由直觉模糊T余模$\mathcal{S}$和对合直觉模糊逆算子$\mathcal{N}$生成的直觉模糊S-蕴涵, $\mathcal{T}$和$\mathcal{S}$关于$\mathcal{N}$对偶, 则对于$\forall A \in \mathrm{IF}(U)$, 有

$$\underline{\mathcal{C}}'(A) = \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\overline{\mathcal{C}}'(A) = \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\underline{\mathcal{C}}''(A) = \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}''(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\overline{\mathcal{C}}''(A) = \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}''(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))).$$

证明　对于$\forall x\in U$, 有

$$\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))(x)=$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{S}\Big(\mathcal{N}(C(x)),\bigvee_{y\in U}\mathcal{T}(C(y),\mathcal{N}(A(y)))\Big)=$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{N}\Big(\mathcal{T}\Big(C(x),\mathcal{N}\Big(\bigvee_{y\in U}\mathcal{T}(C(y),\mathcal{N}(A(y)))\Big)\Big)\Big)=$$
$$\mathcal{N}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{N}(\mathcal{T}(C(y),\mathcal{N}(A(y))))\Big)\Big)=$$
$$\mathcal{N}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{S}(\mathcal{N}(C(y),A(y)))\Big)\Big)=$$
$$\mathcal{N}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{I}(C(y),A(y))\Big)\Big)=$$
$$(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}'(A)))(x).$$

由于$\mathcal{N}$是一个对合的直觉模糊逆算子, 有$\underline{\mathcal{C}}'(A)=\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A)))$. 其他等式同理可证. □

定理 5　设$(U,\mathcal{C})$是一个推广的直觉模糊近似空间, $\mathcal{I}$是由连续直觉模糊T模$\mathcal{T}$生成的直觉模糊R-蕴涵, $\mathcal{N}$是由$\mathcal{I}$诱导的直觉模糊逆算子, 则对于$\forall A\in \mathrm{IF}(U)$, 有

$$\underline{\mathcal{C}}'(A)\subseteq \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\overline{\mathcal{C}}'(A)\subseteq \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\underline{\mathcal{C}}''(A)\subseteq \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}''(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))),$$
$$\overline{\mathcal{C}}''(A)\subseteq \mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}''(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))).$$

证明　对于$\forall x\in U$, 有

$$\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))(x)=$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{I}\Big(C(x),\bigvee_{y\in U}\mathcal{T}(C(y),\mathcal{I}(A(y),0_L))\Big)\leqslant_L$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{I}\Big(C(x),\bigvee_{y\in U}\mathcal{I}(\mathcal{I}(C(y),A(y)),0_L)\Big)\leqslant_L$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{I}\Big(C(x),\mathcal{I}\Big(\bigwedge_{y\in U}\mathcal{I}(C(y),A(y)),0_L\Big)\Big)=$$
$$\bigwedge_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{I}\Big(\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{I}(C(y),A(y))\Big),0_L\Big)=$$
$$\mathcal{I}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{I}(C(y),A(y))\Big),0_L\Big)=$$
$$\mathcal{N}\Big(\bigvee_{C\in\mathcal{C}}\mathcal{T}\Big(C(x),\bigwedge_{y\in U}\mathcal{I}(C(y),A(y))\Big)\Big)=$$
$$(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}'(A)))(x).$$

根据引理 1 中的性质 7) 和$\mathcal{N}$的单调性, 可得

$$(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\overline{\mathcal{C}}'(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(A))))(x)\geqslant_L$$
$$(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\mathrm{co}_{\mathcal{N}}(\underline{\mathcal{C}}'(A))))(x)\geqslant_L \underline{\mathcal{C}}'(A)(x).$$

其他式子同理可证. □

5　结　论

本文利用直觉模糊覆盖、直觉模糊三角模和直觉模糊蕴涵定义了两种推广的直觉模糊粗糙集, 并推导出一些性质. 可以看出, Pawlak 经典粗糙集、覆盖粗糙集、基于模糊覆盖的模糊粗糙集都是该模型的特殊情况. 下一步将研究新提出的直觉模糊粗糙集和已有的直觉模糊粗糙集之间的关系及其在实际问题中的应用.

参考文献(References)

[1] Pawlak Z. Rough set[J]. Int J of Computer and Information Science, 1982, 11(5): 341-356.

[2] Coker D. Fuzzy rough sets are intuitionistic L-fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96(3): 381-383.

[3] 徐小来, 雷英杰, 谭巧英. 基于直觉模糊三角模的直觉模糊粗糙集[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 900-904.
(Xu X L, Lei Y J, Tan Q Y. Intuitionistic fuzzy rough sets based on triangle norm[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 900-904.)

[4] Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465.

[5] Zhou L, Wu W Z, Zhang W X. On characterization of intuitionistic fuzzy rough sets based on intuitionistic fuzzy implicators[J]. Information Sciences, 2009, 179(7): 883-898.

[6] Cornelis C, Cock M D, Kerre E E. Intuitionistic fuzzy rough sets: At the crossroads of imperfect knowledge[J]. Expert Systems, 2003, 20(5): 260-270.

[7] 路艳丽, 雷英杰, 华继学. 基于直觉模糊粗糙集的属性约简[J]. 控制与决策, 2009, 24(3): 335-341.
(Lu Y L, Lei Y J, Hua J X. Attribute reduction based on intuitionistic fuzzy set[J]. Control and Decision, 2009, 24(3): 335-341.)

[8] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[9] Cornelis C, Deschrijver G, Kerre E E. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: Construction, classification, application[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2004, 35(1): 55-95.

[10] Li T J, Leung Y, Zhang W X. Generalized fuzzy rough approximation operators based on fuzzy coverings[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2008, 48(3): 836-856.

[11] Cock M D, Cornelis C, Kerre E E. Fuzzy rough sets: Beyond the obvious[C]. Proc of the 2004 IEEE Int Conf on Fuzzy Systems. Piscataway: IEEE, 2004: 103-108.

[12] Zhu W, Wang F Y. On three types of covering-based rough sets[J]. IEEE Trans on Knowledge and Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144.