

文章编号: 1001-0920(2010)09-1393-06

基于最小均方误差估计的噪声相关UKF设计

王小旭^{1,2}, 赵琳¹, 潘泉², 夏全喜¹, 洪伟¹

(1. 哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001, 2. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘要: 传统 Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)要求系统噪声和量测噪声必须是互不相关的. 针对此局限性, 研究了一类带相关噪声的非线性离散系统 UKF 设计方法. 基于最小均方误差估计和正交变换, 给出了噪声相关UKF滤波递推公式, 并采用 Unscented 变换(UT)来计算系统状态的后验分布. 所设计的 UKF 有效解决了传统 UKF 在噪声相关条件下非线性滤波失效的问题, 拓展了 UKF 的应用范围. 最后, 仿真实例表明了所设计 UKF 的有效性.

关键词: 非线性离散系统; 噪声相关条件下 UKF; 最小均方误差估计; 正交变换; Unscented 变换

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Design of UKF with correlative noises based on minimum mean square error estimation

WANG Xiao-xu^{1,2}, ZHAO Lin¹, PAN Quan², XIA Quan-xi¹, HONG Wei¹

(1. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China; 2. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China. Correspondent: WANG Xiao-xu, E-mail: woyao-fly1982@163.com)

Abstract: Unscented Kalman filter(UKF) for a class of nonlinear discrete-time systems with correlative noises is designed to overcome the limitation that the conventional UKF calls for system noise and measurement to be irrelative. Recursive filtering equations of UKF with correlative noises are given based on minimum mean square error estimation and orthogonal transformation, and unscented transformation(UT) is applied to calculation the posterior distribution of the nonlinear system state. The proposed UKF solves the problem of nonlinear filtering failure in conventional UKF when system noise is correlated with measurement noise, so it expands the applications of the conventional UKF. A simulation example shows the effectiveness of the designed UKF.

Key words: Nonlinear discrete-time systems; UKF with correlative noises; Minimum mean square error estimation; Orthogonal transformation; Unscented transformation

1 引言

Unscented 卡尔曼滤波器(UKF)是一种新兴的非线性滤波方法^[1,2], 其核心思想是基于最小均方误差估计, 采用 Unscented 变换(UT)对非线性高斯系统状态的后验均值及协方差进行近似. 与 EKF 相比, UKF 无需计算非线性状态函数和量测函数的雅可比矩阵, 且不论系统非线性程度如何, UT 变换理论上至少可以三阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差^[2], 具有工程应用简单, 滤波精度高, 收敛性好等优点, 因此 UKF 已得到了国内外学者的广泛关注^[3].

Julier^[4]提出了 UT 变换中 Sigma 点采样策略的

一般性选择依据, 且对 UT 变换的精度给出了详细证明; Merve^[5]设计了一种平方根 UKF 算法, 有效克服了因协方差失去正定而引起的滤波器计算发散, 提高了 UKF 的数值稳定性; Seong^[6]将交互式多模型算法(IMM)引入到 UKF 设计中, 提出一种自适应 IIR/FIR 融合滤波算法, 以此来解决 UKF 在系统模型不确定时鲁棒性差的问题; 文献[7]将 UKF 应用于惯导平台的误差模型辨识当中, 而且取得了优于 EKF 的参数辨识精度. 需要特别强调的是, 已有关于 UKF 的文献都是基于系统噪声和量测噪声为互不相关高斯白噪声的假设来设计非线性系统 UKF 滤波器的. 然而, 受内外部环境变化的影响, 噪声互不相关的

收稿日期: 2009-06-01; 修回日期: 2009-11-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974104).

作者简介: 王小旭(1982-), 男, 山西曲沃人, 博士生, 从事组合导航系统非线性滤波算法的研究; 赵琳(1968-), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事惯性导航、卫星导航及其组合导航技术等研究.

条件并不能完全得到满足, 而传统 UKF 在噪声相关时非线性滤波将会失效; 在现实世界中, 势必存在系统噪声和量测噪声相关的情况, 因此讨论噪声相关条件下 UKF 的设计问题极具理论价值和现实意义. 但到目前为止, 针对此方面问题的解决方案, 国内外尚未见有相关文献报导.

本文基于最小均方误差估计准则, 通过引入正交变换矩阵, 详细推导了噪声相关条件下 UKF 递推公式, 给出了系统状态的一步预测估计和滤波估计, 并应用 UT 变换计算非线性系统状态的后验均值和协方差. 仿真实例表明了所设计 UKF 的正确性和有效性.

2 问题描述

考虑如下所示的非线性离散系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中: \mathbf{x}_k 和 \mathbf{z}_k 分别为系统 n 维状态向量和 m 维量测向量; \mathbf{u}_k 为 l 维控制输入向量; \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 分别为 p 维系统噪声和 m 维量测噪声; $\mathbf{f}_k(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}_k(\cdot)$ 分别为系统非线性状态函数和量测函数; $\mathbf{\Gamma}_k$ 为 $n \times p$ 维噪声输入矩阵.

假设 1 \mathbf{w}_k 和 \mathbf{v}_k 是相关的高斯白噪声, 且具有如下统计特性:

$$\begin{cases} E(\mathbf{w}_k) = \mathbf{q}_k, \quad \text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_j^T) = \mathbf{Q}_k \delta_{kj}, \\ E(\mathbf{v}_k) = \mathbf{r}_k, \quad \text{Cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{R}_k \delta_{kj}, \\ \text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j^T) = \mathbf{S}_k \delta_{kj}. \end{cases} \quad (2)$$

其中: \mathbf{Q}_k 为非负定对称阵, \mathbf{R}_k 为正定对称阵; δ_{kj} 为 Kronecker- δ 函数.

假设 2 初始状态 \mathbf{x}_0 与 $\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ 互不相关, 且服从高斯正态分布, 其均值和协方差阵为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0), \\ \mathbf{P}_0 = \text{Cov}(\mathbf{x}_0) = E(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)^T. \end{cases} \quad (3)$$

问题是基于最小均方误差估计准则和 UT 变换, 利用量测值 $\mathbf{Z}^{k+1} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k+1}\}$, 求噪声相关条件下 Unscented 卡尔曼滤波器 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$.

3 噪声相关时 Unscented 卡尔曼滤波器

从线性最小均方误差估计理论可知, 基于观测量 \mathbf{z} 的 \mathbf{x} 最小均方误差估计 $\hat{\mathbf{x}}$ 唯一等于 \mathbf{x} 在 \mathbf{z} 上的正交投影, 记为 $\hat{\mathbf{x}} = \hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z})$. 下面不加证明地给出关于正交投影的结论^[8-10]:

引理 1 设 \mathbf{x} 和 \mathbf{z} 为具有二阶矩的随机向量, 则 \mathbf{x} 在 \mathbf{z} 上的正交投影 $\hat{\mathbf{x}}$ 唯一地等于基于 \mathbf{z} 的线性最小均方误差估计, 即

$$\hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}) = E(\mathbf{x}) + \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{z})[\text{Var}(\mathbf{z})]^{-1}[\mathbf{z} - E(\mathbf{z})]. \quad (4)$$

引理 2 设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 和 \mathbf{z} 为具有二阶矩的随机向量, \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 为具有相应维数的非随机矩阵, 则有

$$\hat{E}[(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y})/\mathbf{z}] = \mathbf{A}\hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}) + \mathbf{B}\hat{E}(\mathbf{y}/\mathbf{z}). \quad (5)$$

引理 3 设 \mathbf{x}, \mathbf{z}_a 和 \mathbf{z}_b 为具有二阶矩的随机向量, 且 $\mathbf{z} = [\mathbf{z}_a \ \mathbf{z}_b]$, 则有

$$\begin{aligned} \hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}) &= \hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}_a) + \hat{E}(\tilde{\mathbf{x}}/\tilde{\mathbf{z}}_b) = \\ &= \hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}_a) + E(\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{z}}_b^T)[E(\tilde{\mathbf{z}}_b\tilde{\mathbf{z}}_b^T)]^{-1}\tilde{\mathbf{z}}_b. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{E}(\mathbf{x}/\mathbf{z}_a)$, $\tilde{\mathbf{z}}_b = \mathbf{z}_b - \hat{E}(\mathbf{z}_b/\mathbf{z})$.

定理 1 基于最小均方误差估计和量测值 $\mathbf{Z}^{k+1} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_{k+1}\}$. 在假设 1 和假设 2 的情况下, 非线性系统 (1) 的最优滤波递推公式为

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{q}_k - \mathbf{J}_k \mathbf{r}_k, \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k+1/k} = E(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T) + \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{Q}_k \mathbf{\Gamma}_k^T - \mathbf{J}_k \mathbf{R}_k \mathbf{J}_k^T, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} - \mathbf{r}_{k+1}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1} &= \\ &= E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) [E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1} \boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \\ &= \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1} [E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1} \boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) + \mathbf{R}_{k+1}] \mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (12)$$

其中:

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1}, \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{J}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)], \quad (14)$$

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} = \hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)/\mathbf{Z}^k], \quad (15)$$

$$\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} = \hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})/\mathbf{Z}^k], \quad (16)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k}, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}}. \quad (18)$$

证明 由假设 1 可知, \mathbf{R}_k 为正定对称阵, 故引入如下正交变换矩阵:

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

使得

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

显然, $\bar{\mathbf{w}}_k$ 的统计特性如下

$$E(\bar{\mathbf{w}}_k) = E(\mathbf{w}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k) = \mathbf{q}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{r}_k, \quad (21)$$

$$\text{Cov}(\bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{w}}_j^T) = (\mathbf{Q}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{S}_k^T) \delta_{kj}. \quad (22)$$

而且

$$\text{Cov}(\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{v}_j^T) = \text{Cov}(\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_j^T) - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \text{Cov}(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_j^T) = 0,$$

即 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 \mathbf{v}_k 互不相关. 故将式 $\mathbf{w}_k = \bar{\mathbf{w}}_k + \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k$ 带入非线性状态方程 (1) 中, 同时根据非线性量测方程, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \Gamma_k \bar{\mathbf{w}}_k + \Gamma_k \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{v}_k = \\ & \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \Gamma_k \bar{\mathbf{w}}_k + \Gamma_k \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)]. \end{aligned} \quad (23)$$

令

$$\mathbf{J}_k = \Gamma_k \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1}, \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{J}_k [\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k)], \quad (25)$$

则由式 (23) 可知, 非线性系统 (1) 转化为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \Gamma_k \bar{\mathbf{w}}_k, \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k. \end{cases} \quad (26)$$

其中: $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 \mathbf{v}_k 为互不相关的高斯白噪声, $\bar{\mathbf{w}}_k$ 的统计特性如式 (21), (22) 所示; 初始状态 \mathbf{x}_0 与 $\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{v}_k$ 互不相关. 因此, 基于假设 1 和假设 2 的非线性系统 (1) 噪声相关条件下, UKF 就转化为基于非线性系统 (26) 的传统 UKF. 下面基于最小均方误差估计和非线性系统 (26) 来推导噪声相关条件 UKF 递推公式.

已知 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 \mathbf{v}_k 为互不相关的高斯白噪声, 故 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 k 时刻前量测值 \mathbf{Z}^k 互不相关, 即 $\text{Cov}(\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{Z}^k) = 0$. 则根据引理 1 可知

$$\hat{E}(\bar{\mathbf{w}}_k / \mathbf{Z}^k) = E(\bar{\mathbf{w}}_k) = \mathbf{q}_k - \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{r}_k, \quad (27)$$

联合上式和式 (26), 同时根据引理 2 可得, $k+1$ 时刻状态预测为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} &= \hat{E}(\mathbf{x}_{k+1} / \mathbf{Z}^k) = \\ & \hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k] + \Gamma_k \hat{E}(\bar{\mathbf{w}}_k / \mathbf{Z}^k) = \\ & \hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k] + \Gamma_k \mathbf{Q}_k - \mathbf{J}_k \mathbf{r}_k, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k]$ 表示 k 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 经非线性状态函数 $\mathbf{F}_k(\cdot)$ 传递之后的后验均值. 对于线性 KF, $\hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k]$ 可通过线性状态函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, $\hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k]$ 只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知. 定义

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} = \hat{E}[\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) / \mathbf{Z}^k], \quad (29)$$

则将式 (29) 带入 (28) 即可得 (7). 同时, $k+1$ 时刻状态预测误差为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} &= \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \\ & \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} - \Gamma_k E(\bar{\mathbf{w}}_k) = \\ & \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} + \Gamma_k [\bar{\mathbf{w}}_k - E(\bar{\mathbf{w}}_k)]. \end{aligned} \quad (30)$$

相应地, 定义

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k}, \quad (31)$$

则式 (30) 变成

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{A}_k + \Gamma_k [\bar{\mathbf{w}}_k - E(\bar{\mathbf{w}}_k)]. \quad (32)$$

考虑到 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 $\mathbf{v}_k, \mathbf{Z}^k$ 互不相关, 故 $\bar{\mathbf{w}}_k$ 与 \mathbf{A}_k 互不相关.

联合式 (22), 由式 (32) 可得状态预测误差协方差为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1/k} &= E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T) = \\ & E(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T) + \Gamma_k \text{Cov}(\bar{\mathbf{w}}_k, \bar{\mathbf{w}}_k^T) \Gamma_k^T = \\ & E(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T) + \Gamma_k \mathbf{Q}_k \Gamma_k^T - \mathbf{J}_k \mathbf{R}_k \mathbf{J}_k^T. \end{aligned} \quad (33)$$

其中 $E(\mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^T)$ 表示 k 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 经非线性状态函数 $\mathbf{F}_k(\cdot)$ 传递之后的后验协方差. 对于线性 KF, 它可通过线性状态函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, 它只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知.

已知 \mathbf{v}_{k+1} 为高斯白噪声, 故 \mathbf{v}_{k+1} 与 k 时刻前量测值 \mathbf{Z}^k 互不相关, 于是有 $\text{Cov}(\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{Z}^k) = 0$. 则由引理 1 可知 $\hat{E}(\mathbf{v}_{k+1} / \mathbf{Z}^k) = E(\mathbf{v}_{k+1}) = \mathbf{r}_{k+1}$. 同时根据引理 2 可得 $k+1$ 时刻输出预测为

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \hat{E}(\mathbf{z}_{k+1} / \mathbf{Z}^k) = \hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) / \mathbf{Z}^k] + \mathbf{r}_{k+1}, \quad (34)$$

其中 $\hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) / \mathbf{Z}^k]$ 表示 $k+1$ 时刻状态一步预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 经非线性量测函数 $\mathbf{h}_{k+1}(\cdot)$ 传递之后的后验均值. 对于线性 KF, $\hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) / \mathbf{Z}^k]$ 可通过线性量测函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, $\hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) / \mathbf{Z}^k]$ 只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知. 定义

$$\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} = \hat{E}[\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) / \mathbf{Z}^k], \quad (35)$$

则 $k+1$ 时刻输出残差为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \\ & \mathbf{z}_{k+1} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} - \mathbf{r}_{k+1} = \\ & \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1}. \end{aligned} \quad (36)$$

相应地, 定义

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}}, \quad (37)$$

则式 (36) 变成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\Theta}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1}. \quad (38)$$

显然 $\mathbf{Z}^{k+1} = \{\mathbf{Z}^k, \mathbf{z}_{k+1}\}$, 根据引理 3 可得 $k+1$ 时刻状态估计值

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{k+1} &= \hat{E}(\mathbf{x}_{k+1} / \mathbf{Z}^{k+1}) = \\ & \hat{E}(\mathbf{x}_{k+1} / \mathbf{Z}^k) + \hat{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} / \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}) = \\ & \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T) [E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)]^{-1} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

其中: $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} = \mathbf{x}_{k+1} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$, $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1/k} = \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$. 考虑到 \mathbf{v}_{k+1} 与 $\bar{\mathbf{w}}_k, \mathbf{Z}^k$ 互不相关, 故 \mathbf{v}_{k+1} 与 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}, \boldsymbol{\Theta}_{k+1}$ 互不相关, 于是根据式 (38) 有

$$\begin{aligned} E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T) &= E[\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} (\boldsymbol{\Theta}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1})^T] = \\ E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} \boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) &, \end{aligned} \quad (40)$$

$$E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T) = E[(\boldsymbol{\Theta}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1})(\boldsymbol{\Theta}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{r}_{k+1})^T] = E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) + \mathbf{R}_{k+1}, \quad (41)$$

其中 $E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T)$ 和 $E(\boldsymbol{\Theta}_k\boldsymbol{\Theta}_k^T)$ 表示 $k+1$ 时刻状态一步预测值 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 经非线性量测函数 $\mathbf{h}_{k+1}(\cdot)$ 传递之后的后验协方差; 对于线性 KF, 它们可通过线性状态函数传递精确已知; 而对于非线性 UKF, 它们只能通过 UT 变换以三阶泰勒精度近似已知。

定义滤波增益矩阵

$$\mathbf{K}_{k+1} = E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)[E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)]^{-1}. \quad (42)$$

显然

$$\mathbf{K}_{k+1} = E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T)[E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) + \mathbf{R}_{k+1}]^{-1}, \quad (43)$$

则式(39)变成

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k} + \mathbf{K}_{k+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}.$$

下面计算最优状态估计协方差

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^T) = \\ &E[(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1})(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1})^T] = \\ &E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T) - E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)\mathbf{K}_{k+1}^T - \\ &\mathbf{K}_{k+1}E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T) + \mathbf{K}_{k+1}E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)\mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (44)$$

根据 \mathbf{K}_{k+1} 的表达式(42), 注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{k+1}E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)\mathbf{K}_{k+1}^T &= \\ \mathbf{K}_{k+1}E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}^T) &= E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)\mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (45)$$

联合式(41), 则式(44)简化为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k+1} &= \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1}E(\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}\tilde{\mathbf{z}}_{k+1}^T)\mathbf{K}_{k+1}^T = \\ \mathbf{P}_{k+1/k} - \mathbf{K}_{k+1}[E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) + \mathbf{R}_{k+1}]\mathbf{K}_{k+1}^T. \end{aligned} \quad (46)$$

由此定理得证. \square

推论 1 基于定理 1 和 UT 变换, 下面给出在非线性和离散系统(1)的噪声相关条件下 UKF 滤波递推计算公式:

Step1: 在 UT 变换算法中, 最重要的是确定 Sigma 点的采样策略, 也就是确定使用 Sigma 点的个数、位置以及相应的权值. 目前, 已有的 Sigma 采样策略^[3]有对称采样、单形采样、3 阶矩偏度采样以及高斯分布 4 阶矩对称采样等.

Step2: 状态预测. 由定理 1 可知, 计算 $k+1$ 时刻状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 的关键是如何计算 k 时刻状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 经非线性状态函数传递之后的后验均值和协方差, 为此可采用 UT 变换来实现.

按照 Step1 选择 Sigma 点采样策略, 由 $\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k$ 来计算 Sigma 点 $\xi_{i,k}$ ($i = 0, 1, \dots, L$). 它通过非线性状态函数 $\mathbf{F}_k(\cdot)$ 传播为 $\gamma_{i,k+1/k}$, 再由 $\gamma_{i,k+1/k}$ 计算后验

均值 $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k}$ 和后验自协方差 $E(\boldsymbol{\Lambda}_k\boldsymbol{\Lambda}_k^T)$, 即

$$\begin{aligned} \gamma_{i,k+1/k} &= \mathbf{F}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) = \\ \mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{J}_k[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\xi_{i,k})], \quad &i = 0, 1, \dots, L; \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k} &= \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m \gamma_{i,k+1/k} = \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m \mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) &= \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m \{\mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{J}_k[\mathbf{z}_k - \mathbf{h}_k(\xi_{i,k})]\} &= \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m [\mathbf{f}_k(\xi_{i,k}, \mathbf{u}_k) - \mathbf{J}_k\mathbf{h}_k(\xi_{i,k})] + \mathbf{J}_k\mathbf{z}_k; \quad &(48) \\ E(\boldsymbol{\Lambda}_k\boldsymbol{\Lambda}_k^T) &= \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^c (\gamma_{i,k+1/k} - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k}) \bullet & \\ (\gamma_{i,k+1/k} - \mathbf{F}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)|_{\mathbf{x}_k \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_k})^T. \quad &(49) \end{aligned}$$

将式(47)~(49)代入(7)和(8), 即可计算出 $k+1$ 时刻一步状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 及误差协方差 $\mathbf{P}_{k+1/k}$.

Step3: 状态估计. 由定理 1 可知, 计算 $k+1$ 时刻状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$ 的关键是如何计算 $k+1$ 时刻状态预测 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 经非线性量测函数传递之后的后验均值和协方差, 为此也可以采用 UT 变换来实现.

已知由 Step2 已计算得出 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 及 $\mathbf{P}_{k+1/k}$, 按照 Step1 选择 Sigma 点采样策略, 由 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}$ 和 $\mathbf{P}_{k+1/k}$ 计算 Sigma 点 $\xi_{i,k+1/k}$ ($i = 0, 1, \dots, L$). 它通过非线性量测函数 $\mathbf{h}_{k+1}(\cdot)$ 传播为 $\chi_{i,k+1/k}$, 由 $\chi_{i,k+1/k}$ 计算后验均值 $\mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}}$, 后验自协方差 $E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T)$ 及后验互协方差 $E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T)$, 即

$$\chi_{i,k+1/k} = \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1/k}), \quad i = 0, 1, \dots, L; \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}} &= \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m \chi_{i,k+1/k} = \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^m \mathbf{h}_{k+1}(\xi_{i,k+1/k}); \quad &(51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{\Theta}_{k+1}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) &= \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^c (\chi_{i,k+1/k} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}}) \bullet & \\ (\chi_{i,k+1/k} - \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}})^T; \quad &(52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1/k}\boldsymbol{\Theta}_{k+1}^T) &= \\ \sum_{i=0}^L \mathbf{W}_i^c (\xi_{i,k+1/k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k})(\chi_{i,k+1/k} - & \\ \mathbf{h}_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}_{k+1/k}})^T. \quad &(53) \end{aligned}$$

将式(50)~(53)代入(9)~(12), 即可计算出 $k+1$ 时刻

最优滤波状态估计 \hat{x}_{k+1} 及误差协方差 P_{k+1} .

从上述理论分析中不难发现, 噪声相关条件下 UKF 具有两个计算回路: 状态预测回路和状态估计回路. 且它们都无法独立计算, 需要依赖彼此才能完成各自的滤波计算.

4 数值仿真

考虑如下强非线性高斯系统模型来验证所设计的噪声相关条件下 UKF 的有效性:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \sin(x_{2,k}) \\ x_{1,k} + x_{3,k} \\ 0.2E^{-0.5x_{1,k}}(x_{2,k} + x_{3,k}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_k, \quad (54)$$

$$z_k = x_{1,k} + E^{-3x_{2,k}x_{3,k}} + v_k. \quad (55)$$

其中: w_k 和 v_k 均为高斯白噪声, 且它们的统计特性如下:

$$q_k = 0.2, Q_k = 0.04, r_k = 0.3, R_k = 0.09. \quad (56)$$

设非线性系统的理论初始值为 $x_0 = [-0.7 \ 1 \ 1]^T$, 同时取状态估计的初始值为

$$\hat{x}_0 = [-0.7 \ 1 \ 1]^T, P_0 = I, \quad (57)$$

且 \hat{x}_0 与 w_k, v_k 是互不相关的.

例 1 w_k 和 v_k 不相关, 即 $S_k = 0$.

分别采用 EKF, 传统 UKF 及本文所设计的 UKF 对非线性系统(54), (55)的状态进行估计, 状态 x_1 的估计曲线及均方误差曲线如图 1, 图 2 所示.

从图 1, 图 2 不难看出, 当 $S_k = 0$, 即系统噪声和量测噪声互不相关时, 传统 UKF 及噪声相关条件下 UKF 都能达到对状态 x_1 的有效跟踪. 它们的状态估计误差相近, 且其均方估计误差和滤波精度也相同,

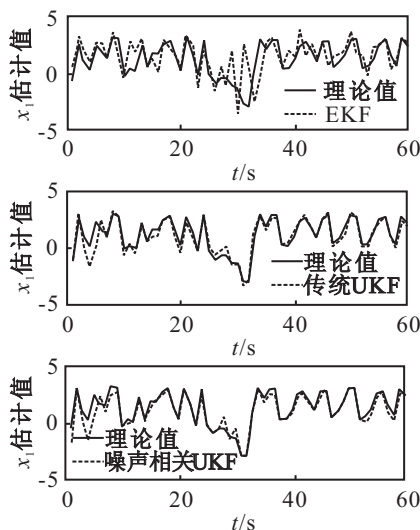


图 1 状态 x_1 估计值

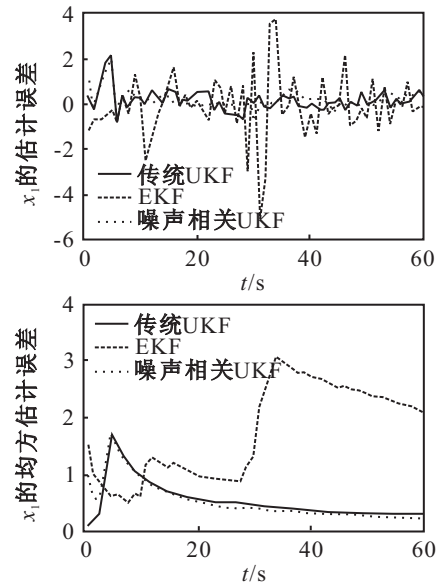


图 2 状态 x_1 估计误差

这充分说明本文所设计的噪声相关条件下 UKF 在系统和量测噪声互不相关时自动退化为传统 UKF; 而 EKF 对状态 x_1 的跟踪效果不佳, 其状态估计误差大于前两者, 且均方误差仿真图也表明了传统 UKF 及噪声相关条件下 UKF 的滤波精度远高于 EKF, 这是因为 UT 变换对非线性状态后验均值和协方差的逼近精度高于雅可比矩阵的计算.

例 2 w_k 和 v_k 相关, 且 $S_k = 0.1$.

传统 UKF 及噪声相关条件下 UKF 所得到的状态 x_3 估计曲线及误差曲线如图 3, 图 4 所示.

由图 3, 图 4 不难发现, 当互协方差 S_k 非零, 即系统噪声和量测噪声相关时, 传统 UKF 对状态 x_3 的跟踪效果不佳, 估计误差较大, 且其均方误差随时间迅速积累, 仿真曲线发散, 这说明传统 UKF 在噪声相关时非线性滤波已失效; 而本文所设计的噪声相关条件

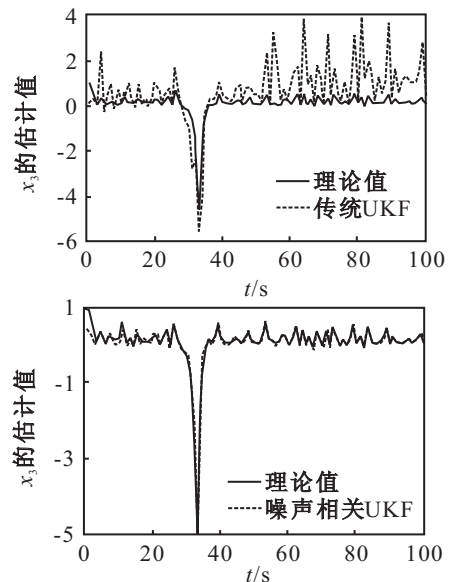


图 3 状态 x_3 估计值

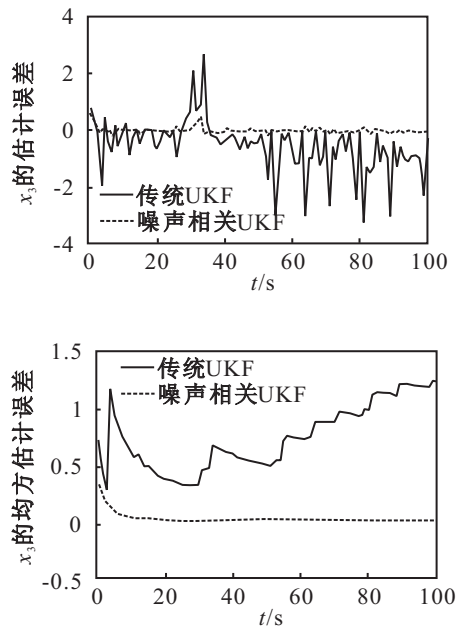


图4 状态 x_3 估计误差

下UKF能实现对状态 x_3 的有效跟踪,并且在噪声相关时不仅滤波收敛速度快,且状态估计精度高.特别是当滤波稳定时,噪声相关条件下UKF的状态估计误差趋于零,这说明了它在解决带相关噪声的非线性系统滤波问题时的有效性和可行性,均方误差仿真图也充分表明了上述观点.

5 结论

传统UKF采用UT变换能以三阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差,其滤波精度高于EKF.然而,UKF要求系统噪声和量测噪声必须为互不相关高斯白噪声的局限性限制了其应用范围.针对传统UKF在噪声相关条件下非线性滤波失效的问题,本文基于最小均方误差估计准则,推导了噪声相关条件下UKF滤波递推公式,并采用UT变换来计算预测回路和估计回路中的状态后验均值和协方差.仿真结果表明,所设计的噪声相关条件下UKF不仅有效克服了传统UKF必须假设噪声互不相关的局限性,拓展了UKF的应用范围,而且在噪声互协方差为零时,噪声相关条件下UKF自动退化为传统UKF,在实际应用中比传统UKF具有更强的适应能力.

参考文献(References)

- [1] Julier S J, Uhlmann J K. A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(3): 477-482.
- [2] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformation of probability distributions[R]. London: University of Oxford, 1996.
- [3] 潘泉, 杨峰, 叶亮, 等. 一类非线性滤波器—UKF综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(5): 481-489. (Pan Q, Yang F, Ye L, et al. Survey of a kind of nonlinear filters – UKF[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481-489.)
- [4] Julier S J, Uhlmann J K. A general method for approximating nonlinear transformation of probability distributions[EB/OL]. 1996. <http://www.eng.ox.ac.uk/>.
- [5] Merwe R V. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models[EB/OL]. 2004. <http://www.cslu.ogi.edu/>.
- [6] Seong Yun Cho, Byung Doo Kim. Adaptive IIR/FIR fusion filter and its application to the INS/GPS integrated system[J]. Automatica, 2008, 44(8): 2040-2047.
- [7] 柳明, 刘雨, 苏宝库. 改进的UKF在惯导平台误差模型辨识中的应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 129-132. (Liu M, Liu Y, Su B K. Application of improved UKF in error model identification of inertial navigation platform[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 129-132.)
- [8] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction theory[J]. J of Basic Engineering, 1960, 82(4): 35-46.
- [9] Kalman R E, Bucy R S. New results in linear filtering and prediction theory[J]. J of Basic Engineering, 1961, 83(4): 95-108.
- [10] 付梦印, 邓志红, 张继伟. Kalman滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (Fu M Y, Deng Z H, Zhang J W. Kalman filtering theory and its application for navigation system[M]. Beijing: Science Press, 2003.)

(上接第1392页)

- [4] Nahak C. Application of the penalty function method to generalized convex programs[J]. Applied Mathematics Letters, 2007, 20(5): 479-483.
- [5] Kerrigan E C, Bemporad A, Mignone D, et al. Multi-objective prioritization and reconfiguration for the control

of constrained hybrid systems[C]. Proc of the 2000 American Control Conf. Chicago, 2000: 1694-1698.

- [6] Meng Z Q. An objective penalty function method for nonlinear programming[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(6): 683-689.