第 25 卷 第 8 期
Vol. 25 No. 8

控 制 与 决 策
Control and Decision

2010 年 8 月
Aug. 2010

文章编号: 1001-0920 (2010) 08-1251-04

不确定性下非合作博弈强Nash均衡的存在性

张会娟, 张 强

(北京理工大学 管理与经济学院，北京 100081)

摘 要: 在已知不确定参数变化范围的假设下, 研究了非合作博弈强Nash均衡的存在性问题. 基于经典非合作博弈的强Berge均衡及帕雷托均衡的概念, 结合非合作博弈NS均衡, 定义了不确定性下非合作博弈的帕雷托强Berge和强Nash均衡的概念, 并借助Ky Fan不等式证明其存在性. 最后利用算例验证了其可行性和有效性.

关键词: 非合作博弈；强 Nash 均衡；Ky Fan 不等式；不确定性

中图分类号: C934 **文献标识码:** A

Existence of strong Nash equilibrium for non-cooperative games under uncertainty

ZHANG Hui-juan, *ZHANG Qiang*

(1. School of Management and Economics，Beijing Institute of Technology，Beijing 100081，China. Correspondent: ZHANG Hui-juan，E-mail：zhanghui-246@163.com)

Abstract: Under the assumption that the domain of the undetermined parameters is known, the existence of strong Nash equilibrium for non-cooperative games is investigated. Combined the concept of strong Berge equilibrium and Pareto equilibrium with NS-equilibrium for non-cooperative games, the notions of Pareto strong Berge equilibrium and strong Nash equilibrium under uncertainty are defined, and the existence theorem of the equilibrium is also provided by means of the Ky Fan inequality. Finally, a numeric example illustrates the effectiveness and feasibility of the proposed method.

Key words: Non-cooperative games；Strong Nash equilibrium；Ky Fan inequality；Uncertainty

1 引 言

自从Nash[1]提出Nash均衡的概念以来, 许多学者发现, 真正的难点不是一个博弈是否存在均衡, 而是在多个均衡之间如何进行选择, 即Nash均衡的多重性问题. 为此, 许多学者进行了深入地研究和分析, 相继提出了一些不同的均衡概念. Schelling[2]提出了“聚点”均衡概念. Aumann[3]又定义了“相关均衡”概念. Selten[4]通过对动态非合作博弈的分析, 先后定义了“子博弈完美均衡”和“颤抖手精炼均衡”. Harsanyi[5]将不完全信息引入非合作博弈论中, 提出了“贝叶斯纳什均衡”的概念. 虽然Nash均衡关于单个局中人的策略偏离是稳定的, 但事实上, 一个联盟或群体对Nash均衡的偏离却可能给该联盟中的成员带来益处. 为此, Berge[6]定义了稳定性强于Nash均衡的强Berge均衡. 随后, Aumann[7]又提出强Nash均衡, 该均衡关于任意联盟的策略偏离是稳定的. 以上两种均衡均是特殊的Nash均衡, 是Nash均衡的精炼. Larbani等[8]对强Berge均衡的性质及其存在性进行了研究. 然而, 以上研究的均是确定环境下非合作博弈均衡解的存在性问题, 即经典非合作博弈问题. 在实际问题中, 由于决策环境的不确定性, 往往会涉及一些不确定参数, 而局中人仅能预知这些参数的变化范围. 对于这类不确定博弈问题, 经典非合作博弈的局限性较为明显. 因此, 在局中人已知不确定参数变化范围的前提下, Zhukovskii[9]结合经典Nash均衡及帕雷托有效解的概念, 介绍了不确定性下非合作博弈的NS-均衡概念. 在此基础上, Larbani等[10]定义了不确定环境下非合作博弈的ZS-均衡概念, 并基于不动点定理证明了其存在性. 以上考虑的均为不确定环境下Nash均衡的存在性问题, 而对于其他均衡解的存在性, 文献中涉及得较少.

本文以经典强Berge及强Nash均衡的理论研究为基础, 在已知不确定参数变化范围的前提下, 定

收稿日期: 2009-06-22；**修回日期:** 2009-09-01.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70471063, 70771010)；国家985工程2期基金项目(107008200400024).

作者简介: 张会娟(1982−), 女, 山西临汾人, 博士生, 从事不确定决策与对策的研究；张强(1955−), 男, 沈阳人, 教授, 博士生导师, 从事不确定决策与对策等研究.

义并研究了帕雷托强Berge均衡(PSBE)同强Nash均衡之间的关系, 同时基于Ky Fan[11]不等式证明了强Nash均衡的存在性.

2 预备知识

设标准型n人非合作博弈为$G=(I,X,f(x))$. 其中: $I=\{1,2,\cdots,n\}$表示局中人构成的集合, $n\geqslant 1$; $X_i\subseteq \boldsymbol{R}^{n_i}$, $n_i\geqslant 1$为局中人i的策略集; $x\in X=\prod_{i=1}^{n}X_i$为非合作博弈的局势, $f=(f_1,\ f_2,\cdots,f_n)$, $f_i: X\to\boldsymbol{R}$为第i个局中人的支付函数, 本文假设局中人均是最大化局中人.

为讨论问题方便, 给出如下记号: $\forall K\subset I$, 记$I-K$为$-K$, 当$K=\{i\}$时, 记$I-\{i\}$为$-i$. 记$\hat{X}=\prod_{i\in I}X_{-i}$, 其中$X_{-i}=\prod_{j\in -i}X_j$表示联盟$-i$中局中人的策略集. 设$x$和$\acute{x}$分别是局中人$i$ 的两个策略, 记$x\parallel \acute{x}_{-i}=(\acute{x}_1,\cdots,\acute{x}_{i-1},x_i,\acute{x}_{i+1},\cdots,\acute{x}_n)$, $\acute{x}_{-i}\in X_{-i}$, 表示联盟$-i$中的局中人将局势x中的策略x_i换成$\acute{x}_i$, 而第i个局中人的策略不变所得到的新局势. 显然, $x\parallel x_{-i}=x$. 记

$$\boldsymbol{R}_{+}^{m}=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in \boldsymbol{R}^m\mid u_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,m\},$$

$$\mathrm{int}\boldsymbol{R}_{+}^{m}=\{u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in \boldsymbol{R}^m\mid u_i> 0,\ i=1,2,\cdots,m\}.$$

定义 1[1] $\bar{x}\in X$称为G的Nash均衡, 若

$$f_i(\bar{x}\parallel x_i)\leqslant f_i(\bar{x}),\forall i\in I,\forall x_i\in X_i.$$

定义 2[12] $\bar{x}\in X$称为G的Pareto均衡, 若

$$f(y)-f(\bar{x})\notin\boldsymbol{R}_{+}^{n}\setminus\{0\},\forall y\in X.$$

定义 3[6] $\bar{x}\in X$称为G的强Berge均衡, 若

$$f_j(\bar{x}\parallel x_{-i})\leqslant f_j(\bar{x}),\ \forall i\in I,\ \forall j\in -i,\ \forall x_{-i}\in X_{-i}.$$

注 1 1) 易证强Berge均衡是特殊的Nash均衡. 设$\bar{x}\in X$是G的强Berge均衡, 则$\forall i\in I,\forall j\in -i$, 有

$$f_i(\bar{x}\parallel x_i)=f_i(\bar{x_j},\bar{x}_{-\{i,j\}},x_i)\leqslant f_i(\bar{x}).$$

因此$\bar{x}$是G的强Nash均衡.

2) 强Berge均衡的稳定性强于Nash均衡, 前者关于任意联盟$-i$是稳定的, 即当局中人i选择强Berge均衡$\bar{x}_i$时, 若联盟$-i$偏离$\bar{x}_{-i}$, 则其收益不会增加; 而后者关于单个局中人稳定, 即Nash均衡只能限制单个人的偏离.

定义 4[7] $\bar{x}\in X$称为G的强Nash均衡, 若

$$f_S(\bar{x}\parallel x_S)-f_S(\bar{x})\notin\boldsymbol{R}_{+}^{|S|}\setminus\{0\},\ \forall S\subseteq I,\ \forall x_S\in X_S.$$

其中: $|S|$表示联盟S中局中人的个数, $f_S=(f_1,f_2,\cdots,f_{|S|})$表示$|S|$维向量. 特别地, 当$S=I$时, 有$f_I=f$.

注 2 若定义4中取$S=\{i\}$, 则强Nash均衡是Nash均衡; 若取$S=I$, 则强Nash均衡是Pareto均衡. 因此, 强Nash均衡是满足个体理性和集体理性的均衡.

命题 1[9] G存在强Berge均衡, 若非合作博弈G满足:

1) $\forall i\in I, X_i$是局部凸Hausdorff空间上的非空紧凸集, 且$f_i: X\to\boldsymbol{R}$在X上连续;

2) $\forall j\neq i\in I,\forall x_i\in X_i, f_j(x_i,y_{-i})$关于$y_{-i}$是$X_{-i}$上的拟凹函数;

3) $\forall x\in X,\exists u\in X$, 使得

$$f_j(x_i,y_{-i})\leqslant f_j(x_i,u_{-i}),$$

$$\forall i\in I,\ \forall j\in -i,\ \forall y_{-i}\in X_{-i}.$$

3 具有不确定参数的Pareto强Berge均衡及强Nash均衡

下面考虑具有不确定参数的非合作博弈, 有

$$G_1=(I,X,Y,f(x,y)).$$

其中: $I=\{1,2,\cdots,n\}$表示局中人构成的集合, $n\geqslant 1$; $X_i\subset\boldsymbol{R}^{n_i}$, $n_i\geqslant 1$为局中人i的策略集; $x\in X=\prod_{i=1}^{n}X_i$为非合作博弈的局势; Y是未知参数集, $Y\subset\boldsymbol{R}^m, m\geqslant 1$; $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$, $f_i: X\times Y\to\boldsymbol{R}$是第$i$个局中人的支付函数.

注 3 当$Y=\varnothing$或$Y=\{y\}$时, G_1是经典非合作博弈, 因此具有不确定参数的非合作博弈是经典博弈的推广.

定义 5 策略$(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$称为$G_1$的Pareto强Berge均衡, 若满足:

1) $\forall i\in I,\forall j\in -i,\forall x_{-i}\in X_{-i}, f_j(\bar{x}\parallel x_{-i},\bar{y})\leqslant f_j(\bar{x},\bar{y})$;

2) $\forall u\in X, f(u,\bar{y})-f(\bar{x},\bar{y})\notin\boldsymbol{R}_{+}^{n}\setminus\{0\}$;

3) $\forall y\in Y, f(\bar{x},\bar{y})-f(\bar{x},y)\notin\mathrm{int}\boldsymbol{R}_{+}^{n}$.

注 4 定义5的条件1)说明$\bar{x}$是非合作博弈$(I,X,f(x,\bar{y}))$的强Berge均衡; 条件2)说明$\bar{x}$ 是非合作博弈$(I,X,f(x,\bar{y}))$的Pareto均衡; 条件3)说明$\bar{y}$是多目标问题$(Y,f(\bar{x},y))$的弱Pareto有效解, 即所有局中人对不确定参数y均持极大极小或悲观主义态度.

定义 6 策略$(\bar{x},\bar{y})\in X\times Y$称为$G_1$的强Nash均衡, 若满足:

1) $\forall S\subseteq I,\forall x_S\in X_S, f_S(\bar{x}\parallel x_S,\bar{y})-f_S(\bar{x},\bar{y})\notin\boldsymbol{R}_{+}^{n}\setminus\{0\}$;

2) $\forall y\in Y, f(\bar{x},\bar{y})-f(\bar{x},y)\notin\int\boldsymbol{R}_{+}^{n}$.

命题 2 G_1的Pareto强Berge均衡是强Nash均衡.

证明　设 $\bar{z} \in X \times Y$ 是 G_1 的 Pareto 强 Berge 均衡, 由定义 5 和定义 6, 只需证明 $\bar{x}$ 是非合作博弈 $(I, X, f(x,\bar{y}))$ 的强 Nash 均衡. 利用反证法, 假设 $\bar{z}$ 不是 G_1 的强 Nash 均衡, 则 $\exists S \subseteq I, \exists x_S \in X_S$, 有

$$f_S(\bar{x} \parallel x_S, \bar{y}) - f_S(\bar{x}, \bar{y}) \in \boldsymbol{R}_+^{|S|} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

即

$$\sum_{i\in S} f_i(\bar{x} \parallel x_S, \bar{y}) > \sum_{i\in S} f_i(\bar{x}, \bar{y}). \tag{2}$$

若 $S = I$, 则式 (1) 与定义 5 的条件 2) 相矛盾; 若 $S \neq I$, 则 $-S \neq \varnothing$. 设 $i_0 \notin S$, 有 $S \subset -i_0$. 设 $S_1 = (-i_0)-S$, 有

$$\forall j \in -i_0 = S \bigcup S_1,\ \forall x_{-i^0} \in X_{-i^0},$$

$$f_j(\bar{x} \parallel x_{-i_0}, \bar{y}) \leqslant f_j(\bar{x}, \bar{y}).$$

$\forall j \in S$, 取 $x_{-i^0} = (\bar{x}_{S_1}, x_S)$, 则有

$$f_j(\bar{x} \parallel x_{-i_0}, \bar{y}) = f_j(\bar{x} \parallel x_S, \bar{y}) \leqslant f_j(\bar{x}, \bar{y}),$$

$$\sum_{j\in S} f_j(\bar{x} \parallel x_S, \bar{y}) \leqslant \sum_{j\in S} f_j(\bar{x}, \bar{y}).$$

这与式 (2) 矛盾, 故 $\bar{z}$ 是 G_1 的强 Nash 均衡. □

4　强 Nash 均衡的存在性

定理 1 (Ky Fan 不等式[11])　设 X 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 上的非空紧凸集, 有 $\exists \bar{x} \in X$, 使 $\sup\limits_{y\in X} f(\bar{x}, y) \leqslant 0$, 若 $f: X \times X \to \boldsymbol{R}$ 满足:

1) $\forall y \in X, x \to f(x, y)$ 在 X 上是下半连续的;

2) $\forall x \in X, y \to f(x, y)$ 在 X 上是拟凹的;

3) $\forall x \in X, f(x, x) \leqslant 0$.

假设 1　集合 $X_i, i \in I$ 和 Y 分别是 $\boldsymbol{R}^{n_i}$ 及 $\boldsymbol{R}^m$ 上的非空紧凸集; $(x, y) \to f_i(x, y), i \in I$ 是 $X \times Y$ 上的连续函数.

如不特别说明, 以下讨论均建立在假设 1 上.

定义 7　设 $S \subseteq I$, 函数 $\varphi_S: Z \times \hat{X} \times \acute{Z} \to \boldsymbol{R}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}\varphi_S(z, \hat{t}, \acute{z}) = &\sum_{i\in I}\sum_{j\in -i}(f_j(x \parallel t_{-i}, y) - f_j(x, y)) + \\ &\sum_{i\in I}(f_i(\acute{x}, y) - f_i(x, y)) + \\ &\sum_{i\in S}((f_i(x, y) - f_i(x, \acute{y})).\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$z = (x, y) \in Z = X \times Y,$$

$$\hat{t} = (t_{-1}, t_{-2}, \cdots, t_{-n}) \in \hat{X} = \prod_{i\in I}\prod_{j\in -i} X_{-i}^j,$$

$$X_{-i}^j = X_{-i},\ \acute{z} = (\acute{x},\ \acute{y}) \in Z.$$

注 5　$\forall z = (x, y) \in Z$, 若取 $\acute{z} = z$, 且 $\hat{t} = (x_{-1}, x_{-2}, \cdots, x_{-n})$, 则 $\varphi_S(z, \hat{t}, \acute{z}) = 0$. 因此, $\forall z \in Z$,有

$$\sup_{(\hat{t},\acute{z})\in(\hat{X},Z)} \varphi_S(z, \hat{t}, \acute{z}) \geqslant 0.$$

定义 8　设 $S \subseteq I$, 函数 $\phi_S: Z \times Z \to \boldsymbol{R}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}\phi_S(z, \acute{z}) = &\sum_{i\in I}\sum_{j\in -i}(f_j(x \parallel \acute{x}_{-i}, y) - f_j(x, y)) + \\ &\sum_{i\in I}((f_i(\acute{x}, y) - f_i(x, y)) + \\ &\sum_{i\in S}(f_i(x, y) - f_i(x, \acute{y})).\end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\acute{\hat{x}} = (\acute{x}_{-1},\ \acute{x}_{-2}, \cdots, \acute{x}_{-n}) \in \hat{x},$$

$$z = (x, y) \in Z,\ \acute{z} = (\acute{x}, \acute{y}) \in Z.$$

注 6　$\forall z \in Z$, $\phi_S(z, z) = 0$. 有 $\forall z \in Z$, $\sup\limits_{\acute{z}\in Z} \phi_S(z, \acute{z}) \geqslant 0$. 定义 8 与定义 7 的区别在于, 当取定 $\acute{x}$ 时, $\acute{x}_{-i} = \acute{x} - \{\acute{x}_i\}$, 而定义 7 中, $\hat{t} = (t_{-1}, t_{-2}, \cdots, t_{-n}), t_{-i} \in X_{-i}$.

引理 1　$\exists \bar{z} \in Z$, 使 $\sup\limits_{z\in Z} \phi_S(\bar{z}, z) \leqslant 0$, 若非合作博弈 G_1 满足:

1) $\forall (x, y) \in Z, \forall i \in I$, $\forall j \in -i$, $f_j(x \parallel t_{-i}, y)$ 是 X_{-i} 上关于 t_{-i} 的凹函数;

2) $\forall y \in Y$, $\forall i \in I$, $f_i(x, y)$ 是 X 上关于 x 的凹函数;

3) $\forall x \in X$, $\forall i \in I$, $f_i(x, y)$ 是 Y 上关于 y 的凸函数.

证明　由假设 1 可得, $Z = X \times Y$ 是非空紧凸集, 且 $z \to \phi_S(z, \acute{z})$ 是 Z 上的连续函数. 只需证明 $\forall z = (x, y) \in Z, \acute{z} \to \phi_S(z, \acute{z})$ 是 Z 上的凹函数.

$\forall z \in Z$, 设 $z^1, z^2 \in Z$, $z^1 = (x^1, y^1)$, $z^2 = (x^2, y^2)$, $\beta \in (0, 1)$. 由 X 和 Y 的凸性, 有

$$\beta x^1 + (1-\beta)x^2 \in X, \beta y^1 + (1-\beta)y^2 \in Y,$$

$$\begin{aligned}&\phi_S(z, \beta z^1 + (1-\beta)z^2) = \\ &\sum_{i\in I}\sum_{j\in -i}(f_j(x \parallel \beta x_{-i}^1 + (1-\beta)x_{-i}^2, y) - f_j(x, y)) + \\ &\sum_{i\in I}(f_i(\beta x^1 + (1-\beta)x^2, y) - f_i(x, y)) + \\ &\sum_{i\in S}(f_i(x, y) - f_i(x, \beta y^1 + (1-\beta)y^2)).\end{aligned}$$

由引理 1 条件 1) 得 $\forall i \in I, \forall j \in -i$, 有

$$\begin{aligned}&f_j(x \parallel \beta x_{-i}^1 + (1-\beta)x_{-i}^2, y) \geqslant \\ &\beta f_j(x \parallel x_{-i}^1, y) + (1-\beta) f_j(x \parallel x_{-i}^2, y).\end{aligned} \tag{5}$$

由引理 1 条件 2) 得 $\forall i \in I$, 有

$$\begin{aligned}&f_i(x \parallel \beta x^1 + (1-\beta)x^2, y) \geqslant \\ &\beta f_i(x \parallel x^1, y) + (1-\beta) f_i(x \parallel x^2, y).\end{aligned} \tag{6}$$

由引理 1 条件 3) 得

$$\sum_{i\in S} f_i(x,\beta y^1+(1-\beta)y^2)\leqslant \beta\sum_{i\in S} f_i(x,y^1)+(1-\beta)\sum_{i\in S} f_i(x,y^2). \quad (7)$$

由式 (5)∼(7) 可得

$$\phi_S(z,\beta z^1+(1-\beta)z^2)\geqslant \beta\phi_S(z,z^1)+(1-\beta)\phi_S(z,z^2),$$

即 $\forall z\in Z, \acute{z}\to\phi_S(z,\acute{z})$ 是凹的. 又因为 $\forall z\in Z$, $\phi_S(z,z)=0$, 故由 Ky Fan 不等式, $\exists\bar{z}\in Z$, 使得 $\sup\limits_{z\in Z}\phi_S(\bar{z},z)\leqslant 0$. □

定理 2 非合作博弈 G_1 存在强 Nash 均衡, 若非合作博弈 G_1 满足:

1) $\forall(x,y)\in Z$, $\forall i\in I$, $\forall j\in -i$, $f_j(x\parallel t_{-i},y)$ 是 X_{-i} 上关于 t_{-i} 的凹函数;

2) $\forall y\in Y$, $\forall i\in I$, $f_i(x,y)$ 是 X 上关于 x 的凹函数;

3) $\forall x\in X$, $\forall i\in I$, $f_i(x,y)$ 是 Y 上关于 y 的凸函数;

4) $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$, $\exists S\subseteq I$, $\exists u\in X$, $\exists v\in Y$ 使 $\forall i\in I$, $\forall j\in -i$, $\forall t_{-i}\in X_{-i}$, 有

$$f_j(x\parallel t_{-i},y)\leqslant f_j(x\parallel u_{-i},y),\ f_i(x,y)\leqslant f_i(u,y),$$
$$\sum_{i\in S} f_i(x,y)\geqslant\sum_{i\in S} f_i(x,v),\ \forall i\in I.$$

证明 由定理 2 条件 4) 及定义 7 和定义 8 可知, $\exists S\subseteq I,\exists z_0=(u,v)\in Z$, 使

$$\forall(\hat{t},\acute{z})\in\hat{X}\times Z,\ \varphi_S(z,\hat{t},\acute{z})\leqslant\phi_S(z,z_0).$$

又由引理 1 可知, $\exists\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})\in Z$, 使得

$$\sup_{(\hat{t},\acute{z})\in\hat{X}\times Z}\varphi_S(\bar{z},\hat{t},\acute{z})\leqslant\sup_{z\in Z}\phi_S(\bar{z},z)\leqslant 0.$$

故由注 5, $\exists\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})\in Z$, 使得

$$\sup_{(\hat{t},\acute{z})\in\hat{X}\times Z}\varphi_S(\bar{z},\hat{t},\acute{z})=0.$$

因此, $\exists\bar{z}\in Z,\forall(\hat{t},\acute{z})\in\hat{X}\times Z$, 有

$$\varphi_S(\bar{z},\hat{t},\acute{z})\leqslant 0. \quad (8)$$

下面证明 $\bar{z}$ 是非合作博弈 G_1 的 Pareto 强 Berge 均衡. $\forall i\in I$, 取 $t_{-i}=\bar{x}_{-i}$, $\acute{z}=(\bar{x},\acute{y})$, 则式 (8) 变为

$$\forall\acute{y}\in Y,\ \sum_{i\in S}(f_i(\bar{x},\bar{y})-f_i(\bar{x},\acute{y}))\leqslant 0.$$

由引理 2 可知, $\bar{y}$ 满足定义 5 的条件 3). $\forall i\in I$, 取 $t_{-i}=\bar{x}_{-i}$, $\acute{z}=(\acute{x},\bar{y})$, 则式 (8) 变为

$$\sum_{i\in I}(f_i(\acute{x},\bar{y})-f_i(\bar{x},\bar{y}))\leqslant 0,$$

所以 $\bar{x}$ 是非合作博弈 $(I,X,f(x,\bar{y}))$ 的 Pareto 均衡.

下面证明 $\bar{x}$ 是非合作博弈的 G_1 的强 Berge 均衡. 取 $\acute{z}=(\bar{x},\bar{y})$, 则式 (8) 变为

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in -i}(f_j(\bar{x}\parallel t_{-i},\bar{y})-f_j(\bar{x},\bar{y}))\leqslant 0. \quad (9)$$

设 $\forall i_0,j_0\in I, j_0\neq i_0$. 若 $i\in -i_0, j\in -i$, 则令 $t^j_{-i}=\bar{x}_{-i}$. 式 (9) 变为

$$\forall t^{j^0}_{-i^0}\in X_{-i},\ f_{j^0}(\bar{x}\parallel t^{j^0}_{-i^0},\bar{y})\leqslant f_{j^0}(\bar{x},\bar{y}).$$

由 i_0,j_0 的任意性, 有

$$\forall t^j_{-i}=t_{-i}\in X_{-i},\ \forall i\in I,\ \forall j\in -i,$$
$$f_j(\bar{x}\parallel t_{-i},\bar{y})\leqslant f_j(\bar{x},\bar{y}).$$

即 $\bar{x}$ 是非合作博弈 $(I,X,f(x,\bar{y}))$ 的强 Berge 均衡. 因此, $\bar{z}$ 是非合作博弈 G_1 的 Pareto 强 Berge 均衡, 由命题 2 可知, $\bar{z}$ 是 G_1 的强 Nash 均衡. □

5 算例分析

下面应用第 4 节的结论, 求解非合作博弈的强 Nash 均衡.

例 1 设非合作博弈 $G_1=(I,X,Y,f(x,y))$. 其中

$$I=\{1,2\},\ X_1=X_2=[0,1],\ Y=[0,1]\times[0,1].$$
$$x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2,\ y=(y_1,y_2)\in Y.$$
$$f_1(x,y)=-x_1^2-2x_1-2x_2+y_1,$$
$$f_2(x,y)=-x_1-2x_2^2-x_2+y_2.$$

显然, $X_i(i=1,2)$ 和 Y 分别是 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}^2$ 上的非空紧凸集, 且函数 $(x,y)\to f_i(x,y)(i=1,2)$ 是 $Z=X\times Y$ 上的连续函数. 同时, 函数 $f_i(x,y)(i=1,2)$ 满足定理 2 的条件 1)∼3). 容易验证当取 $S=\{1\}$ 时,点 ((0,0), (0,0)) 满足定理 2 的条件 4). 故由定理 2 可知, 非合作博弈 G_1 存在强 Nash 均衡, 并有 $\bar{z}=((0,0),(0,0))$ 使

$$\forall(\hat{t},\acute{z})\in(\hat{X},Z),\varphi_1(\bar{z},\hat{t},\acute{z})\leqslant 0.$$

因此, $\bar{z}=((0,0),(0,0))$ 是 G_1 的强 Nash 均衡.

6 结 论

本文在经典非合作博弈强 Berge 均衡和 Pareto 均衡的研究基础上, 定义并研究了具有不确定参数的强 Nash 均衡的存在性问题. 具有不确定参数的非合作博弈是经典非合作博弈的推广, 拓展了非合作博弈的应用范围, 具有更广泛的实用性及理论价值. 然而, 本文仅研究了具有经典支付的强 Nash 均衡存在性问题, 不确定性下具有模糊支付和目标的非合作博弈均衡解的存在性是下一步的研究目标.

参考文献(References)

[1] Nash J. Non-cooperative games[J]. Annals of Mathematics, 1951, 54(5): 286-295.

[2] Schelling T. The strategy of conflict[M]. Cambridge: Harvard University Press, 1960.

(下转第1260页)