

# 波函数时域衍射的布洛赫矢量模型

刘碧蕊, 伏振兴

宁夏师范学院物理与信息技术学院, 固原 756000

**摘要** 为了揭示波函数时域衍射的物理本质, 采用密度矩阵的矢量模型方法, 研究线性啁啾脉冲光场作用下二能级系统波函数的时域衍射效应; 讨论光场啁啾因子对时域衍射效应的调制作用; 分析不同啁啾因子作用时, 量子系统粒子布居转移和时域衍射效应的动态演化过程。在布洛赫矢量表象下, 对时域衍射效应的物理作用机制给出了清晰的描述。

**关键词** 啁啾场; 二能级系统; 布居转移; 布洛赫矢量模型

**中图分类号** O437.2

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.24.009

## Quantum Diffraction of Wave Function in Time-domain by Bloch Vector Model

LIU Birui, FU Zhenxing

College of Physics and Information Technology, Ningxia Normal University, Guyuan 756000, China

**Abstract** To explore the physical mechanism and the essence of the quantum diffraction in time-domain, the wave function diffraction in time-domain of a two-level system under the pulse field with a chirped frequency is investigated by means of the density matrix equation and the Bloch vector model. The modulations of the quantum diffraction by the chirped factors are discussed. The dynamic evolution process of the population transfer and the effect of the quantum diffraction with different chirped factors are analyzed. The interaction mechanism and the physical process can found a clear description in the Bloch vector picture.

**Keywords** chirped field; two-level system; population transfer; Bloch vector model

二能级系统作为最简单的量子系统, 是构成其他较复杂的多能级系统的基本单元。自从量子理论诞生以来, 就广泛关注二能级系统特性的研究<sup>[1-3]</sup>。当强啁啾光场作用在二能级原子(或分子)系统上时, 由于绝热跟随条件的满足, 会引起系统内粒子布居的完全转移, 即实现粒子布居的完全转移<sup>[4]</sup>; 而当弱啁啾光场与二能级系统作用时, 由于绝热跟随条件的不满足或不完全满足, 此时基态的粒子就不会完全转移到激发态上。但是, 弱啁啾光场的作用会在时域内引起系统粒子布居振荡, 这种振荡规律类似于光场的时域衍射行为, 被称为波函数的时域量子衍射<sup>[5]</sup>。

粒子布居转移和几率振荡是二能级系统特性研究的重要热点<sup>[6]</sup>。实现粒子布居的完全转移, 在通常情况下可采用两种方法: 一种是共振的 $\pi$ 脉冲技术( $\pi$  pulse technique), 而另一种是使用能级交叉的绝热通道技术(level crossing adiabatic-passage technique)<sup>[4]</sup>。 $\pi$ 脉冲技术利用粒子数的拉

比振荡, 而能级交叉绝热通道技术是基于对系统哈密顿量的本征态(即绝热态)的绝热跟随实现的。在具体应用中,  $\pi$ 脉冲技术通常需要精确的脉冲面积和非常严格的共振条件, 即使是很小的偏差, 也会对粒子的转移效率产生相当大的影响; 而能级交叉的绝热通道技术则需要较大的脉冲面积和足够大的频率啁啾率<sup>[7,8]</sup>。近年来, 随着脉冲整形技术(pulse shaping technique)的产生和应用, 已经实现了对脉冲频率、脉冲间距等参量的精确调制, 从而实现了更为精细的量子调制<sup>[9,10]</sup>。

本文采用密度矩阵的矢量模型方法, 研究线性啁啾光场作用下, 二能级系统激发态波函数的时域衍射效应; 讨论线性啁啾因子对时域衍射效应的调制作用。在布洛赫矢量表象中, 分析系统粒子布居转移和激发态波函数时域衍射效应的动态演化过程, 描述光场与量子系统相互作用的机理和物理图景。

收稿日期: 2014-04-16; 修回日期: 2014-07-13

基金项目: 宁夏自然科学基金项目(NZ13208); 宁夏高等学校科研项目(NGY2013112); 宁夏师范学院重点科研项目(ZD201307); 宁夏师范学院创新团队子项目(ZZ201206)

作者简介: 刘碧蕊, 副教授, 研究方向为量子光学, 电子信箱: liubirui24@sohu.com

引用格式: 刘碧蕊, 伏振兴. 波函数时域衍射的布洛赫矢量模型[J]. 科技导报, 2014, 32(24): 60-63.

## 1 理论计算

考虑啁啾脉冲光场作用下的二能级原子系统,基态和激发态分别用 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 标记,2个态的固有角频率分别用 $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 表示,用 $\omega_{12}=\omega_2-\omega_1$ 表示激发态和基态之间的玻尔跃迁频率。驱动原子从基态向激发态跃迁的脉冲光场带有线性频移因子(即啁啾因子),其表示形式为 $E(t)=\varepsilon(t)e^{i\omega t}$ 。式中 $\omega_A$ 为未受调制的光场中心频率, $\varepsilon(t)=|\varepsilon_0(t)|e^{i\chi(t)}$ 为光场的复强度包络,其中 $\varepsilon_0(t)$ 为强度包络, $\chi(t)$ 为光学相位函数,是与时间相关的瞬时函数<sup>[5,10]</sup>。线性啁啾场的光学相位函数 $\chi(t)=\beta t^2$ , $\beta$ 为啁啾因子<sup>[7,8]</sup>。光场未受线性啁啾调制的中心频率与原子玻尔跃迁频率之间的失谐量表示为 $\Delta=\omega_{12}-\omega_A$ 。

在旋转坐标变换和旋转波近似条件下<sup>[11]</sup>,啁啾脉冲光场与二能级系统作用的哈密顿算符可以表示为

$$H_d(t)=\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & \Omega(t) \\ \Omega(t)^* & \Delta-\beta t \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $\Omega(t)=2\mu_{12}E(t)/\hbar$ 为拉比振荡频率。将哈密顿量 $H_d(t)$ 的2个瞬时本征态(即绝热态)标记为 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ ,相应本征值表示为 $\lambda_+$ 和 $\lambda_-$ ,则2个瞬时本征态与二能级原子系统的基态 $|1\rangle$ 和激发态 $|2\rangle$ 之间的关系满足

$$\begin{cases} |+\rangle = \cos\theta(t)|1\rangle + \sin\theta(t)|2\rangle \\ |-\rangle = \cos\theta(t)|2\rangle - \sin\theta(t)|1\rangle \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\theta(t)=\frac{1}{2}\arctan[\Omega(t)/x(t)]$ ,称为混合角,其中 $x(t)=\Delta-\beta t$ 。根据缀饰态理论,当绝热态 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 的耦合强度远小于 $|\lambda_+-\lambda_-|$ 时,态 $|+\rangle$ 和态 $|-\rangle$ 之间就不会有粒子交换,此时系统的演化过程可以视为绝热演化。考虑脉冲场为时间高斯线型,由薛定谔方程得出调制光场作用下,二能级系统绝热演化所满足的条件为

$$\theta'(t)=\left|\frac{\langle +|H'_d|-\rangle}{\hbar(\lambda_+-\lambda_-)}\right|=\left|\frac{\Omega(t)}{2[\Omega^2(t)+x^2]}\left(x'+\frac{2xt}{\tau^2}\right)\right|\ll 1 \quad (3)$$

式中, $\theta'(t)$ 、 $H'_d$ 和 $x'$ 分别为混合角 $\theta(t)$ 、系统哈密顿量 $H_d(t)$ 和变量 $x(t)$ 对时间的一阶导数, $\tau$ 为高斯脉冲的宽度。

引入横向弛豫 $\gamma_1$ 和纵向弛豫 $\gamma_2$ ,由密度矩阵运动方程可以得出,携带线性啁啾因子的频率调制光场与二能级体系相互作用时,二能级量子系统的密度矩阵元所满足的方程组为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}(\rho_{21}-\rho_{12})\Omega(t) \\ \frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}(\rho_{12}-\rho_{21})\Omega(t) - \gamma_1\rho_{22} \\ \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[-x\rho_{12}+(\rho_{22}-\rho_{11})\Omega(t)] - \gamma_2\rho_{12} \\ \frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[x\rho_{21}+(\rho_{11}-\rho_{22})\Omega(t)] - \gamma_2\rho_{21} \end{cases} \quad (4)$$

当作用过程满足绝热条件时,密度矩阵元方程组有近似的解析解。若不满足绝热条件,则以上方程组很难求解。

另外,在携带线性啁啾因子的频率调制光场作用下,二

能级系统在旋转坐标系中的布洛赫矢量方程<sup>[12]</sup>(或密度矩阵矢量方程)可以表示为

$$\frac{d\mathbf{R}(u,v,w)}{dt}=\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{R} \quad (5)$$

式中 $\boldsymbol{\alpha}=-\Omega(t)\mathbf{i}+x\mathbf{k}$ ,表征的是入射光场的特性, $\mathbf{R}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k}$ 为布洛赫矢量,又称为赝偶极矩矢量。 $\mathbf{R}$ 中的参量 $u=\rho_{21}+\rho_{12}$ ,描述的是系统的色散;参量 $v=i(\rho_{21}-\rho_{12})$ ,表示系统的吸收和辐射, $v>0$ 表示吸收, $v<0$ 表示辐射;参量 $w=\rho_{22}-\rho_{11}$ ,表示激发态和基态两能级间的粒子数之差。

只要确定了初始值 $\mathbf{R}(u_0,v_0,w_0)$ ,由式(5)即可得到 $\mathbf{R}(u,v,w)$ 的动态进动过程。从量子理论观点看,求出 $\mathbf{R}(u,v,w)$ 随时间的演化,也就完全了解了量子体系系综的状态。

## 2 结果与讨论

在绝热条件下,方程组(4)有近似的解析解,但当系统的演化过程不满足绝热条件时,方程组一般很难求出解析解。本文采用数值研究方法,对密度矩阵方程组进行数值求解。为不失一般性,选取脉冲场的时域包络形式为时间高斯线型,脉冲宽度取 $\tau=1.75$  ns,啁啾因子 $\beta$ 的单位均为GHz/ns。

图1给出的是啁啾光场作用下,二能级系统激发态的粒子布局概率随啁啾因子 $\beta$ (正啁啾情况,即 $\beta>0$ )的变化规律。可以看出,在啁啾因子 $\beta=0$ ,即激发光场的载波频率没有被调制时,基态粒子被抽运到激发态后又被送回基态,此时的粒子布居转移只与作用脉冲光场的面积有关。随着啁啾效应的出现,即 $\beta\neq 0$ 时,二能级系统激发态粒子的布居概率逐渐被调制。在 $\beta=0.8$ 时,粒子布居概率在较大范围内出现了振荡。当 $\beta=1.8$ 时,在啁啾脉冲光场的作用下,系统基态的粒子被全部抽运到了激发态,实现了系统粒子布居的完全转移。通过方程式(3)的计算可知,系统在因子 $\beta=1.8$ 的啁啾脉冲光场作用下,其状态的演化过程为绝热演化,满足给出的绝热条件。随着啁啾因子 $\beta$ 的进一步增加,光场和量子体系作用过程所满足的绝热条件逐渐被破坏,布居在基态的粒子将不能完全地被转移到激发态。于是,激发态的粒子布居概率出现下降,并在时域范围内开始呈现出振荡行为。这种振荡行为在量子研究中被称为波函数的时域量子衍射,简称时域衍射<sup>[5]</sup>。从图1给出的数值结果可以看出,啁啾效应越强,即啁啾因子的取值越大时,二能级系统的粒子转移到激发态的效率就越低,但布居概率的振荡却越剧烈,也就是说波函数的时域衍射效应就越明显。如图1所示,当啁啾因子增加到 $\beta=8.8$ 时,仅有约50%的粒子被抽运到了激发态,但波函数在时域的量子衍射效应却较之前更为明显。在啁啾因子 $\beta=24.8$ 时,仅约20%的粒子被转移到了激发态,但此时的波函数时域衍射效应非常明显。图1给出的研究结果均为正啁啾因子调制时的粒子布居转移和时域衍射行为,如果脉冲光场的频率啁啾为负值,即 $\beta<0$ 时,则激发态粒子布居

转移和时域衍射效应与啁啾因子的绝对值有关。当正负啁啾因子的绝对值相等时,啁啾效应对系统量子行为的影响相同,故此处只给出正啁啾因子调制时的结果。

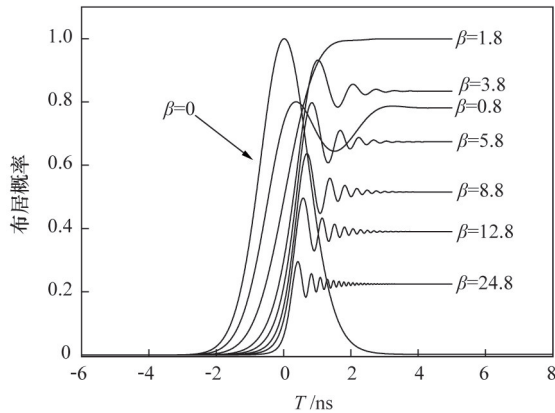


图1 激发态粒子布居概率随啁啾因子的变化规律  
Fig. 1 Population of excited state with different chirped factors

二能级系统中波函数时域衍射的物理机理,在布洛赫矢量表象中,通过矢量轨迹的动态演化过程能够给出非常清晰

的描述。图2给出的是在布洛赫矢量表象中,不同啁啾因子的脉冲光场与二能级系统相互作用时矢量的动态演化过程图,图中箭头标记的是布洛赫矢量  $R$  演化时所划过的轨迹方向。图2(a)是在啁啾因子  $\beta=0$  时,即没有线性啁啾因子调制的情况下,布洛赫矢量  $R$  的演化规律。可以看出,此时激发态上粒子的布居概率只受激发脉冲光场面积的影响。由于本文在数值研究时所选取的脉冲面积稍大于  $2\pi$ ,因而可以看到  $R$  的演化轨迹是一个圆周,即相当于两个  $\pi$  脉冲的作用。图2(b)、(c)是啁啾因子分别取  $\beta=1.8$  和  $\beta=-1.8$  时,中  $R$  的空间演化过程。如前所述,绝对值相等的正负啁啾因子对粒子布居转移和时域衍射的作用效果相同,从图2(b)、(c)中  $R$  的演化行为可以看出,二者的作用机理和动力学过程存在着很大的差别。从演化结果看,  $R$  都是从  $w=-1$  的  $u-v$  平面演化到了  $w=1$  的  $u-v$  平面,但正负啁啾因子所调制的矢量演化方向正好相反。由密度矩阵方程的数值研究结果可知,正负啁啾都能实现粒子布居的完全转移,但它们是粒子布居在不同的缀饰态上<sup>[13]</sup>。

图2(d)、(e)、(f)是当  $\beta$  为2.8、3.8和5.8时,  $R$  在空间的演化过程。随着波函数时域衍射效应的出现,  $R$  开始在  $uv$  平面旋转,相应的激发态的粒子布居概率出现了振荡现象。

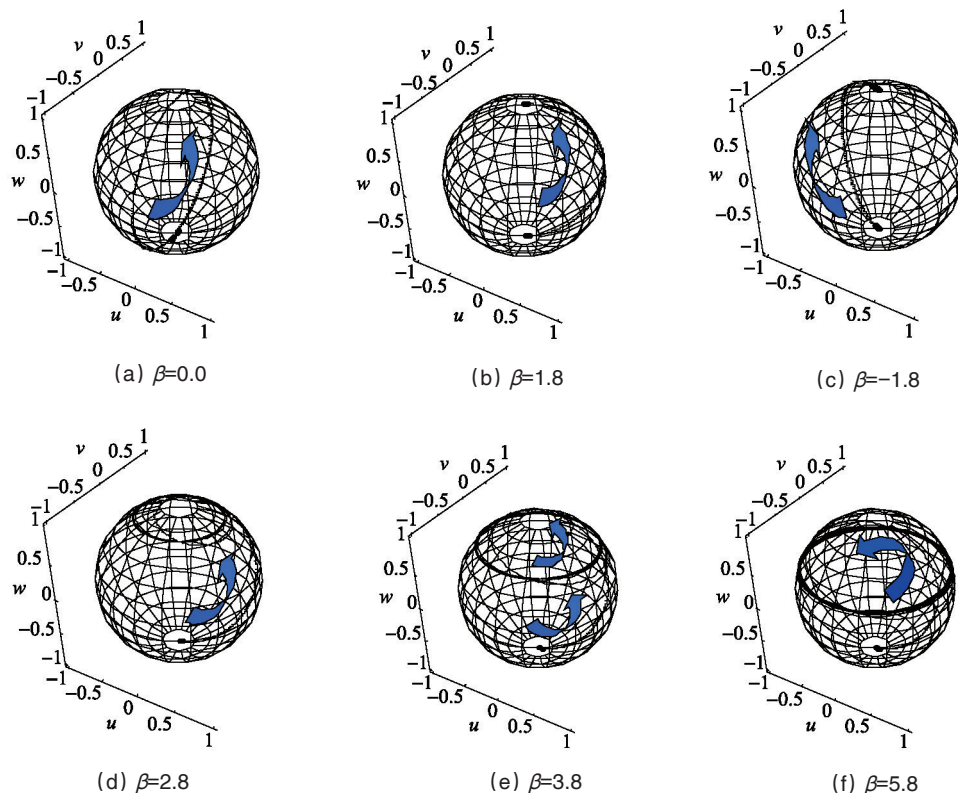


图2 布洛赫矢量在空间随时间的演化过程

Fig. 2 Time evolution of Bloch vectors in the vector-space

图1和图2给出的不同啁啾因子导致的量子变化过程,并不全部满足绝热演化条件。图3给出的是光脉冲的拉比频率和绝热条件随时间的变化关系。从图3(a)可以看出,当取

啁啾场  $\beta=0.5$  时,在整个变化过程中,拉比频率都远大于绝热条件,所以该过程是一个绝热演化过程。但当  $\beta=1.8$  时,尽管拉比频率的取值依然大于绝热条件,但此时绝热条件并

没有很好地被满足,二者的演化关系如图3(b)所示。在这两种情况下,通过微扰理论或其他近似处理方法均可得到方程组(4)的解析解,所得结果与图1和图2中的数值结果完全一致<sup>[5]</sup>。如图3(c)所示,选取啁啾因子 $\beta=3.8$ 时,从拉比频率与绝热条件的演化关系可以看出,在 $t=0$ 时刻,绝热条件大于1,这表明此时的量子演化过程已不再是绝热演化过程。在这种情况下,对方程组(4)的求解只能采用数值求解方法得到其数值解。

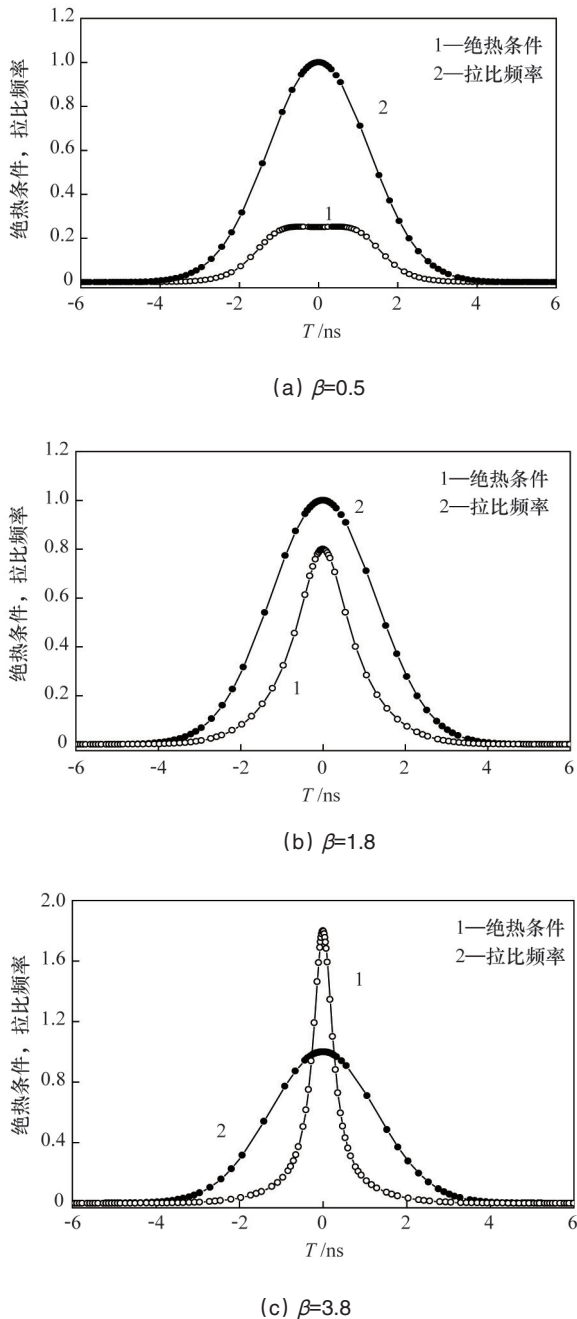


图3 拉比频率、绝热条件与时间的关系

Fig. 3 Relation of Rabi frequency and adiabatic condition with time

### 3 结论

利用密度矩阵的矢量模型方法,研究了二能级系统激发态波函数的时域衍射行为,详细讨论了不同啁啾因子的脉冲光场对波函数时域衍射行为和系统粒子布居转移的作用和影响。对时域衍射行为和粒子布居转移效应中所蕴含的量子作用机理,在布洛赫矢量 $\mathbf{R}$ 的三维 $(u, v, w)$ 空间表象中,通过矢量的空间演化行为进行了动态的全新分析。 $\mathbf{R}$ 矢量的动态演化过程,清晰地呈现了光场的啁啾效应与量子体系综作用时的物理机理和图景。

#### 参考文献 (References)

- [1] Chanu S R, Singh A K, Brun B, et al. Subnatural linewidth in a strongly-driven degenerate two-level system[J]. Optics Communications, 2011, 284(20): 4957-4960.
- [2] Campo A D, García C G, Muga J G. Quantum transients[J]. Physics Reports, 2009, 476(1-3): 1-50.
- [3] Liao P, Yu S, Luo B, et al. Phase-controlled all-optical switching based on coherent population oscillation in a two-level system[J]. Physics Letters A, 2011, 375(47): 4172-4177.
- [4] Rangelov A A, Vitanov N V, Shore B W. Rapid adiabatic passage without level crossing[J]. Optics Communications, 2010, 283(7): 1346-1350.
- [5] Li Y F, Ren L Q, Ma R Q, et al. Quantum diffraction of wave function in time-domain[J]. Science in China, Series G, 2009, 52(6): 873-876.
- [6] Baibekov E, Kurkin I, Gafurov M, et al. Coherence times and Rabi oscillations in  $\text{CaWO}_4: \text{Cr}^{5+}$  crystal[J]. Journal of Magnetic Resonance, 2011, 209(1): 61-68.
- [7] Torosov B T, Vasilev G S, Vitanov N V. Symmetries and asymmetries in coherent atomic excitation by chirped laser pulses[J]. Optics Communications, 2010, 283(7): 1338-1345.
- [8] Djotyan G P, Bakos J S, Sorlei Zs, et al. Coherent control of atomic quantum states by single frequency-chirped laser pulses[J]. Physical Review A, 2004, 70: 063406.
- [9] Zheng H, Zhang X, Zhang Z, et al. Parametric amplification and cascaded-nonlinearity processes in common atomic system[J]. Scientific Reports, 2013, 3: 1885.
- [10] Wollenhaupt M, Präkelt A, Sarpe T C, et al. Femtosecond strong-field quantum control with sinusoidally phase-modulated pulses[J]. Physical Review A, 2006, 73: 063409.
- [11] 朱清时, 史强. 激光场中的量子跃迁动力学[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 2003: 170-176.  
Zhu Qingshi, Shi Qiang. Dynamics of quantum transition in laser fields [M]. Hefei: Anhui Education Press, 2003: 170-176.
- [12] 石顺祥, 陈国夫, 赵卫, 等. 非线性光学[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2003, 229-241.  
Shi Shunxiang, Chen Guofu, Zhao Wei, et al. Nonlinear optics[M]. Xi'an: Xidian University Press, 2003: 229-241
- [13] 伏振兴, 李永放, 张艳丽, 等. 双共振激发多光子电离过程中电离光电子谱的量子相干调制[J]. 光子学报, 2008, 37(7): 1482-1487.  
Fu Zhenxing, Li Yongfang, Zhang Yanli, et al. Quantum coherent modulation on photoelectron spectra in two resonant multi-photon ionization process[J]. Acta Photonic Sinica, 2008, 37(7): 1482-1487.

(编辑 陈华斌)