文章编号: 100120920(2010) 0120157204

基于随机支付的合作博弈分析

王军民, 杜河建
(国防科技大学 信息系统与管理学院, 长沙 410073)

摘 要: 在确定性支付的合作博弈中, Shapley 值以其优良的特性在合作博弈分配解中占据着非常重要的作用, 但现实生活中更多情形下的支付是不确定的,参与人要在这种情形下作出选择. 因此, 基于 Shapley 值的表述公式, 构建基于随机支付的合作博弈模型,构造边际值和转换值两个合作解, 并举例说明随机支付情形下两个解不再相等. 最后, 给出了两个解相等的一个博弈子类.

关键词: 随机支付; 合作博弈; Shapley 值; 边际值; 转换值
中图分类号: F224 文献标识码: A

Analysis of cooperation game with random payoff

WANG Jun2min, DU He2jian
(College of Information Systems and Management, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China. Correspondent: WANG Jun2min, E2mail: junminwang@sina.com)

Abstract: In certain payoff condition, shapley value plays a highly important role in cooperation game allocation solution with its fine characteristic. In real life, the participator should make a decision under the condition of uncertainty payoff. Based on the equivalent formulation of Shapley value, the cooperation game model with random payoff is constructed, and both solution concepts are introduced which are the marginal value and the divided value. An example illustrates that both solution need not be equal, and a subclass of games is presented on which both solution coincide.

Key words: Random payoff; Cooperation game; Shapley value; Marginal value; Divided value

1 引 言

博弈论作为描述现实世界中包含矛盾、冲突、对抗、合作诸因素的理论和方法, 在管理、经济、军事等各个学科领域都得到了迅猛的发展和应用. 合作博弈作为博弈论的一个重要分支, 主要考虑收益如何分配的问题. Shapley[1], Aumann[2], Maschler[3], Schmeidler[4] 等提出了一系列合作博弈的解, 如 Shapley 值、核心、核、稳定解、谈判集等, 建立和完善了合作博弈的值理论. Aumann 和 Schelling 因为在合作博弈领域的研究, 获得了 2005 年诺贝尔经济学奖.

在现实生活中, 很多情形下支付是不确定的, 参与人需要在这种不确定性情形下作出选择. 例如, 两家公司合作一个研究项目, 一般要在这个项目完成后才能知道它的确切支付. 对合作博弈研究的一个重要方面是对其合作解进行各种延拓, 以解决其在实际应用中的困难. 如 Nishizaki[5] 基于线性规划讨论了一类模糊对策解. Cornet[6] 考虑联盟中的成员以一定的隶属度属于联盟, 即把联盟作为模糊集来考虑, 给出了多重线性延拓和 cornet 延拓的方法. Shubik[1] 在研究市场对策时基于完全均衡对策给出了一类模糊延拓方法. Timmer[7] 等对经典合作博弈理论进行了延拓, 以一个随机变量对具有随机支付的合作博弈给出了随机合作解, 但对于支付不确定情形的研究还有待进一步深入.

在确定性支付的合作博弈中, Shapley 值以其优良的特性在合作博弈分配解中具有非常重要的作用. 本文以经典合作博弈 Shapley 值的两种不同表述方式为基础, 构建了基于随机支付的合作博弈模型, 给出了边际值和转换值两个解的概念, 并讨论了其相关特性.

2 基于随机支付的合作博弈模型

收稿日期: 2008212202; 修回日期: 2009205206.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70801062).
作者简介: 王军民(1973—), 男, 江苏南通人, 博士, 从事系统优化与综合集成技术、项目管理等研究; 杜河建(1972—), 男, 湖南常德人, 博士, 从事决策理论与方法等研究.

给定一合作博弈 (N, v), N 是一有限且非空成员集, 这个博弈的特征函数为 2^N 上的实值函数 v B 2^N y R. 对于任意 S A N, $v(S)$ 表示 S 中成员合作所能得到的最大收益, 即 S 中成员无需求助于 S 之外的成员所能得到的收益总量 $v(S)$, 其中 $v(5) = 0$, 5 表示空集.

成员的风险偏好由$(\underset{\sim i}{:})_{i \text{I} N}$ 表述: 若 $X \underset{\sim i}{:} Y$, 则相对于 X 成员 i 更偏好于 Y; 如果 X 与 Y 相对于成员 i 无差别, 则 $X \sim_i Y$, 即 $X \underset{\sim i}{:} Y$ 且 $Y \underset{\sim i}{:} X$; 对于成员 i 若 X 严格优于 $Y(X :_i Y)$, 则 $X \underset{\sim i}{:} Y$ 且 X y$_i Y$.

不失一般性, 记 $|S|$ 为 S 中成员个数, L_+ 为具有有限期望的非负随机变量集, $U = \{S < N \mid R(S) = 0, S = <\}$ 为具有非零支付联盟组成的集. 具有随机支付的合作博弈是指$(N, (R(S)_{s \text{I} U}), (\underset{\sim i}{:})_{i \text{I} N})$, 其中对任意 S A N, $R(S)$ 表示 S 中成员合作所能得到的随机收益.

随机支付 $R(S)$ 给予 S 的一个分配记为 $pR(S)$, 其中 p I R^S, 成员 i 的收益为 $p_i R(S)$. 若 $\underset{i \text{I} S}{E} p_i = 1$, 则称该分配是有效的. 记 $\$^*(S) = \{p$ I $R^S \mid \underset{i \text{I} S}{E} p_i = 1\}$, $A = \{p_i R(S) \mid S$ I U, p_i I $R\}$ 为所有可能分配的集, $A_{-0} = \{p_i R(S)$ I $A \mid p_i$ X $0\}$ 为所有可能非负分配的集.

本文限定讨论的博弈类满足以下两个假设条件:

假设 1 若对某个联盟 T 有 $R(T) = 0$, 则对任意 S A T 都有 $R(S) = 0$.

假设 2 对任意 i I N 存在一个严格单调增的连续函数 f^i B R y R^S, 使得:

1) 对任意 S, T I U, t, tc I R, $f^i_S(t) R(S) \underset{\sim i}{:} f^i_T(tc) R(T)$ 当且仅当 $t \setminus tc$;

2) 对所有 S I U, 有 $f^i_S(0) = 0$.

常见的期望偏好就是假设 2 中 f 的例子. 记 $E(X)$ 表示随机变量 X 的数学期望, 若 $X \underset{\sim i}{:} Y$ 当且仅当 $E(X) \underset{\sim i}{:} E(Y)$, 则对任意 S A N, 相应的 f^i 定义为 $f^i_S(t) = t / E(R(S))$ 即可.

由 f^i 的定义可知: 若 $S = T$, 则 $f^i_S(t) R(S) \underset{\sim i}{:} f^i_S(tc) R(S)$ 当且仅当 $t \setminus tc$, 即从分配 $R(S)$ 中得到更多成员的满意. 对任意 t I R, 有 $f^i_S(t) R(S) \sim_i f^i_S(t) R(T)$.

考虑任意两个分配之间的比较函数 A B A @ A_{-0} y R, 即对任意 i I N, A 使得 $X \sim_i A(X, Y) Y$, 若 $X = p_i R(S)$, $Y = q_i R(T)$, 则对任意 i I S H T, 有 $A(X, Y) = f^i_T((f^i_S)^{-1}(P_i)) / q_i$.

记 G^N 表示所有 N 成员具有随机支付的合作博弈$(N, (R(S)_{s \text{I} U})(\underset{\sim i}{:})_{i \text{I} N})$ 组成的类. GL^N 是 G^N 上 f^i 线性的所组成的子类, 即 GL^N 在 G^N 上对任意成员 i 满足 $A(p_i R(S), q_i R(T)) = (p_i / q_i) A(R(S), R(T))$. 记 GSI^N 是 GS^N 上对于任意 i, j I N 偏好相同的博弈组成的子类, 即对任意 i, j I N, $A_i = A_j$.

3 边际值解和转换值解的构造

构造合作博弈解实际上是构造 G^N 的一个函数 7, 使得对任意的 G I G^N, $7(G)$ 是一个收益分配 $pR(N)$.

记 $0(N)$ 是 N 上所有置换 R B $\{1, 2, , , n\}$ y N 的全体, $S^R_i = \{R(1), R(2), , , R(i)\}$ 且 $S^R_0 = <$. 由文献[1] 可知, R^N 上表征成员 $R(i)$ 贡献的边际向量为 $m^R(v)$, 则 Shapley 值 $<(v)$ 为边际向量 $m^R(v)$ 的平均和. 其中

$$m^R_{R(i)}(v) = v(S^R_i) - v(S^R_{i-1}) = v(S^R_i) - \underset{k=1}{\overset{i-1}{E}} m(S^R_k).$$

Shapley 值 $<(v)$ 可表述为: 对任意 i I N, 有

$$<_i(v) = (n!)^{-1} \underset{R \text{I} 0(N)}{E} m^R_i(v). \tag{1}$$

Harsanyi[8] 对 Shapley 值给出了另外一种表达方式, 记

$$d_S(v) = \begin{cases} v(S), & |S| = 1; \\ |S|^{-1}\left(v(S) - \underset{T \text{A} S}{E} |T| d_T(v)\right), & |S| > 1. \end{cases} \tag{2}$$

则 Shapley 值 $<(v)$ 可表述为: 对任意 i I N, 有

$$<_i(v) = \underset{S \text{B} i \text{I} S}{E} d_S(v). \tag{3}$$

下面首先构造具有随机支付的合作博弈的特征函数 Y^R, 记 $Y^R_{R(1)} = R(\{R(1)\})$.

对任意 i I N, $Y^R_{R(i)}$ 为成员 $R(i)$ 对联盟 S^R_{i-1} 带来的增加的收益. 为表征联盟 S^R_i 的特征函数, 考虑把在 $R(S^R_i)$ 中扣除了联盟 S^R_{i-1} 所有的无差别收益后的剩余, 作为 $R(i)$ 参加联盟 S^R_{i-1} 组建联盟 S^R_i 后带来的收益, 即

$$Y^R_{R(i)} = \left[1 - \underset{k=1}{\overset{i-1}{E}} A_{R(k)}(Y^R_{R(k)}, R(S^R_i))\right] R(S^R_i). \tag{4}$$

由 $Y^R_{R(i)}$ 的构造可知, 对于任意的 i I N, 具有随机支付的博弈 G, 其边际向量 $M^R_i(G) = m^R_i(G) R(N)$, 其中 $m^R_i(G) = A(Y^R_i, R(N))$. 按照 Shapley 值的方式, 构造博弈 G 的边际值 5^m, 其中

$$5^m_i(G) = \left[(n!)^{-1} \underset{R \text{I} 0(N)}{E} m^R_i(G)\right] R(N). \tag{5}$$

对于具有随机支付的博弈 G, 可采用类似 Harsanyi[8] 的方法定义

$$d_S(G)=\begin{cases}R(S), & |S|=1;\\ |S|^{-1}\left[1-\sum_{T\subset S}|T|\,d_T(v)\right], & |S|>1.\end{cases}$$

构造博弈 G 的转换值 φ^d, 其中

$$\varphi_i^d(G)=\left[\sum_{S\ni i,\,S\in\mathcal{S}}\alpha_i(d_S(G),R(N))\right]R(S).\qquad(6)$$

4　关于两个解的讨论

支付为确定性情形时, 边际值与转换值是一致的, 即都是 Shapley 值 $\phi(v)$ (Shapley 值的两种不同表述形式). 但随机支付情形下边际值与转换值是否还是一样的呢? 下面以一个 3 成员具有随机支付的博弈为例, 说明在随机支付情形下边际值与转换值不再保持一致.

算例 1　考虑具有随机支付的博弈

$$G(N,(R(S))_{S\in\mathcal{U}},(\succsim_i)_i),$$

其中 $N=\{1,2,3\}$, $R(\{1\})=R(\{2\})=0$, $R(\{3\})=1$, $R(\{1,2\})=2$, $R(\{1,3\})=3$, $R(\{2,3\})=1$, $R(N)\sim U([3,7])$, $U([3,7])$ 是 $[3,7]$ 上的均匀分布. 显然

$$\mathcal{U}=\{\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{\{2,3\},N\},$$

$$\mathcal{A}=\{pR(S)\mid S\in\mathcal{U},p\in\mathbb{R}\}.$$

记 $\beta_1=\beta_3=1/2$, $\beta_2=1/4$, 且

$$u_\beta^X=\sup\{t\in\mathbb{R}\mid P\{X\le t\}\le\beta\},$$

成员 i 的效用函数为

$$U_i(X)=\begin{cases}u_{\beta_i}^X, & X\ge 0;\\ u_{1-\beta_i}^X, & 其他.\end{cases}$$

成员 i 的偏好为 $X\succsim_i Y$ 当且仅当 $U_i(X)\ge U_i(Y)$, 则相应的

$$\alpha(pR(S),qR(T))=pu_{\beta_i}^{R(S)}/qu_{\beta_i}^{R(T)}.$$

经简单计算可得

$$\varphi^m(G)=(24/60,13/60,23/60)R(N),\qquad(7)$$

$$\varphi^d(G)=(23/60,14/60,23/60)R(N).\qquad(8)$$

很显然, 尽管两个值相差不大, 但仍有区别. 对于具有随机支付的合作博弈, 这两个值在什么情况下是一致的?

定理 1　对任意 $G\in GSI^N$, 有

$$\varphi^m(G)=\varphi^d(G).\qquad(9)$$

证明　不失一般性, 假定 $R(N)\neq 0$, 否则 $\varphi^m(G)=\varphi^d(G)=0$, 不证自明.

首先, 对于 $G\in GSI^N$ 构造一个伴随合作博弈 (N,v), 其中

$$v(S)=\begin{cases}0, & R(S)=0;\\ 1/f_S(1), & R(S)\neq 0.\end{cases}\qquad(10)$$

记 $R\in O(N)$ 是 N 的转置, 下面用归纳法证明 $m^R(G)=m^R(v)/v(N)$.

1) 若 $R(\{R(1)\})\neq 0$, 则

$$m^R_{R(1)}(G)=\alpha_{R(1)}(R(\{R(1)\}),R(N))=$$
$$f_N(1)/f_{\{R(1)\}}(1)=v(\{R(1)\})/v(N)=$$
$$m^R_{R(1)}(v)/v(N);$$

若 $R(\{R(1)\})=0$, 则

$$\alpha_{R(1)}(0,R(N))=m^R_{R(1)}(v)/v(N)=0.$$

2) 注意到

$$Y^R_{R(2)}=[1-\alpha_{R(1)}(R(\{R(1)\}),R(S_2^R))]R(S_2^R),$$

则对 $R(S_2^R)\neq 0$, 有

$$m^R_{R(2)}(G)=\alpha_{R(2)}(Y^R_{R(2)},R(N))=$$
$$[1-f_{S_2^R}(1)/f_{S_1^R}(1)]f_N(1)/f_{S_2^R}(1)=$$
$$[1/f_{S_2^R}(1)-1/f_{S_1^R}(1)]f_N(1)=$$
$$(v(S_2^R)-v(S_1^R))/v(N)=m^R_{R(2)}(v)/v(n);$$

若 $R(S_2^R)=0$, 由于 $m^R_{R(2)}(G)=0=m^R_{R(2)}(v)/v(N)$, 显然成立.

3) 假设对 $i=2,3,\dots,k$, $k<n$, 有

$$Y^R_{R(i)}=[1-f_{S_i^R}(1)/f_{S_{i-1}^R}(1)]R(S_{k+1}^R),$$

且 $R(S_{k+1}^R)\neq 0$, 则

$$Y^R_{R(k+1)}=$$
$$\left[1-\sum_{i=1}^{k}\alpha_{R(i)}(Y^R_{R(i)},R(S^R_{k+1}))\right]R(S^R_{k+1})=$$
$$\Big[1-\alpha_{R(1)}(Y^R_{R(1)},R(S^R_{k+1}))-$$
$$\sum_{i=2}^{k}\alpha_{R(i)}(Y^R_{R(i)},R(S^R_{k+1}))\Big]R(S^R_{k+1})=$$
$$\Big[1-f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_1}(1)-\sum_{i=2}^{k}[1-f_{S^R_i}(1)/f_{S^R_{i-1}}(1)],$$
$$f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_i}(1)\Big]R(S^R_{k+1})=$$
$$\Big[1-f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_1}(1)-\sum_{i=2}^{k}[f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_i}(1)-$$
$$f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_{i-1}}(1)]\Big]R(S^R_{k+1})=$$
$$[1-f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_k}(1)]R(S^R_{k+1}),$$

故有

$$m^R_{R(k+1)}(G)=\alpha_{R(k+1)}(Y^R_{R(k+1)},R(N))=$$
$$[1-f_{S^R_{k+1}}(1)/f_{S^R_k}(1)]f_N(1)/f_{S^R_{k+1}}(1)=$$
$$[1/f_{S^R_{k+1}}(1)-1/f_{S^R_k}(1)]f_N(1)=$$
$$(v(S^R_{k+1})-v(S^R_k))/v(N)=$$
$$m^R_{R(k+1)}(v)/v(N).$$

由上述证明过程可知

$$m^R(G)=m^R(v)/v(N).$$

类似的, 对任意 $i\in N$, 可以证明

$$\alpha(d_S(G),R(N))=d_S(v)/v(N).$$

4) 对任意 $i\in N$, 有

$$\varphi_i^m(G)=\left[(n!)^{-1}\sum_{R\in O(N)}m_i^R(G)\right]R(N)=$$
$$\left[(n!)^{-1}\sum_{R\in O(N)}m_i^R(v)/v(N)\right]R(N)=$$

$$\varphi_i(v)/v(N)R(N) = \Big[\sum_{S \ni i,\, S} d_S(v)/v(N)\Big]R(N) =$$

$$\Big[\sum_{S \ni i,\, S} A_i(d_S(G), R(N))\Big]R(N) = \Phi_i^d(G),$$

即 $\Phi^m(G) = \Phi^d(G)$. □

定理 1 说明, 在随机支付情形下, 若合作博弈的各方对合作的收益分配具有线性效用函数和相同的偏好关系, 则这两种构造方式得到的解是一致的.

5 结 论

本文以经典合作博弈 Shapley 值的两种不同表述方式为基础, 构建了基于随机支付的合作博弈模型, 对具有随机支付情形的合作博弈给出了边际值和转换值, 并用一个实例说明在具有随机支付情形下边际值和转换值不再一致. 最后指出: 在随机支付情形下, 若合作博弈的各方对合作的收益分配具有线性效用函数和相同的偏好关系, 则边际值和转换值是一致的.

参考文献(References)

[1] Shapley L S Shubik. A method for evaluating the distribution of power in committee system[J]. American Political Science Review, 1954, 48(3): 787-792.

[2] Aumann R, Maschler M. The bargaining set for cooperative games [J]. Advances in Game Theory Annals of Mathematics Studies, 1964, 52: 443-476.

[3] Maschler M, Peleg B Shapley L S. Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts [J]. Mathematics of Operations Research, 1979, 4(4): 303-337.

[4] Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function games[J]. SIAM J of Applied Mathematics, 1969, 17(6): 1163-1170.

[5] Nishizaki I, Sakawa M. Solutions based on fuzzy goals in fuzzy linear programming games[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 115(1): 105-119.

[6] Peleg B. Introdution to the theory of cooperative game [M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[7] Timmer J, Borm P, Tijs S. Convexity in stochastic cooperative situations[Z]. Tilburg: Tilburg University, 2000.

[8] Harsanyi J C. A bargaining model for the cooperative n-person game[J]. Annals of Mathematics Studies, 1959, 40(4): 325-355.

[9] Mare M. Fuzzy coalitions structures[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1): 23-33.

[10] Li D F. Fuzzy constrained matrix games with fuzzy payoffs[J]. The J of Fuzzy Mathematics, 1999, 7(4): 873-880.

[11] Suijs J. Cooperative decision-making under risk[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[12] Timmer J, Borm P, Tijs S. On three Shapley-like solutions for cooperative games with random payoffs [J]. Int J of Game Theory, 2004, 32(4): 595-613.

(上接第 156 页)

[2] 汪书苹, 赵争鸣. 带修正因子模糊 PID 控制的 PMSM 交流伺服系统[J]. 清华大学学报, 2007, 47(1): 9-12.
(Wang S P, Zhao Z M. Fuzzy-PID control with tuning factors for PMSM servo system [J]. J of Tsinghua University, 2007, 47(1): 9-12.)

[3] 刘红波, 李少远, 柴天佑. 一种基于模糊切换的模糊复合控制器及其应用[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 615-618.
(Liu H B, Li S Y, Chai T Y. Fuzzy hybrid controller based on fuzzy switching and its application[J]. Control and Decision, 2003, 18(5): 615-618.)

[4] 夏长亮, 郭培健, 史婷娜, 等. 基于模糊遗传算法的无刷直流电机自适应控制[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(11): 129-133.
(Xia C L, Guo P J, Shi T N, et al. Control of brushless DC motor using genetic algorithm based fuzzy controller [J]. Proc of the CSEE, 2005, 25(11): 129-133.)

[5] Sungchul Jee, Yoram Koren. Adaptive fuzzy logiccontroller for feed drives of a CNC machine tool[J]. Mechatronics, 2004, 138(4): 299-326.

[6] Feng Chieh Lin. Adaptive fuzzy logic-based velocity observer for servo motor drives [J]. Mechatronics, 2003, 126(13): 229-241.

[7] Huang S, Nelson R M. Development of a self-tuning fuzzy logic controller[J]. ASHRAE Trans on Research, 1999, 105(1): 206-213.

[8] Zhao J, Wan S Y, Xu J B. Improving performance method for fuzzy control AC speed drive[C]. Proc of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, 2004: 4500-4503.