

---

## 中国科学院自动化研究所

### 2014 年招收攻读博士学位研究生入学统一考试试题

#### 科目名称：数字信号处理

#### 考生须知：

1. 本试卷满分为 100 分，全部考试时间总计 180 分钟。
  2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。
- 

一、[10 分] 已知系统的差分方程  $y(n) - a_1y(n-1) - a_2y(n-2) = u(n)$ ， $y(-1) = 1$ ， $y(-2) = 0$ ，用  $Z$  变换法求  $y(n)$ 。

二、[15 分] 给定一个 LSI 系统，已知其单位抽样响应为  $\{h(n) : n \in Z\}$ ，请证明下面三个条件是等价的：

- 1、系统是稳定的；
- 2、 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < \infty$ ；
- 3、系统的极点都在单位圆内。

三、[10 分] 若连续信号  $x(t)$  是有限带宽的，其频谱的最高频率为  $f_c$ ，对  $x(t)$  进行抽样，抽样频率为  $f_s$ ，当抽样频率大于 Nyquist 采样率时，请给出信号的重建公式，并给出一个频率响应为连续的插值函数的例子。

四、[15 分] 已知  $x(n)$  为  $N$  点序列， $n = 0, 1, \dots, N-1$ ，在  $x(n)$  后补  $(r-1)N$  个零后，其 DTFT 为  $X(e^{j\omega})$ 。现对  $X(e^{j\omega})$  在单位圆上等间隔抽样，得  $Y(k) = X(e^{j\frac{2\pi}{M}k})$ ， $k = 0, 1, \dots, M-1$ ，且  $M < N$ 。设  $Y(k)$  对应的序列为  $y(n)$ ，试用  $x(n)$  表示  $y(n)$ 。

---

五、 [10 分] 证明 FIR 系统  $h(n)$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$ , 具有线性相位的充分必要条件是系统的单位抽样响应满足:

$$h(n) = \pm h(N - 1 - n)$$

六、 [15 分] 一个离散时间系统的状态方程及输出方程分别是:

$$w(n + 1) = Aw(n) + Bx(n)$$

和

$$y(n) = Cw(n) + Dx(n)$$

求该系统单位抽样响应  $h(n)$ 。若  $h(n)$  的  $Z$  变换为  $H(z)$ , 证明  $H(z)$  的极点为矩阵  $A$  的特征值。

七、 [10 分] 假定  $Y(n)$  是方差为 1 的白噪声信号激励一个 LSI 系统后的输出, 并已知功率谱  $P_Y(e^{j\omega}) = (\cos \omega + a)/(\cos \omega + b)$ , 给出  $a$ ,  $b$  满足的条件并求出系统  $H(z)$  (最小线性相位)。

八、 [15 分] 已知广义平稳随机信号  $x(n)$  的  $N$  个观察值,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ , 用下式估计其自相关函数

$$\hat{r}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|m|} x(n)x(n+m)$$

请给出用 FFT 计算  $\hat{r}(m)$  的方法。