

文章编号: 1001-0920(2009)11-1663-05

## 基于递归最小二乘支持向量机的动态系统建模研究

瞿海妮<sup>1</sup>, 许维胜<sup>1</sup>, DREYFUS Gerard<sup>2</sup>

(1. 同济大学 电子信息工程学院, 上海 201804; 2. 巴黎高等理工化工学校, 巴黎 75005)

**摘要:** 针对递归最小二乘支持向量机的递归性易导致建模中偏微分方程组求解困难的问题, 提出用解析法求解偏微分方程组, 实现了完整的递归最小二乘支持向量机模型. 首先分析了各参数的相关性, 然后推导出偏微分方程的解析表达式并求解. 仿真实例表明, 在动态系统建模中, 该模型的性能比常用的串并联模型以及现有不完整递归最小二乘支持向量机模型的精度更高、性能更好.

**关键词:** 递归; 最小二乘支持向量机; 非线性偏微分方程

**中图分类号:** TP18      **文献标识码:** A

## Dynamic system modeling based on recurrent least squares support vector machines

QU Hai-ni<sup>1</sup>, XU Wei-sheng<sup>1</sup>, DREYFUS Gerard<sup>2</sup>

(1. College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Superior Engineering School of Physics and Chemistry, Paris 75005, France. Correspondent: QU Hai-ni, E-mail: hattiequ@126.com)

**Abstract:** For the problem that recurrence leads to the difficulty in finding a solution to partial differential equations in recurrent least square support vector machines regression (RLSSVM), analytical method is proposed to solve the equations, in which recurrence is taken into consideration, so that a complete recurrent least square support vector machines regression is achieved. Relevance between variables is examined, and the partial differential equations are solved in analytical way. Simulation results show that the recurrent model is superior to series-parallel model or other RLSSVM models proposed in recent papers, especially in modeling a system affected by noise.

**Key words:** Recurrence; Least squares support vector machines; Partial differential equation

### 1 引言

神经网络具有能精确逼近任意非线性函数的特性, 近年来已经成为各个领域系统建模的首选工具<sup>[1-4]</sup>. 但是, 由于神经网络存在过拟合以及局部最优等缺陷<sup>[5]</sup>, 其应用受到了一定的限制. 支持向量机<sup>[6]</sup>是基于结构误差最小原则建立的, 避免了对训练样本的过学习而失去鲁棒性, 从根本上克服了神经网络的弱点, 现已成为非线性动态系统建模的研究热点.

最小二乘支持向量机回归, 巧妙地将传统支持向量机的不等式约束转变成等式约束, 使传统支持向量机的二次规划优化问题变成了非线性方程组的求解问题, 使问题求解更加直观和易于实现<sup>[7]</sup>. 当考

虑对动态系统建模时, 动态系统的递归性使得该非线性方程组的求解十分困难. 为此, 孙建成等在文献<sup>[7]</sup>的基础上, 提出了递归最小二乘支持向量机模型(以下简称孙氏递归模型)<sup>[8-10]</sup>, 但其非线性方程组求解并没有充分考虑递归性的影响. 此外, 与递归模型(亦可称为并联模型)相对的串并联模型, 其运算更加直接简单, 在一些领域的动态系统建模中得到了广泛应用<sup>[11,12]</sup>. 因此, 研究完全的递归模型, 并将其与串并联模型在动态系统建模中进行性能比较是值得研究的课题.

本文在最小二乘支持向量机的基础上, 采用解析法成功地解决了递归最小二乘支持向量机建模中存在的非线性方程组求解问题, 提出了完整的递归

收稿日期: 2008-11-24; 修回日期: 2009-04-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70871091).

作者简介: 瞿海妮(1981—), 女, 湖北宜昌人, 博士生, 从事动态系统建模、智能控制理论的研究; 许维胜(1966—), 男, 山东临邑人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制理论、网络控制等研究.

模型(简称本文递归模型),并用仿真实例比较了串并联模型、孙氏递归模型以及本文递归模型对同一系统建模的模型精度.实验表明,本文递归模型的精度最高,在系统存在噪声时优势更为明显.

## 2 最小二乘支持向量机

假定一个非线性系统具有外部激励  $u_k \in R$ , 系统检测输出  $y_k \in R, k = 1, \dots, N, N$  为数据样本数. 拟建立如下一个非线性模型来拟合该非线性系统的动态特性:  $\hat{y}_k = w^T \varphi(z_k) + b, k = 1, \dots, N$ . 其中:  $w$  和  $b$  为待求解的模型参数,  $\varphi(\cdot)$  为选定的非线性函数,  $z_k$  为模型的输入向量,  $\hat{y}_k$  为模型预测输出. 对于串并联模型, 模型输入由检测输出和外部激励构成, 即  $z_k = (y_{k-1}, \dots, y_{k-P}, u_{k-1}, \dots, u_{k-M})$ . 其中:  $P$  为系统阶数,  $M$  为输入滞后阶数. 对于递归模型, 模型输入由模型预测输出与外部激励构成, 即

$$z_k = [\hat{y}_{k-1}, \dots, \hat{y}_{k-P}, u_{k-1}, \dots, u_{k-M}].$$

模型输入的构成是递归模型与串并联模型最大的区别, 这便导致了模型训练时具有不同的复杂度, 以及模型精度上的差异.

非线性系统建模问题可理解成一个二次最优问题, 即在满足一定约束条件时, 对性能指标  $J(w, b, e)$  求最小, 可描述为

$$\min_{w, b, e} J(w, b, e) = \frac{1}{2} w^T w + \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2, \quad (1)$$

其中  $\gamma$  为调节参数, 约束条件为

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= y_k - e_k = w^T \varphi(z_k) + b, \\ k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

建立相应的拉格朗日函数, 形式为

$$\begin{aligned} L(w, b, e; a) &= \\ J(w, b, e) &+ \sum_{i=1}^N \alpha_i [y_i - e_i - w^T \varphi(z_i) - b] = \\ \frac{1}{2} w^T w &+ \frac{\gamma}{2} \sum_{k=1}^N e_k^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_i [y_i - e_i - w^T \varphi(z_i) - b], \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\alpha_i$  为拉格朗日系数,  $i = 1, \dots, N$ . 从而最优化问题(1)的求解便转化为求解拉格朗日函数最小值问题. 对于串并联模型, 根据 KKT(Karush-Kuhn-Tucker) 条件, 可得以下最优化条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(z_i) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_k} = \gamma e_k - \alpha_k = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = y_k - e_k - w^T \varphi(z_i) - b = 0, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

方程组(4)是一个非线性方程组, 用

$$w = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(z_i)$$

消去  $w$ , 并引入核函数

$$K(z_i \cdot z_j) = \varphi(z_i) \cdot \varphi(z_j),$$

则原非线性模型  $\hat{y}_k = w^T \varphi(z_k) + b$  便转化为最小二乘支持向量机

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot K(z_i, z_k) + b,$$

其中参数  $(\alpha, b)$  为方程组(4)的解.

## 3 递归最小二乘支持向量机

与串并联模型相对应的是递归模型. Suykens<sup>[7]</sup> 首先提出了将递归最小二乘支持向量机用于非线性时序系统建模. 根据 KKT 条件, 得到优化问题(1)的最优化条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial w} = w - \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(z_i) = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial b} = \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial e_k} = \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) - b] = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = y_k - e_k - w^T \varphi(z_i) - b = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$k = 1, 2, \dots, N.$$

对于非线性偏微分方程组(5), 由于考虑了递归的存在, 即输入向量由前面  $P$  时刻模型的输出及输入组成,  $z_i = [y_{i-1} - e_{i-1}, \dots, y_{i-P} - e_{i-P}, u_{i-1}, \dots, u_{i-M}]$ , 使得  $\frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) + b]$  的求解需考虑各变量  $w, b, z_i (i = 1, \dots, N)$  与  $e_k (k = 1, \dots, N)$  的相关性, 不再是 0. 因此  $\partial L / \partial e_k \neq \gamma e_k - \alpha_k$ , 方程组求解相对串并联模型更加复杂. 在文献[7]中, Suykens 提出了一个简化情况 ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), 使得  $\partial L / \partial e_k$  的求解在该条件下被简化, 运算复杂度大大降低. 但简化的结果导致模型也具有过拟合的缺陷. 孙建成等<sup>[8-10]</sup> 提出的递归模型没有考虑递归受  $\partial L / \partial e_k$  的影响, 保留了  $\partial L / \partial e_k = \gamma e_k - \alpha_k$  的结果. 为了求解偏微分方程组(5), 本文提出用解析法求解  $\partial L / \partial e_k$ , 有效地解决了由递归造成的求解困难, 使方程组表达清晰, 求解方便. 用该方法求得的模型是完整的递归模型, 是对现有的最小二乘支持向量机模型的有利补充.

### 3.1 变量间的相关性

求解非线性偏微分方程组(5), 最关键的是求解  $\partial L / \partial e_k$ . 根据  $\partial L / \partial e_k$  的表达式, 首先应判断  $w, b, z_i (i = 1, \dots, N)$  与  $e_k (k = 1, \dots, N)$  的相关性.

因为  $w$  和  $b$  是系统模型的参数,模型结构及参数在模型运行时是一定的,不会随模型输出的变化而变化,因此  $w$  和  $b$  与  $e_k(k = 1, \dots, N)$  是无关系的,即

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial e_k} &= 0, k = 1, \dots, N; \\ \frac{\partial b}{\partial e_k} &= 0, k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

不失一般性,假设系统输入滞后阶数  $M = 1$ ,由递归模型的输入向量  $z_i(i = 1, \dots, N)$  的定义  $z_i[y_{i-1} - e_{i-1}, \dots, y_{i-P} - e_{i-P}, u_{i-1}]$ ,可得:

1) 当  $k \in [i - P, i - 1]$ ,即  $i \in [k + 1, k + P]$  时,  $z_i(i = 1, \dots, N)$  与  $e_k$  是相关的,即  $\partial z_i / \partial e_k = [0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0]$ ,第  $i$  个元素为  $-1$ ,其余为  $0$ ;

2) 当  $i \in [1, k]$  或  $i \in [k + 1 + P, N]$  时,  $z_i(i = 1, \dots, N)$  与  $e_k$  是无关系的,即  $\partial z_i / \partial e_k = [0, \dots, 0, 0, \dots, 0]$ .

### 3.2 非线性方程组求解

在了解了变量间的相关性基础上,下面分析偏微分方程组最难的部分,即  $\partial L / \partial e_k$  的求解.由式

(5),  $w$  可由  $w = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi(z_j)$  代替.引入核函数  $K(x, y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ ,则  $\partial L / \partial e_k$  的求解如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial e_k} &= \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) - b] = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \left\{ \sum_{i=1}^K \alpha_i \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) - b] + \right. \\ &\sum_{i=K+1}^{K+P} \alpha_i \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) - b] + \\ &\left. \sum_{i=K+1+P}^N \alpha_i \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_i) - b] \right\} = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \frac{\partial}{\partial e_k} [w^T \varphi(z_{i+k}) - b] = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j [\varphi(z_j)]^T \frac{\partial}{\partial e_k} \varphi(z_{i+k}) = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j [\varphi(z_j)]^T \frac{\partial \varphi(z_{i+k})}{\partial z_{k+i}} \frac{\partial z_{i+k}}{\partial e_k} = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \frac{\partial}{\partial z_{k+i}} \sum_{j=1}^N \alpha_j [\varphi(z_j) \cdot \varphi(z_{i+k})]^T \frac{\partial z_{i+k}}{\partial e_k} = \\ \gamma e_k - \alpha_k &- \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_{k+i}} K(z_{i+k}, z_j) \frac{\partial z_{i+k}}{\partial e_k}. \quad (6) \end{aligned}$$

以 GaussRBF 核函数为例,即

$$K(z_j, z_i) = \exp(-\sigma^2 \|z_j - z_i\|^2).$$

假设  $b_{k,i,j} = \exp(-\sigma^2 \|z_j - z_i\|^2) \cdot (-2\sigma^2)$ ,则式(6)转化为

$$\begin{aligned} \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_{k+i}} e^{-\frac{\|z_j - z_{k+i}\|^2}{\sigma^2}} \frac{\partial z_{k+i}}{\partial e_k} = \\ \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j b_{k,i,j} (z_j(i) - z_{k+i}(i)) = \\ \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j b_{k,i,j} [z_j(i) - y_k^p + e_k]. \quad (7) \end{aligned}$$

将式(7)代入偏微分方程组(5),则拉格朗日函数最小值的最优化条件为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i &= 0, \\ \gamma e_k - \alpha_k - \sum_{i=1}^P \alpha_{i+k} \sum_{j=1}^N \alpha_j b_{k,i,j} [z_j(i) - y_k^p + e_k] &= 0, \\ y_k - e_k - \sum_{i=1}^N \alpha_i K(z_i, z_k) - b &= 0. \quad (8) \end{aligned}$$

方程组(8)是一个可解的解析式非线性方程组,其解  $(\alpha, e, b)$  是构成递归最小二乘支持向量机模型的参数.最后的递归模型表达式为

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^N \alpha_i \cdot K(z_i, z_k) + b, k = 1, 2, \dots, N,$$

其中  $z_i = [y_{i-1} - e_{i-1}, \dots, y_{i-P} - e_{i-P}, u_{i-1}]$ .可采用非线性最小二乘算法求解方程组(8),如 Gauss-Newton法,Levenberg-Marquardt法.算法的收敛性在很大程度上取决于初始值  $(\alpha_0, e_0, b_0)$  的选取.只有方程组对所有变量的 Jacobian 矩阵为非奇异,算法才收敛<sup>[13]</sup>.若 Jacobian 矩阵为奇异,则需重新选取初始值,然后求解.本文中初始值均为随机选取.为保证结论的正确性,每一个结果都是在经过数次初始化的基础上取最优值而得.

### 3.3 解析法求解递归最小二乘支持向量机的特点

经过解析法的一步步分解,原来复杂的偏微分方程组便转化为可求解的非线性方程组的求解问题.用解析法解决递归最小二乘支持向量机建模问题的特点可归纳如下:

1) 对于不同的核函数,其偏微分方程组中  $\partial L / \partial e_k$  的求解有所不同,最终得到的方程组(8)都有  $2N + 1$  个变量,  $2N + 1$  个方程.

2) 因为递归最小二乘支持向量机中的递归导致了最优化问题(1)不再是一个凸二次寻优问题,所以解不一定是唯一解.因此,本文递归模型和孙氏模型都不可避免地存在局部最优.如何获得全局最优解,目前尚未见成熟技术的报道.本文尝试尽量多次初始化,并比较模型的性能,以获得最合适的模

型.与递归模型对应的串并联模型,其解是全局最优解.

3) 最小二乘支持向量机的每一个数据样本都是支持向量,模型不具备稀疏性,从而导致方程组的求解非常费时.针对串并联模型,文献[13]提出了两种最小二乘支持向量机快速稀疏近似算法,以获得解的稀疏性.对于递归模型,还鲜有研究成果报道.由文献[14]可知,目标函数的梯度求解在神经网络训练中最耗时.因此,本文对所提出的递归模型和孙氏模型的方程组,采用解析法代替数值法求解其一阶导数(梯度),从而有效地缓解了程序运行压力,运算速度得到了很大提高.

#### 4 仿真实例及分析

采用一个一阶非线性系统来说明本文方法.该系统的数学表达式源自文献[15].仿真实验分两部分:第1部分验证方法的正确性,将本文递归模型与串并联模型以及孙氏递归模型分别对该一阶非线性系统建模,并比较其精确性;第2部分考虑该系统受到噪声干扰的情况,分别用3个模型对其建模.本实验中递归最小二乘支持向量机模型的核函数为多项式核函数,即 $K(x, y) = (x \cdot y + 1)^n$ ,参数 $n = 2$ ,调节参数 $\gamma = 1$ ,系统阶数 $P = 1$ .模型待定参数 $\alpha, b, e$ 的初始化值分配服从高斯分布,平均值为0,标准差为0.01.串并联模型、孙氏递归模型采用与本文递归模型相同的参数.非线性方程组的求解通过调用Matlab软件中的函数‘fsolve’加以实现,算法采用Gauss-Newton法.硬件环境是Intel Pentium Dual E2160处理器,频率1.8GHz,Matlab7.0版本.

##### 4.1 无噪声一阶非线性系统建模

一阶非线性系统的数学表达式如下:

$$y(k) = \left(1 - \frac{T}{a + by(k-1)}\right)y(k-1) + T \frac{c + dy(k-1)}{a + by(k-1)}u(k-1). \quad (9)$$

其中: $a = -0.139, b = 1.2, c = 5.633, d = -0.326$ ,采样周期 $T = 0.1s$ .输入信号 $u(k)$ 为伪随机信号.

以均方差(Mean squares error)为模型的性能评价指标, TMSE表示模型对训练样本的均方差, VMSE表示对检测样本的均方差.图1显示了递归模型对系统输出的预测曲线以及系统实际输出.可以看出,模型的预测曲线与实际输出曲线几乎完全拟合,表明本文提出的建模方法是正确可行的.将学习样本分别训练串并联模型和孙氏递归模型,模型的核函数及其参数均与本文递归模型一致,训练结果如表1所示.由表1可知:串并联模型的精度比递归模型稍低一些,其主要原因是串并联模型的输入

由前一时刻的测量输出与外部激励组成,而系统输入则由前一时刻的系统输出与外部激励组成.如果测量存在误差或外部有噪声干扰,则测量输出不能准确代表系统行为,因此串并联模型的预测精度较低.孙氏递归模型的精度最差,其主要原因是在 $\partial L / \partial e_k$ 的求解中没有考虑递归的影响,而模型本身是递归模型,因此该递归模型的递归性是不完整的,导致了模型不能完全拟合系统的特点.

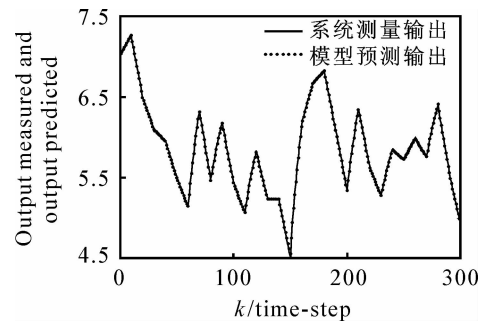


图1 递归模型输出信号与原始系统输出比较

表1 模型性能比较

模型种类	TMSE	VMSE
本文递归模型	0.0132	0.0132
孙氏递归模型	0.0266	0.0285
串并联模型	0.0150	0.0138

##### 4.2 有噪声干扰一阶非线性系统

根据文献[16],按照噪声对系统干扰的不同形式,可将噪声分为输出噪声和状态噪声.本文仅考虑输出噪声的影响,状态噪声将成为后续研究工作的主要内容.

输出噪声对系统信号的污染体现在系统输出的测量中含有误差,但系统的输入信号并未受此测量误差的影响.以一个二阶系统为例,表达如下:

$$\begin{aligned} x(k) &= \varphi[x(k-1), x(k-2), u(k-1)], \\ y(k) &= x(k) + w(k), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $w(k)$ 为白噪声.从式(10)可以看出,时刻 $k$ 的输出噪声只对该时刻的系统输出信号有污染,对以后的输出信号是没有影响的.状态变量 $x(k)$ 代表未受污染的系统输出.根据文献[17]中对合理模型的定义,对一个系统建模的目的就是找寻一个模型,使其输出与系统测量到的输出之间的误差正好与施加到系统上的噪声在统计意义上等价,这样的模型就是一个理想的模型.假设施加到该一阶非线性系统上的输出噪声分布为高斯分布,均值为0,标准差为0.1,系统参数仍与前一个实验相同.

分别采用本文递归模型、孙氏递归模型和串并联模型对训练样本进行学习,模型均采用与上一个实验相同的参数,模型的训练及检验结果如表2所

示. 输出噪声在训练阶段以及检验阶段的标准差精确值也列入表 2. 经过比较可以明显看出, 串并联模型和孙氏递归模型的均方差均比实际噪声标准差大, 这表明模型的误差不仅是由噪声引起的, 还源于对系统的不精确建模. 本文递归模型在训练阶段和检验阶段, 模型输出与系统输出之间的误差均方差与噪声标准差几乎一致, 说明模型已经正确预测了系统的输出, 完全拟合了系统的动态行为, 是理想的模型.

表 2 模型性能比较

模 型	噪声标准差 (训练阶段)	噪声标准差 (检验阶段)	TMSE	VMSE
串并联模型	0.10083	0.10335	0.1378	0.1513
本文递归模型	0.10083	0.10335	0.0984	0.1090
孙氏递归模型	0.10083	0.10335	0.1093	0.1154

## 5 结 论

递归最小二乘支持向量机, 最早由 Suykens<sup>[7]</sup> 提出并应用于非线性系统建模, 尤其是对时间序列的预测. 然而, 其中递归性导致的求解偏微分方程组的困难, 使得目前大部分的研究都回避递归的影响, 递归模型并没有得到真正的应用. 本文采用解析法成功地求解出偏微分方程组的解, 得到了递归最小二乘支持向量机模型, 并用两个仿真实例比较了本文的递归模型、串并联模型以及孙氏递归模型在建模中的性能. 实验结果表明, 在动态系统建模中, 本文递归模型比现有这些模型的精度高, 在噪声环境中其优势更为明显. 在今后的工作中, 递归最小二乘支持向量机的全局最优问题和解的稀疏性问题, 值得进一步研究.

## 参考文献 (References)

- [1] 李鸿儒, 顾树生, 邓光辉. 递归神经网络的 RPE 算法及其在非线性动态系统建模中的应用[J]. 东北大学学报, 2000, 21(6): 590-593.  
(Li H R, Gu S S, Deng C H. Recursive prediction error algorithm of recurrent neural networks and its application on nonlinear dynamic system modelling[J]. J of Northeastern University, 2000, 21(6): 590-593.)
- [2] 李冬梅, 伞冶. 连续非线性动态系统建模的模糊神经网络方法[J]. 控制与决策, 2003, 18(6): 661-666.  
(Li D M, San Y. Modeling of nonlinear continuous time dynamic system with fuzzy neural networks[J]. Control and Decision, 2003, 18(6): 661-666.)
- [3] 郁俊莉. 基于混沌时间序列的非线性动态系统神经网络建模与预测[J]. 武汉大学学报, 2005, 51(3): 286-290.  
(Yu J L. Modeling and forecasting of the nonlinear dynamic system neural network based on the chaotic time series[J]. J of Wuhan University, 2005, 51(3): 286-290.)
- [4] 黄聪明, 李志坚. 基于改进的递归神经网络的化工动态系统建模[J]. 北京理工大学学报, 2004, 24(7): 596-599.  
(Huang C M, Li Z J. Modeling of chemical dynamic systems based on modified recursive neural network structures[J]. J of Beijing Institute of Technology, 2004, 24(7): 596-599.)
- [5] 相征, 张太镒. 基于最小二乘支持向量机的非线性系统建模[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(9): 2684-2687.  
(Xiang Z, Zhang T Y. Modelling of nonlinear systems based on recurrent least squares support vector machines [J]. J of System Simulation, 2006, 18(9): 2684-2687.)
- [6] Corinna Cortes, Vladimir Vapnik. Support-vector networks[J]. Machine Learning, 1995, 20(3): 273-297.
- [7] Suykens J A K, Vandewalle J. Recurrent least squares support vector machines[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems-Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(7): 1109-1114.
- [8] Sun J C, Zhou Y T, Bai Y H, et al. Nonlinear noise reduction of chaotic time series based on multi-dimensional recurrent least squares support vector machines [J]. Neurocomputing, 2008, 71(16): 3675-3679.
- [9] Sun J C, Yu L, Yang G, et al. Modeling of chaotic systems with recurrent least squares support vector machines combined with stationary wavelet transform [C]. Int Symposium on Neural Networks No2. Chongqing, 2005: 424-429.
- [10] Sun J C, Zhang T Y, Liu F. Modeling of chaotic systems based on modified weighted recurrent least squares support vector machines [J]. Chinese Physics, 2004, 13(12): 2045-2052.
- [11] Oliver Nelles. On training radial basis function networks as series-parallel and parallel models for identification of nonlinear dynamic systems [C]. IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. America: IEEE Press, 1995: 4609-4614.
- [12] Chun-Hua Li, Xin-Jian Zhu, Guang-Yi Cao. Identification of the hammerstein model of a PEMFC stack based on least squares support vector machine [J]. J of Power Source, 2008, 175(1): 303-316.
- [13] Licheng Jiao, Liefeng Bo, Ling Wang. Fast sparse approximation for least squares support vector machine [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2007, 18(3): 685-697.