文章编号: 1001-0920(2009)09-1402-04

一种基于区间数判断矩阵的加权AIP群决策方法

陈 可, 陈晓红
(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘 要: 针对决策过程中区间数更适合表达决策者对候选方案的偏好程度,基于区间数判断矩阵,综合考虑决策者个体权重,扩展"和积法",应用"相对熵"的概念,提出了一种加权个体方案权重集结的群体决策方法. 该方法将中间结果转化为实数型再进行集结,避免了决策者判断信息的丢失. 最后,通过算例说明了该方法的可行性和有效性.

关键词: 区间数判断矩阵; 群决策; 个体方案权重集结
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

A new method of AIP group decision-making with decision-makers' weight based on interval judgement matrices

CHEN Ke, CHEN Xiao-hong
(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: CHEN Ke, E-mail: chenke@mail.csu.edu.cn)

Abstract: In decision-making process, interval number can express decision-maker's individual priorities more appropriately. Therefore, an aggregation of individual priorities (AIP) group decision-making method with decision-makers' weight based on interval judgement matrices is introduced. In the algorithm, the middle results are transformed to real number and aggregated, which can avoiding the loss of decision-maker's judgement. Finally, a numerical example shows the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: Interval judgement matrices; Group decision-making; Aggregation of individual priorities

1 引 言

在群决策问题的研究中,有时决策者无法直接给出方案(或属性)的评分值(或效用值),需要根据自己的偏好,通过进行两两方案(或属性)的比较来获得它们的权重,其结果可得到偏好信息判断矩阵;然后集结群体成员的偏好以形成群的偏好;最后据此进行方案排序. 目前群偏好集结的方法主要有两类:一类是个体判断矩阵集结法(AIJ),先将各决策者个体偏好信息判断矩阵集结为群体综合偏好信息判断矩阵,再对该综合判断矩阵求对应的方案权重向量;另一类是个体方案权重向量集结法(AIP),先对各决策者给出的判断矩阵计算对应的方案权重向量,再将所有决策个体的方案权重向量集结为群体的方案权重向量.

在实际的群决策过程中,客观事物的复杂性和不确定性以及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性,导致人们更喜好用区间数来表达自己对问题认识和判断的模糊偏好信息. 20世纪80年代, Saaty等[1]在层次分析法中引进了不确定型区间判断的概念,在此基础上,许多专家学者提出了一些基于区间数判断矩阵的群决策方法:文献[2]利用算子完成决策者偏好信息的集结;[3,4]分别利用误差传递理论、集值统计原理,将区间数偏好信息转换为确定性的偏好信息再进行决策;[5]给出了基于群组满意度最大的相对熵最优化偏好集结模型,以解决群决策中区间数判断矩阵偏好信息的集结问题;[6,7]也提出了几种群组区间数判断矩阵的集结方法及群组判断的基本一致性协调方法. 在这些基于区间数判断矩阵的群决策问题研究中,应用AIJ方法进行集结的多,而应用AIP原理进行集结的较少.

参与群决策的决策者个人由于其经验、才智、权力等因素的不同,在实际决策过程中将拥有不同的决策权重,因此在集结各决策个体的方案权重向量时,必须考虑决策者个体权重因素. 本文基于区间数

收稿日期: 2008-09-28; **修回日期**: 2008-12-01.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70631004); 国家自然科学基金项目(70871121).
作者简介: 陈可(1970—),女,长沙人,副教授,博士生,从事决策理论与方法的研究; 陈晓红(1963—),女,南昌人,教授,博士生导师,从事决策支持系统、群决策等研究.

判断矩阵,在引入决策者个体权重因素的基础上,应用相对熵集结模型[8],构造了一种加权 AIP 群体决策的方法.

2　预备知识

对于一个基于 AHP 法的群体决策问题,设备选方案集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,第 i 方案对第 j 方案的相对重要性的判断值记为 a_{ij};有 m 个决策人组成决策群体 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$.

定义 1　设 $a_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U] = \{a_{ij} \mid 0 < a_{ij}^L \le a_{ij} \le a_{ij}^U\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$,则称 a_{ij} 为一个正闭区间数.

定义 2[9]　设 $a = [a^L, a^U]$ 和 $b = [b^L, b^U]$ 为任意两个正闭区间数,根据扩展原理,关于区间数的运算法则如下:

1) $a + b = [a^L + b^L, a^U + b^U]$;

2) $a - b = [a^L - b^U, a^U - b^L]$;

3) $a \cdot b = [a^L \cdot b^L, a^U \cdot b^U]$;

4) $a \div b = [a^L / b^U, a^U / b^L]$;

5) $ka = [ka^L, ka^U]$, k 为任意实数且 $k > 0$;

6) $1/a = [1/a^U, 1/a^L]$.

定义 3　假设第 $k(k = 1, 2, \cdots, m)$ 个决策者 d_k 对 n 个备选方案$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$进行两两比较,给出判断矩阵 $A(k) = (a_{ij}(k))_{n\times n}$,如果对任意的 $i, j = 1, 2, \cdots, n$ 均有

$$
\begin{aligned}
&a_{ij}(k) = [a_{ij}^L(k), a_{ij}^U(k)],\\
&1/9 \le a_{ij}^L(k) \le a_{ij}^U(k) \le 9;\\
&a_{ji}(k) = [1/a_{ij}^U(k), 1/a_{ij}^L(k)],\\
&a_{ii}(k) = [1, 1],
\end{aligned}
$$

则 $A(k)$ 为区间数互反判断矩阵.

定义 4(区间数大小比较)　设 $a = [a^L, a^U]$ 和 $b = [b^L, b^U]$ 为任意两个正闭区间数,两个区间数之间主要有不相交、相交以及包含 3 种关系.

1) 两个区间不相交:

$$a \succ b, \text{ if } a^L \ge b^U.$$

2) 两个区间相交:

$$
\begin{cases}
a = b, \text{ if } a^U = b^U \text{ 且 } a^L = b^L;\\
a \succeq b, \text{ if } a^U \ge b^U \text{ 且 } a^L \ge b^L;\\
a \succ b, \text{ if } a \succeq b \text{ 且 } a \ne b.
\end{cases}
$$

3) 两个区间包含[10]:

$$P(a \ge b) = \min\left\{\max\left\{\frac{a^U - b^L}{(a^U - a^L) + (b^U - b^L)}, 0\right\}, 1\right\}.$$

则有

$$
\begin{cases}
a = b, \text{ if } p(a \ge b) = 0.5;\\
a \succ b, \text{ if } 1 \ge p(a \ge b) > 0.5;\\
a \prec b, \text{ if } 0.5 > p(a \ge b) \ge 0.
\end{cases}
$$

该判别标准可作为区间数比较的通式.

定义 5[8]　设 $x_i \ge 0, y_i \ge 0, i = 1, 2, \cdots, n$ 且 $1 = \sum_{i=1}^n x_i \ge \sum_{i=1}^n y_i$,则称 $E(X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i/y_i) \ge 0$ 为 X 对于 Y 的相对熵,其主要性质为

$$
\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i/y_i)
\begin{cases}
\ge 0;\\
= 0, \text{ 当且仅当 } x_i = y_i.
\end{cases}
$$

3　决策个体区间数判断矩阵方案权重向量的计算方法

传统 AHP 法通过求解判断矩阵的特征向量获得各方案权重向量. 由于高阶多项式不易求解,在实际应用中往往利用判断矩阵的行向量或列向量标准化方法求得对应判断矩阵的近似方案权重向量,但这些方法往往仅用于确定值判断矩阵的求解. 本文针对区间数判断矩阵,考虑评价指标类型的不同,使用“和积法”对标准化方法进行扩展,将决策矩阵 $A(k) = (a_{ij}(k))_{n\times n}$ 规范化为 $B(k) = (b_{ij}(k))_{n\times n}$,其中 $b_{ij}(k) = [b_{ij}^L(k), b_{ij}^U(k)]$. 具体步骤如下:

Step1: 对判断矩阵的每一列元素进行规范化处理,其元素一般项为

$$
b_{ij}(k) =
\begin{cases}
a_{ij}(k) \Big/ \sum_{i=1}^n a_{ij}(k), \text{ 效益型指标;}\\
\dfrac{1}{a_{ij}(k)} \Big/ \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{a_{ij}(k)}, \text{ 成本型指标.}
\end{cases}
\tag{1}
$$

根据定义 2,式(1)可细化为:

1) 效益型指标

$$
\begin{cases}
b_{ij}^L(k) = a_{ij}^L(k) \Big/ \sum_{i=1}^n a_{ij}^U(k),\\
b_{ij}^U(k) = a_{ij}^U(k) \Big/ \sum_{i=1}^n a_{ij}^L(k);
\end{cases}
\tag{2}
$$

2) 成本型指标

$$
\begin{cases}
b_{ij}^L(k) = \dfrac{1}{a_{ij}^U(k)} \Big/ \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{a_{ij}^L(k)},\\
b_{ij}^U(k) = \dfrac{1}{a_{ij}^L(k)} \Big/ \sum_{i=1}^n \dfrac{1}{a_{ij}^U(k)}.
\end{cases}
\tag{3}
$$

Step2: 将每一列经规范化后的判断矩阵按行相加为

$$W(k) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(k), \tag{4}$$

其中 $k = 1, 2, \cdots, m$ 代表各决策者. 根据定义 2, W_k 各元素 $w_i(k) = [w_i^L(k), w_i^U(k)]$ 的计算可细化为

$$
\begin{cases}
w_i^L(k) = \sum_{j=1}^n b_{ij}^L(k),\\
w_i^U(k) = \sum_{j=1}^n b_{ij}^U(k).
\end{cases}
\tag{5}
$$

Step3: 对各向量 W_k 进行规范化处理,其元素

一般项为

$$w_i(k) = w_i(k) / \sum_{i=1}^{n} w_i(k), \tag{6}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n$ 代表各方案. 根据定义 2,式(6)可细化为

$$\begin{cases} w_i^L(k) = w_i^L(k) / \sum_{i=1}^{n} w_i^U(k), \\ w_i^U(k) = w_i^U(k) / \sum_{i=1}^{n} w_i^L(k). \end{cases} \tag{7}$$

在获得各决策者个体的方案权重向量以后,可根据定义 4 得到各决策者的排序结果,并且容易判别各决策者的偏好结果是否一致. 当各决策者偏好结果一致时,其集结方式很简单,可以采取加权算术平均综合集结法来得到群体关于方案集的最终排序结果. 然而,在很多群决策问题中,较难得到所有决策者偏好完全一致的结果,此时,可采用下面方法予以处理.

4 决策群体不一致偏好的集结方法

文献[11]对区间比较值的不同分布情况进行研究,得出结论"大多数决策者认为区间中点值更满意",这与人们的一般认识相符合. 依此研究结论,同时为了简化群组偏好集结的计算,不妨将各决策者的方案权重向量中各元素$[w_i^L(k), w_i^U(k)]$(区间数)均用中点值$(w_i^L(k) + w_i^U(k))/2$(实数)表示. 设备选方案集为 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$,决策人组成决策群体 $D = \{d_1, d_2, \cdots, d_m\}$,集合 $\lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1,2,\cdots,m$ 是决策者的权重集合,λ_k 对应于第 k 个决策人的权重,并满足 $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$. 设集结后的最终方案权重向量为 $W_{GM} = (w_{GM1}, w_{GM2}, \cdots, w_{GMn})^T$.

由于各决策者之间存在利益或意见冲突,要得出决策结果,群体只能寻找妥协或一致. 因此,寻找妥协或一致是群体决策的主要目标,即极小化群组决策结果与个人偏好不一致的可能性. 依据此决策目标,借助"相对熵"概念,群组区间数判断矩阵的集结可转化为对以下非线性规划模型 P1 的求解:

P1

$$\min z = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Big[\sum_{i=1}^{n} (\ln w_{GMi} - \ln w_i(k)) * w_{GMi} \Big];$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} w_{GM_i}^* = 1,\ w_{GM_i}^* > 0. \tag{8}$$

根据文献[8],P1 有全局最优解 $W_{GM}^* = (w_{GM1}^*, w_{GM2}^*, \cdots, w_{GMn}^*)^T$,其中

$$w_{GM_i}^* = \prod_{k=1}^{m} (w_i(k))^{\lambda_k} / \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} (w_i(k))^{\lambda_k}. \tag{9}$$

对结果向量 $W_{GM}^* = (w_{GM1}^*, w_{GM2}^*, \cdots, w_{GMn}^*)^T$ 中 $w_{GM_i}^*$ 的大小进行排序,所得即为决策方案集 X 的最终排序结果.

5 算 例

某决策问题有 3 个备选方案 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$,有 3 个决策者 $D = \{d_1, d_2, d_3\}$,其决策权重分别为 $\lambda = \{0.2, 0.5, 0.3\}$,3 个决策者分别给出的基于效益型评价指标的区间数互反判断矩阵 A_1, A_2, A_3 如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} [1,1] & [2.5,3.5] & [1.5,2.5] \\ [0.29,0.4] & [1,1] & [0.7,0.9] \\ [0.4,0.67] & [1.11,1.43] & [1,1] \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} [1,1] & [3,4] & [2,3] \\ [0.25,0.33] & [1,1] & [0.6,0.8] \\ [0.33,0.5] & [1.25,1.67] & [1,1] \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} [1,1] & [3.5,4.5] & [1,2.5] \\ [0.22,0.29] & [1,1] & [2,3] \\ [0.4,1] & [0.33,0.5] & [1,1] \end{bmatrix}.$$

群决策过程如下:

Step1: 通过第 3 节所述方法计算 A_1, A_2, A_3 对应的方案权重向量,得到

1) $W_1 = ([0.321, 0.919], [0.120, 0.317], [0.156, 0.439])^T$,对应方案排序结果为 $x_1 \succ x_3 \succ x_2$;

2) $W_2 = ([0.376, 0.928], [0.110, 0.259], [0.153, 0.380])^T$,对应方案排序结果为 $x_1 \succ x_3 \succ x_2$;

3) $W_3 = ([0.274, 1.021], [0.133, 0.534], [0.090, 0.456])^T$,对应方案排序结果为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$.

显然,决策者 d_3 得到方案的排序结果与决策者 d_1 和 d_2 不一致.

Step2: 取各决策者方案权重向量各元素区间值的中点值,将 W_1, W_2, W_3 分别转化为 W_1', W_2', W_3' 如下:

$$W_1' = (0.620,\ 0.219,\ 0.298)^T,$$
$$W_2' = (0.652,\ 0.185,\ 0.267)^T,$$
$$W_3' = (0.648,\ 0.334,\ 0.273)^T.$$

Step3: 使用式(9)对 W_1', W_2', W_3' 进行集结,得到最终各方案权重向量及排序结果为

$$W_{GM} = (0.637,\ 0.098,\ 0.265)^T,$$
$$x_1 \succ x_3 \succ x_2.$$

6 结 论

本文混合"和积法"和区间数运算法则,对求解判断矩阵方案权重向量的标准化方法进行扩展. 应用相对熵集结模型,并考虑决策者个体的不同权重

因素,采用 AIP 集结原理,构造了一种加权 AIP 群体决策的方法. 该方法基于区间数判断矩阵,在得到各决策者的个体方案权重向量结果后,将中间结果转化为实数型再进行集结,避免了决策者判断信息的丢失,解决了决策群体偏好不一致的问题.

参考文献(References)

[1] Saaty T L, Vargas L G. Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process [J]. European J of Operational Research, 1987, 32(1): 107-117.

[2] 朱建军, 刘思峰, 王翯华. 群决策中两类三端点区间数判断矩阵的集结方法[J]. 自动化学报, 2007, 33(3): 297-301.
(Zhu J J, Liu S F, Wang H H. Aggregation approach of two kinds of three-point interval number comparison matrix in group decision making[J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(3): 297-301.)

[3] 吴江. 群组区间数互补判断矩阵偏好信息的一种集结方法[J]. 系统工程理论方法应用, 2004, 13(6): 500-503.
(Wu J. An aggregation method for group preference information of interval number complementary judgement matrices[J]. Systems Engineering — Theory Methodology Applications, 2004, 13(6): 500-503.)

[4] 李炳军, 刘思峰. 一种基于区间数判断矩阵的群决策新方法[J]. 中国管理科学, 2004, 12(6): 109-112.
(Li B J, Liu S F. A new method on group decision-making with interval-number judgment matrices [J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(6): 109-112.)

[5] 冯向前, 魏翠萍, 李宗植. 基于群组满意度最大的区间偏好信息集结[J]. 系统工程, 2006, 24(11): 42-45.
(Feng X Q, Wei C P, Li Z Z, et al. Aggregating of interval number judgment matrices with maximum satisfaction[J]. Systems Engineering, 2006, 24(11): 42-45.)

[6] 翟晓燕, 张新政. 群决策中区间数判断矩阵的集结及权重的计算[J]. 系统工程, 2005, 23(9): 103-107.
(Zhai X Y, Zhang X Z. The methods on aggregation of interval number judgment matrices and calculation of its priorities in the group decision-making [J]. Systems Engineering, 2005, 23(9): 103-107.)

[7] 翟晓燕, 张新政. 群组决策中判断的一致性协调与方案排序[J]. 系统工程, 2004, 22(12): 96-100.
(Zhai X Y, Zhang X Z. Consistency coordination for judgment and the projects ranking in the group decision making[J]. Systems Engineering, 2004, 22(12): 96-100.)

[8] 魏存平, 邱菀华, 杨继平. 群决策问题的 REM 集结模型[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 19(8): 38-41.
(Wei C P, Qiu W H, Yang J P. Minimum relative entropy aggregation model on group decision making [J]. Systems Engineering — Theory and Practice, 1998, 19(8): 38-41.)

[9] Sengupta A, Pal T K. On comparing interval numbers [J]. European J of Operational Research, 2000, 127(1): 28-43.

[10] Nakahara Y, Sasaki M, Gen M. On the linear programming problems with interval coefficients[J]. Int J of Computer Industrial Engineering, 1992, 23(3): 301-304.

[11] Hauser D, Tadikamalla D. The analytic hierarchy process in an uncertain environment: A simulation approach[J]. European J of Operational Research, 1996, 91(1): 27-37.

下　期　要　目