文章编号: 1001-0920(2009)09-1398-04

一种基于直觉模糊集相似度的多属性决策方法

龚艳冰[1], 丁德臣[2], 何建敏[2]
(1. 河海大学 商学院, 江苏 常州 213022; 2. 东南大学 经济与管理学院, 南京 211189)

摘 要: 直觉模糊集(IFS)是对模糊集理论的一种扩充,能更好地处理模糊概念. 首先给出一种新的直觉模糊集相似度;然后提出基于直觉模糊集相似度的多属性决策方法;最后通过线性目标规划模型和直觉模糊集相似度,得到属性的最优权重和相应的方案排序. 数值实例表明,该方法是有效而可行的.

关键词: 直觉模糊集; 多属性决策; 相似度
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Multi-attribute decision making method based on similarity measures of intuitionistic fuzzy sets

GONG Yan-bing[1], *DING De-chen*[2], *HE Jian-min*[2]
(1. School of Business, Hohai University, Changzhou 213022, China; 2. School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China. Correspondent: GONG Yan-bing, E-mail: yanbg79@163.com)

Abstract: The concept of intuitionistic fuzzy sets(IFS) is the generalization of the concept of fuzzy sets, which can deal with vagueness better. Firstly, a new similarity measure is proposed. Then multi-attribute decision making method based on the similarity measures of IFS is proposed. The linear goal programming model and the similarity measure of IFS are constructed to determine the weight vector of attributes and then to rank the alternatives. A practical example shows the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: Intuitionistic fuzzy set; Multi-attribute decision making; Similarity measures

1 引 言

Zadeh 模糊集理论可描述外延不分明的亦此亦彼的模糊概念. Atanassov 直觉模糊集(IFS)[1,2] 增加了一个新的属性参数——非隶属度函数,因而可描述非此非彼的模糊概念,更加细腻地刻画客观世界的模糊性本质,是对 Zadeh 模糊集理论的扩充和发展. 目前,关于直觉模糊集的理论研究主要集中在纯数学领域,关于直觉模糊集的应用研究还处于起始阶段.

Szmidt 等讨论了直觉模糊集之间的距离,并用直觉模糊集建立了具有模糊信息的软决策模型,提出直觉模糊核和少数服从多数的群决策方法[3-7]. Biswas 等使用直觉模糊关系的合成方法,研究了药物诊断的决策问题[8]. 如何应用直觉模糊集研究模糊多属性或多准则决策是一个值得探讨的问题. 关于这方面的研究成果还比较少.

最近,Li 提出一种应用直觉模糊集研究多属性决策问题的方法,该方法通过直觉指数加权平均最大化和距离测度,得到最优属性权重和方案的排序结果[9]. Li 方法虽然简单,但确定的最优权重向量具有片面性,反映的决策信息较少. 为此,本文提出一种基于直觉模糊集相似度的多属性决策方法,通过建立线性目标规划模型和直觉模糊集相似度,得到属性的最优权重和相应的方案排序.

2 直觉模糊集的定义和相似度

定义 1[1] 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是给定的论域,则 X 上的一个直觉模糊集 A 具有下列形式:

$$A = \{\langle x_i, t_A(x_i), f_A(x_i)\rangle \mid x_i \in X\}, \quad (1)$$

其中 $t_A(x_i): X \to [0,1]$ 和 $f_A(x_i): X \to [0,1]$ 分别表示 A 的隶属函数 $t_A(x_i)$ 和非隶属函数 $f_A(x_i)$,且对于 A 上的所有 $x_i \in X$, $0 \leq t_A(x_i) + f_A(x_i) \leq 1$ 成立.

$$\pi_A(x_i) = 1 - t_A(x_i) - f_A(x_i) \quad (2)$$

称为 A 的直觉指数,它是 x_i 对 A 的犹豫程度的一种

收稿日期: 2008-09-15; **修回日期**: 2008-12-21.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70671025).
作者简介: 龚艳冰(1979—),男,江苏靖江人,讲师,博士,从事系统工程、决策与优化的研究; 何建敏(1956—),男,江苏无锡人,教授,博士生导师,从事管理科学与工程等研究.

测度. 显然,对于每个 $x_i \in X, 0 \le \pi_A(x_i) \le 1$. 对于 X 中的每个 Zadeh 模糊子集 $A, \pi_A(x_i) = 1 - t_A(x_i) - [1 - t_A(x_i)] = 0$.

定义 2[10]　已知映射

$$S: \mathrm{IFS}(X) \times \mathrm{IFS}(X) \to [0,1], \tag{3}$$

称 $S(A,B)$ 为直觉模糊集 $A \in \mathrm{IFS}(X)$ 与 $B \in \mathrm{IFS}(X)$ 的相似度,如果 $S(A,B)$ 满足下列性质:

1) $0 \le S(A,B) \le 1$;

2) 如果 $A = B$,则 $S(A,B) = 1$;

3) $S(A,B) = S(B,A)$;

4) 如果 $A \subseteq B \subseteq C, A, B, C \in \mathrm{IFS}(X)$,则 $S(A,C) \le S(A,B), S(A,C) \le S(B,C)$.

对于论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的任意两个直觉模糊集 $A = \{\langle x_i, t_A(x_i), f_A(x_i)\rangle \mid x_i \in X\}$ 和 $B = \{\langle x_i, t_B(x_i), f_B(x_i)\rangle \mid x_i \in X\}$,设

$$m_A(i) = \frac{1}{2}(t_A(x_i) + 1 - f_A(x_i)), \tag{4}$$

$$m_B(i) = \frac{1}{2}(t_B(x_i) + 1 - f_B(x_i)). \tag{5}$$

令

$$\phi_1(i) = |t_A(x_i) - t_B(x_i)|, \tag{6}$$

$$\phi_2(i) = |m_A(x_i) - m_B(x_i)|, \tag{7}$$

$$\phi_3(i) = |(1 - f_A(x_i)) - (1 - f_B(x_i))|. \tag{8}$$

定义

$$S_w^p(A,B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} w_i\left(\frac{1}{3}\phi_1(i) + \frac{1}{3}\phi_2(i) + \frac{1}{3}\phi_3(i)\right)^p}. \tag{9}$$

其中:$w_i \ge 0$ 为 x_i 在论域 X 中的权重,且满足 $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$;$1 \le p < +\infty$.

定理 1　式(9)所定义的 $S_w^p(A,B)$ 是论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 上的两个直觉模糊集 A 与 B 的相似度.

证明　$S_w^p(A,B)$ 显然满足定义 2 的性质 1)～3). 下面证明 $S_w^p(A,B)$ 也满足定义 2 的性质 4).

如果 $A \subseteq B \subseteq C$,则有 $t_A(x_i) \le t_B(x_i) \le t_C(x_i), f_A(x_i) \le f_B(x_i) \le f_C(x_i)$. 设

$$\phi_{tAC}(i) = |t_C(i) - t_A(i)|,$$

$$\phi_{tAB}(i) = |t_B(i) - t_A(i)|,$$

$$\phi_{mAC}(i) = |m_C(i) - m_A(i)|,$$

$$\phi_{mAB}(i) = |m_B(i) - m_A(i)|,$$

$$\phi_{fAC}(i) = |(1 - f_C(i)) - (1 - f_A(i))|,$$

$$\phi_{fAB}(i) = |(1 - f_B(i)) - (1 - f_A(i))|.$$

则有

$$\frac{1}{3}\phi_{tAB}(i) \le \frac{1}{3}\phi_{tAC}(i), \frac{1}{3}\phi_{mAB}(i) \le \frac{1}{3}\phi_{mAC}(i),$$

$$\frac{1}{3}\phi_{fAB}(i) \le \frac{1}{3}\phi_{fAC}(i).$$

即

$$\frac{1}{3}\phi_{tAB}(i) + \frac{1}{3}\phi_{mAB}(i) + \frac{1}{3}\phi_{fAB}(i) \le \frac{1}{3}\phi_{tAC}(i) + \frac{1}{3}\phi_{mAC}(i) + \frac{1}{3}\phi_{fAC}(i). \tag{10}$$

所以 $S_w^p(A,C) \le S_w^p(A,B)$. 同理可证 $S_w^p(A,C) \le S_w^p(B,C)$. □

3　基于直觉模糊集相似度的多属性决策方法

3.1　直觉模糊集环境下的多属性决策问题描述

考虑具有 n 个方案 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和 m 个属性 $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$ 的多属性决策问题,设 t_{ij} 和 f_{ij} 分别为方案 $x_i \in X$ 相对于属性 $r_j \in R$ 关于模糊概念"极好"的隶属度和非隶属度. 直觉指数 $\pi_{ij} = 1 - t_{ij} - f_{ij}$ 越大,决策者对于极好的犹豫边际越高. 在决策过程中,决策者可通过增加或减少直觉指数来增加或减少估计值. 事实上,决策者的估计值可以是一个闭区间

$$[t_{ij}^l, t_{ij}^u] = [t_{ij}, t_{ij} + \pi_{ij}] = [t_{ij}, 1 - f_{ij}].$$

显然,对于所有的方案 $x_i \in X$ 和属性 $r_j \in R$,有 $0 \le t_{ij}^l \le t_{ij}^u \le 1$.

类似地,设 ρ_i 和 τ_i 分别为属性 $r_j \in R$ 关于模糊概念"重要"的隶属度和非隶属度. 直觉指数 $\eta_i = 1 - \rho_i - \tau_i$ 越大,决策者关于属性 $r_j \in R$ 相对重要的犹豫边际越高. 直觉指数可在决策中计算最大或最小权重. 事实上,决策者的权重值也可以是一个闭区间

$$[w_i^l, w_i^u] = [\rho_i, \rho_i + \eta_i].$$

显然,对于所有的属性 $r_j \in R$,有 $0 \le w_i^l \le w_i^u \le 1$.

为了找到权重,假设 $\sum_{i=1}^{m} w_i^l \le 1, \sum_{i=1}^{m} w_i^u \ge 1$,使得 $w_i^l \le w_i \le w_i^u$,满足 $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1, i = 1, 2, \cdots, m$.

3.2　直觉模糊环境下最优权重的确定

对于每个方案 $x_i \in X$,其最优值可由下列规划模型得到:

$$\max\ d_i = \sum_{j=1}^{m} z_{ij} w_j.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} t_{ij}^l \le z_{ij} \le t_{ij}^u,\ i = 1, 2, \cdots, n; \\ w_j^l \le w_j \le w_j^u,\ j = 1, 2, \cdots, m; \\ e^{\mathrm{T}} W = 1. \end{cases} \tag{11}$$

为了求解模型(6),可通过求解下列两个线性规划模型:

$$\min\ d_i^l = \sum_{j=1}^{m} t_{ij}^l w_j.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_j^l \le w_j \le w_j^u,\ j=1,2,\cdots,m; \\ e^{\mathrm{T}}W=1. \end{cases} \tag{12}$$

$$\max\ d_i^u = \sum_{j=1}^m t_{ij}^u w_j.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_j^l \le w_j \le w_j^u,\ j=1,2,\cdots,m; \\ e^{\mathrm{T}}W=1. \end{cases} \tag{13}$$

通过求解 LP 模型(12) 和(13) ,分别得到它们的最优解 $\widetilde{W}^j=(\overline{w}_1^j,\cdots,\overline{w}_m^j)^{\mathrm{T}}$ 和 $\hat{W}^j=(\hat{w}_1^j,\cdots,\hat{w}_m^j)^{\mathrm{T}}$, $j=1,2,\cdots,n$.

对于 n 个方案的决策问题,需要求解 $2n$ 个线性规划模型,由模型(12) 和(13) 得到的最优权重通常是不同的,即 $\widetilde{W}^j\ne\hat{W}^j$,因此所有 n 个方案 $x_j\in X$ 的最优值之间不能直接比较. 为使模型(12) 和(13) 得到的属性最优权重向量一致,从而使所有方案的排序具有可比性,可建立下列多目标规划模型:

$$\min\ d_i^l=\sum_{j=1}^m t_{ij}^l w_j,\ \max\ d_i^u=\sum_{j=1}^m t_{ij}^u w_j.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} w_j^l \le w_j \le w_j^u,\ j=1,2,\cdots,m; \\ e^{\mathrm{T}}W=1. \end{cases} \tag{14}$$

为了求解多目标规划问题(14) ,可将其转化为下列线性目标规划问题:

$$\min\ J=\Big\{P_1\sum_{i=1}^n(\alpha_{1i}e_i^- + \beta_{1i}\hat{e}_i^-) + P_2\sum_{i=1}^n(\alpha_{2i}e_i^+ + \beta_{2i}\hat{e}_i^-)\Big\}.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^m t_{ij}^l w_j + e_i^- - e_i^+ = \sum_{j=1}^m t_{ij}^l w_j^l; \\ \sum_{j=1}^m t_{ij}^u w_j + \hat{e}_i^- - \hat{e}_i^+ = \sum_{j=1}^m t_{ij}^u w_j^u; \\ e_i^-,e_i^+,\hat{e}_i^-,\hat{e}_i^+ \ge 0,\ i=1,2,\cdots,n; \\ w_j^l\le w_j\le w_j^u,\ j=1,2,\cdots,m; \\ e^{\mathrm{T}}W=1. \end{cases} \tag{15}$$

其中: e_i^- 和 e_i^+ 分别为目标函数 d_i^l 低于和高于期望值 $\sum_{j=1}^m t_{ij}^l w_j^l$ 的下偏差变量和上偏差变量, $\tilde{e}_i^-$ 和 $\tilde{e}_i^+$ 分别为目标函数 d_i^u 低于和高于期望值 $\sum_{j=1}^m t_{ij}^u w_j^u$ 的下偏差变量和上偏差变量, α_{1i} 和 β_{1i} 分别为 P_1 级目标中 e_i^- 和 $\tilde{e}_i^+$ 的权重系数, α_{2i} 和 β_{2i} 分别为 P_2 级目标中 e_i^+ 和 $\tilde{e}_i^-$ 的权重系数.

可认为所有的目标函数之间是公平竞争的,没有任何偏好关系,因此可取 $\alpha_{1i}=\beta_{1i}=\alpha_{2i}=\beta_{2i}=1$, $i=1,2,\cdots,n$. 通过分阶段目标规划方法,可得到线性目标规划模型(15) 的属性最优权重向量 $W^0=(w_1^0,w_2^0,\cdots,w_m^0)^{\mathrm{T}}$.

3.3 基于直觉模糊集相似度的多属性决策

将上述线性目标规划模型(10) 得到的最优属性权重向量 W^0 代入式(9) ,便得到任意两个方案间的 IFS 相似度. 为得到最优方案和对方案进行排序,可对所有方案 $x_i\in X$ 利用 TOPSIS 方法,得到每个方案 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$ 的排序值

$$\xi_i=\frac{S_w^P(x_{ij},G)}{S_w^P(x_{ij},G)+S_w^P(x_{ij},B)},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{16}$$

其中

$$S_w^P(x_i,G)=1-\frac{1}{\sqrt[p]{m}}{}^p\Big(\sum_{j=1}^m w_j^0\Big(\frac{1}{3}\mid t(x_{ij})-1\mid+\frac{1}{3}\mid m(x_{ij})-1\mid+\frac{1}{3}\mid 1-f(x_{ij})-(1-0)\mid\Big)^p\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

$$S_w^P(x_i,B)=1-\frac{1}{\sqrt[p]{m}}{}^p\Big(\sum_{j=1}^m w_j^0\Big(\frac{1}{3}\mid t(x_{ij})-0\mid+\frac{1}{3}\mid m(x_{ij})-0\mid+\frac{1}{3}\mid 1-f(x_{ij})-(1-1)\mid\Big)^p\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

$G=\{\langle g,1,0\rangle\}$ 是相对于正理想方案的直觉模糊集, $B=\{\langle b,0,1\rangle\}$ 是相对于负理想方案的直觉模糊集, $S_w^P(x_{ij},G)$ 和 $S_w^P(x_{ij},B)$ 分别是方案直觉模糊集 $x_i\in X$ 与正负理想方案 G 和 B 之间的相似度.

因此,最佳方案值 $\xi_k=\max\{\xi_i\mid x_i\in X\}$. 根据 ξ_i 的大小便可对所有方案进行排序.

4 数值例子

为了说明本文方法的有效性,下面进一步研究文献[10] 中讨论的实例.

某顾客想要购买空调,有 3 个方案 (x_1,x_2,x_3) 可供选择. 考虑的属性(因素) 集包括价格 (r_1) ,功能 (r_2) 和可靠性 (r_3) . 使用统计方法,可得到方案 $x_i\in X$ 相对于属性 $r_j\in R$ 的关于模糊概念极好的隶属度 t_{ij} 和非隶属度 f_{ij}. 决策者的估计区间值和属性权重估计区间值如下:

$$([\mu_{ij}^l,\mu_{ij}^u])_{3\times3}=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} r_1 & r_2 & r_3\end{array} \\ \begin{bmatrix} [0.75,0.90] & [0.60,0.75] & [0.80,0.80] \\ [0.80,0.85] & [0.68,0.80] & [0.45,0.50] \\ [0.40,0.55] & [0.75,0.95] & [0.60,0.70] \end{bmatrix}\end{array},$$

$$([w_j^l,w_j^u])_{1\times3}=([0.25,0.75],[0.35,0.60],[0.30,0.35]).$$

根据线性目标规划模型(15) ,通过分阶段目标规划方法求解上述线性目标规划模型,可得属性的最优权重向量 $W^0=(0.30,0.35,0.35)^{\mathrm{T}}$. 将最优权重代入式(16) ,可得相应方案的评估值为:当 $p=1$ 时, $\xi=(\xi_i)_{i=1,2,3}=(0.553,0.535,0.534)$;当 $p=2$

时, $\xi' = (\xi'_i)_{i=1,2,3} = (0.606, 0.568, 0.566)$. 因此, 最优方案为方案 1, 且方案的排序结果为 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$. 由文献[10]的直觉指数加权平均最大化模型, 得到的最优权重向量 $W = (0.25, 0.40, 0.35)^{\mathrm{T}}$, 相应的方案排序结果为 $x_1 \succ x_3 \succ x_2$.

这两种方法所得最优方案排序结果略有差异. 这是因为文献[10]方法没有充分利用所给的决策信息, 如最优化权重模型的可行域比实际模型的可行域小, 因此最优解是一个局部最优解, 而不是全局最优解. 本文的相似度公式也比文献[10]定义的距离公式更合理.

5　结　　论

本文研究基于直觉模糊集的多属性决策问题, 提出一种基于直觉模糊集相似度的多属性决策方法. 在决策过程中, 每个方案相对于属性关于模糊概念极好的值都是通过直觉模糊集表示的, 属性权重也用直觉模糊集表示, 这使本文方法比传统模糊集方法能更好地模拟实际的决策环境, 从而建立更加符合现实的决策模型. 本文方法也可推广到多人多属性的群决策问题.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[2] Atanassov K T. Two theorems for intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110(2): 267-269.

[3] Szmidt E, Kacprzyk J. Intuitionistic fuzzy sets in group decision making[J]. Note on Intuitionistic Fuzzy Sets, 1996, 2(1): 15-32.

[4] Szmidt E, Kacprzyk J. Remarks on some applications of intuitionistic fuzzy sets in decision making[J]. Note on Intuitionistic Fuzzy Sets, 1996, 2(3): 22-31.

[5] Szmidt E, Kacprzyk J. Group decision making via intuitionistic fuzzy sets[C]. FUBEST'96. Sofia, 1996: 107-112.

[6] Szmidt E, Kacprzyk J. Intuitionistic fuzzy sets for more realistic group decision making [C]. Int Conf on Transition to Advanced Market Institutions and Economies. Warsaw, 1997: 430-433.

[7] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances between intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 114(3): 505-518.

[8] De S K, Biswas R, Roy A R. An application of intuitionistic fuzzy sets in medical diagnosis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117(2): 209-213.

[9] Deng-Feng Li. Multi-attribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets[J]. J of Computer and System Sciences, 2005, 70(1): 73-85.

[10] Li D, Cheng C. New similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and application to pattern recognition[J]. Pattern Recognition Letters, 2002, 23(1): 221-225.

(上接第 1397 页)

[5] 张爱玲, 张端金. Delta 算子描述的离散系统故障检测滤波器[J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 273-277.
(Zhang A L, Zhang D J. Fault detection filter for Delta operator formulated discrete time systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(3): 273-277.)

[6] 张端金, 张洛花, 苗启. 圆形区域极点配置的 Delta 算子系统鲁棒容错控制[C]. 第 27 届中国控制会议论文集. 昆明, 2008, 3: 693-697.
(Zhang D J, Zhang L H, Miao Q. Robust fault-tolerant control for Delta-operator systems with circular pole constraints[C]. Proc of 27th Chinese Control Conf. Kunming, 2008, 3: 693-697.)

[7] 肖民卿. 基于 LMI 的统一 D-稳定可靠控制器设计方法[C]. 第 27 届中国控制会议论文集. 昆明, 2008, 2: 36-40.
(Xiao M Q. An unified LMI approach to reliable D-stabilization controller design for linear systems[C]. Proc of 27th Chinese Control Conf. Kunming, 2008, 2: 36-40.)

[8] Veillette R J, Medanic J V, Perkins W R. Design of reliable control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 7(3): 290-304.

[9] Yang G H, Wang J L, Soh Y C. Reliable controller design for linear systems[J]. Automatica, 2001, 37(5): 717-725.

[10] Yao B, Wang F Z. LMI approach to reliable H_∞ control of linear systems[J]. J of Systems Engineering and Electronics, 2006, 17(2): 381-386.