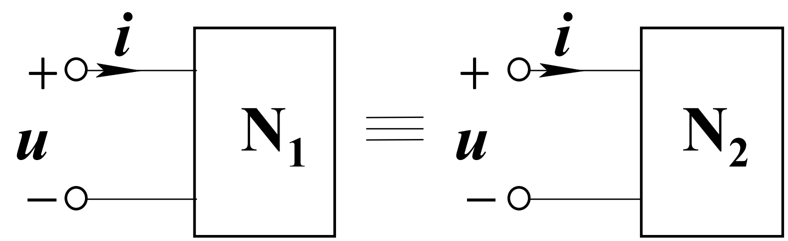
第二章 电阻电路分析

- 线性电路（linear circuit）：由非时变线性无源元件、线性受控源和独立电源组成的电路称为非时变线性电路，简称线性电路。
- 电阻电路(resistive circuit): 电路中没有电容、电感元件的线性电路。

简单电路（局部变量）：等效变换法（改变电路结构）

二端（一端口）网络：N_1端口的VAR与另一个二端网络N_2端口的VAR相同，则N_1与N_2等效。



多端网络：等效是指端钮VAR方程组不变。

端口对外呈现一致的VAR,因而不会影响求解外电路各部分的u、i、p。但是等效前后N_1、N_2内部的情况很可能不等效。(对外等效，对内不等效)

复杂电路（多个变量）：独立变量法（不改变电路的结构，选择完备的独立变量，利用KL列写方程组求解）

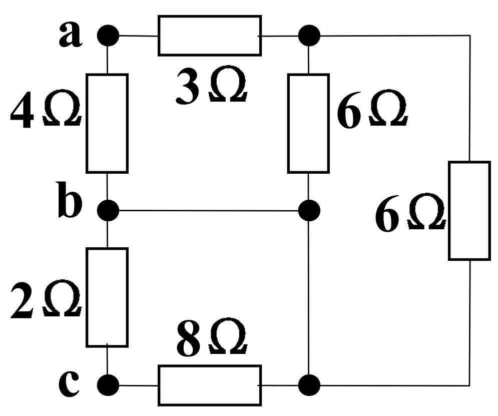
- 等效变换法
  - 第一节 电阻的联接
    - 电阻的串并联:
    - 电阻的Y $\leftrightarrow\Delta$变换:
  - 第二节电源的等效变换
    - 无伴电源的等效变换:
    - 有伴电源的等效变换:
  - 第三节 含受控源的一端口网络的等效
- 独立变量法
  - 第四节 支路法
  - 第五节 回路法、网孔法
  - 第六节 节点法

第一节 电阻的联接

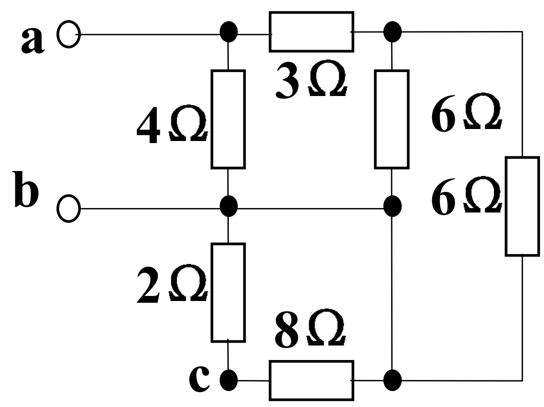
电阻的串联、并联

	串 联	并 联
电 阻	$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k$	$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}$
电 导	$\frac{1}{G_{eq}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{G_k}$	$G_{eq} = \sum_{k=1}^{n} G_k$
分压分流公式	$u_k = u_{eq} \frac{R_k}{R_{eq}}$ $u_k = u_{eq} \frac{G_{eq}}{G_k}$	$i_k = i_{eq} \frac{R_{eq}}{R_k}$ $i_k = i_{eq} \frac{G_k}{G_{eq}}$
功 率	$p_{吸} = ui = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2 = R_{eq} i^2$	$p_{吸} = ui = G_{eq} u^2 = \sum_{k=1}^{n} R_k i_k^2$

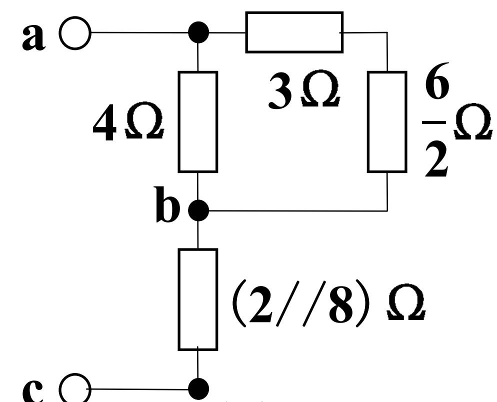
例题1 求图A电路的 (1) R_{ab}； (2) R_{ac}



图A



图B



图C

解(1)求R_{ab}时可画成右边的图B. 此时左下角的2Ω和8Ω电阻被短路，6Ω与6Ω的电阻并联，再与3Ω电阻串联

故：$R_{ab}= 4 \,//\, [3+(6 \,//\, 6)]=4 \,//\, [3+3]=(4 \times 6) / (4+6)=2.4\Omega$

(2) 求R_{ac}时由于2Ω与8Ω电阻一端接b，另一端接c，它们为并联关系，故可画成图C.

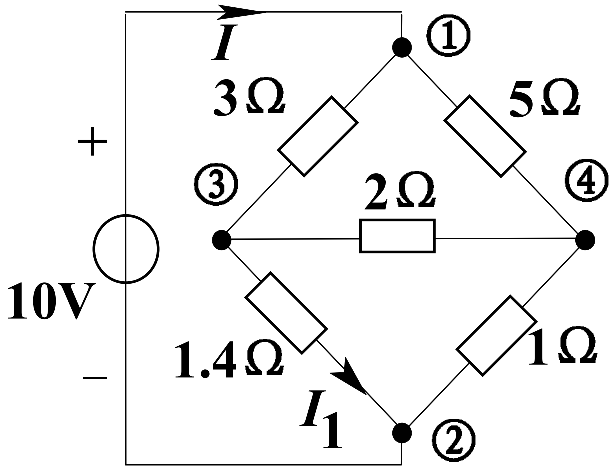
于是 $R_{ac}=\{4 \,//\, [3 + (6 / 2)]\}+(2 \,//\, 8) = 2.4 + 1.6 = 4\ \Omega$

判断电阻的联接关系据其端子的联接判断，一般从最远处向端口看起。

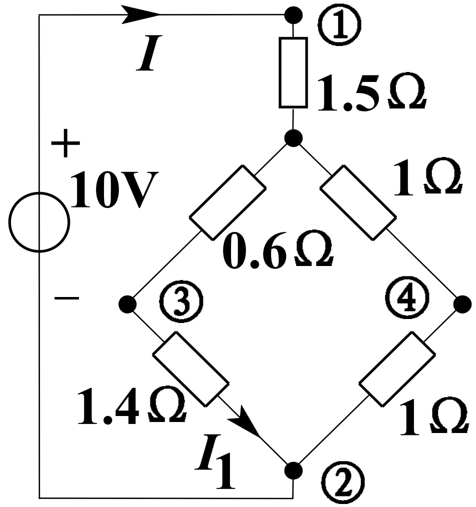
电阻的Y$\leftrightarrow\Delta$变换

形　式	$\Delta \rightarrow$ Y	Y$\rightarrow \Delta$
一般形式	$R_1=\dfrac{R_{31}\cdot R_{12}}{R_Z}$ $R_2=\dfrac{R_{12}\cdot R_{23}}{R_Z}$ $R_3=\dfrac{R_{23}\cdot R_{31}}{R_Z}$ 其中 $R_Z=R_{12}+R_{23}+R_{31}$	$G_{12}=\dfrac{G_1\cdot G_2}{G_Z}$ $G_{23}=\dfrac{G_2\cdot G_3}{G_Z}$ $G_{31}=\dfrac{G_3\cdot G_1}{G_Z}$ 其中 $G_Z=G_1+G_2+G_3$
$R_1=R_2=R_3$	$R_Y=\dfrac{1}{3}R_\Delta$	$R_\Delta=3R_Y$

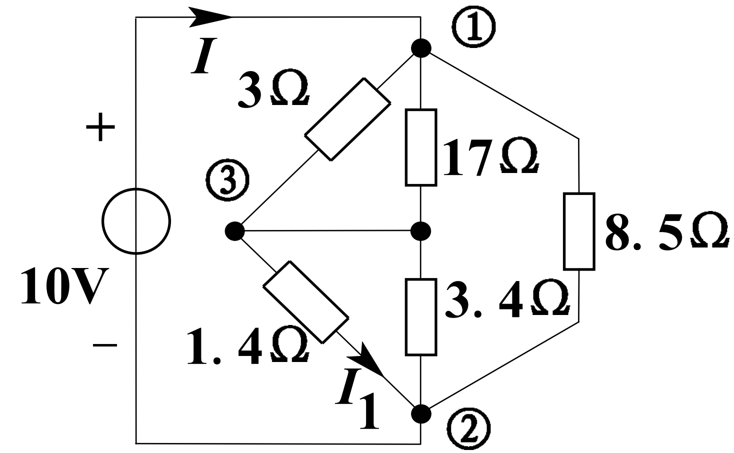
例题2 对图A示桥形电路，试求I、I_1



图A



图B



图C

解 法1）将上方的Δ→Y，得图B

从而 $I=\dfrac{10}{1.5+\frac{2\times2}{2+2}}=4\text{A}$

$I_1=\dfrac{2}{2+2}I=2\text{A}.$

法2）节点④所接Y电阻→Δ，得图C

$\because 3\,/\!/\,17=2.55\Omega$，

$1.4\,/\!/\,3.4=0.99167\Omega$，

$(0.99167+2.55)\,/\!/\,8.5=2.5\Omega$，

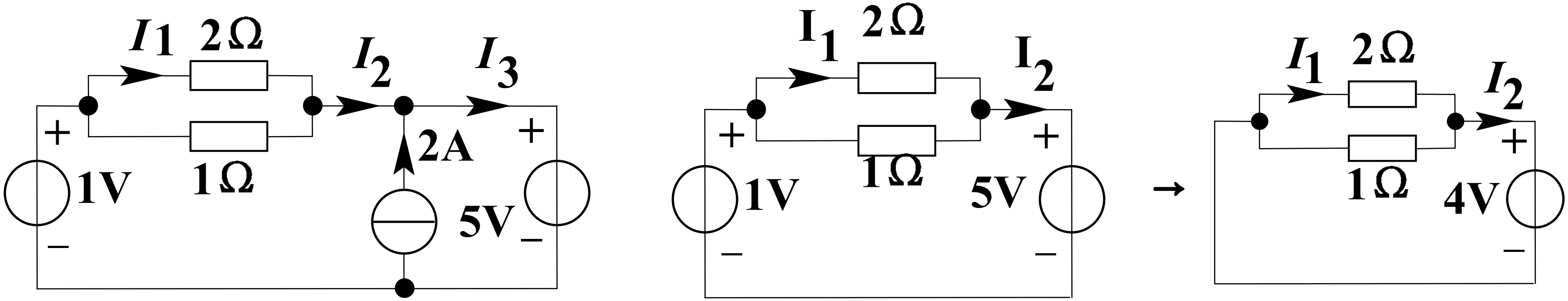
$\therefore\ I=10\,/\,2.5=4\text{A}$，

作业：习题卡2-1，2-4

第二节电源的等效变换 无伴电源的等效变换

连接情况	等效结果计算公式	说　明
n个电压源的串联	$u_s = \sum_{k=1}^{n} u_{sk}$	u_s为等效电压源，当u_{sk}与u_s的参考方向相同时，u_{sk}取“＋”，反之取“－”
n个电流源的并联	$i_s = \sum_{k=1}^{n} i_{sk}$	i_s为等效电流源当i_{sk}与i_s的参考方向相同时，i_{sk}取“＋”，反之取“－”
电压源与非电压源支路并联	对外电路可以等效为该电压源u_s	(1)与电压源并联的可以是电阻、电流源，也可以是较复杂的支路。(2)仅是对外电路等效。
电流源与非电流源支路串联	对外电路可以等效为该电流源i_s	(1)与电流源串联的可以是电阻、电压源，也可以是较复杂的支路。(2)仅是对外电路等效。

例题3求图示电路的I_1、I_2、I_3.

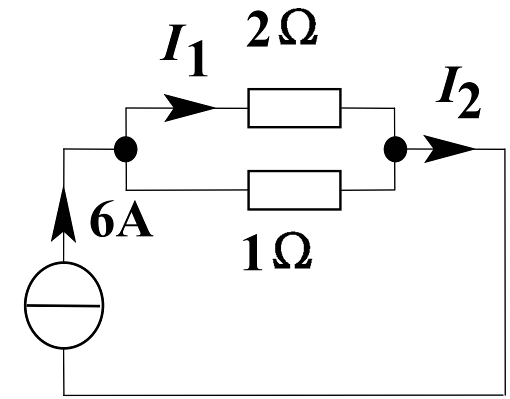


解：对原图作如右等效得：$I_1=-4/2=-2\text{A}$，$I_2=I_1-(4/1)=-6\text{A}$

回到原图，有 $I_3=I_2+2=-4\text{A}$.

由此例可见等效“对外”的含义，即对于求2A电流源以及5V电压源以外的I_1与I_2来说，题中三个电路是等效的，但原图中5V电压源中的电流已不再等于新图中5V电压源中的电流。

例题2 将上例图中的1V电压源换为6A的电流源（方向向上），再求I_1、I_2、I_3.



此时电路可等效为右图，∴ $I_2=6\text{A}$，

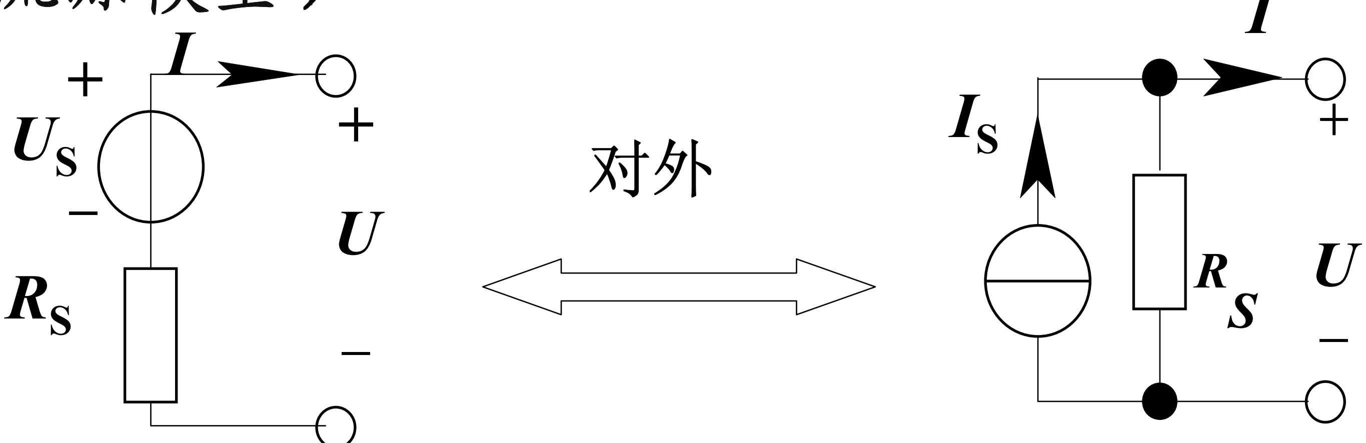
$I_1=1\times 6/(1+2)=2\text{A}$； 回到原图， 有

$I_3=I_2+2=8\text{A}$.

有伴电源的等效变换

有伴电压源：有电阻与之串联理想电压源（实际电源的电压源模型）

有伴电流源：有电阻与之并联理想电流源（实际电源的电流源模型）



等效条件为：

$$U = U_S - R_S I$$

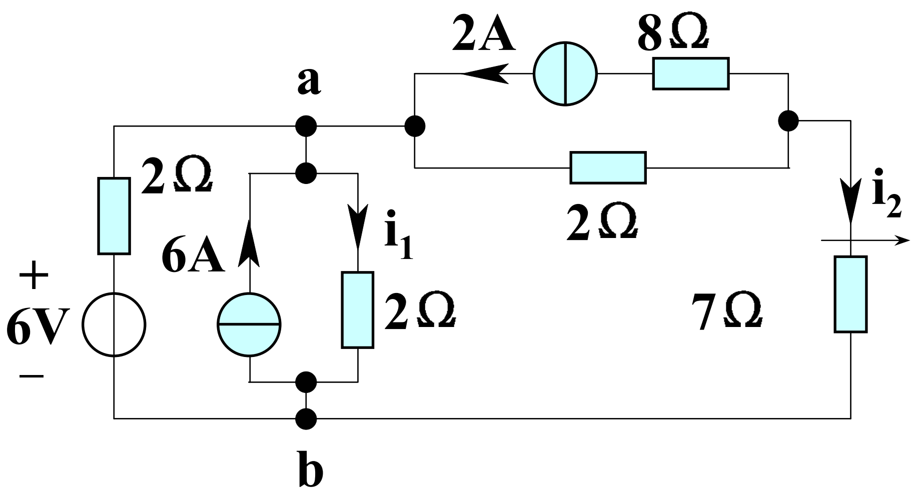
[illegible]

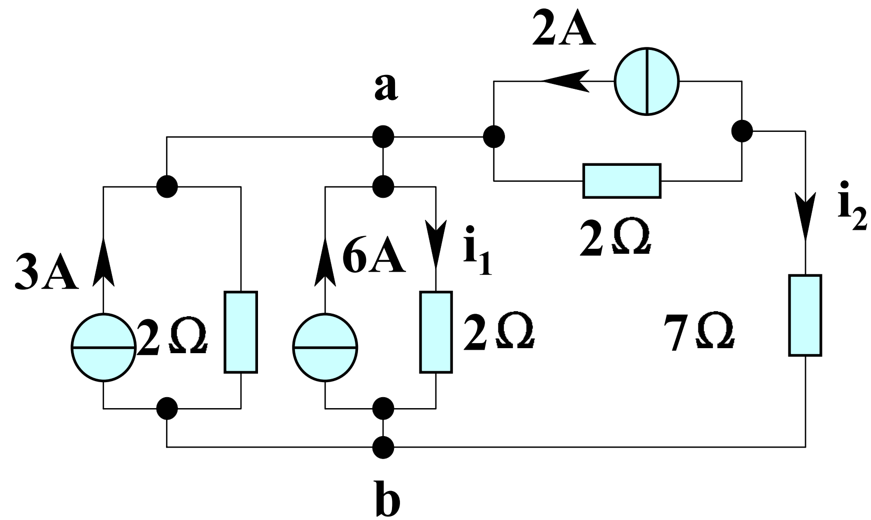
大小关系：$U_S = R_S I_S$

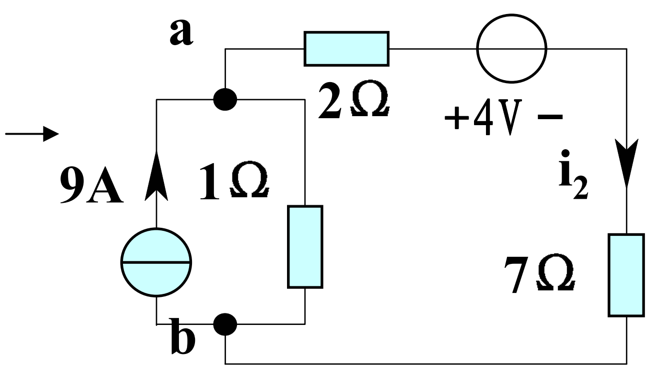
方向关系：I_S由U_S的“－”指向“＋”

有源二端网络最终可以化简为有伴电压源或有伴电流源。

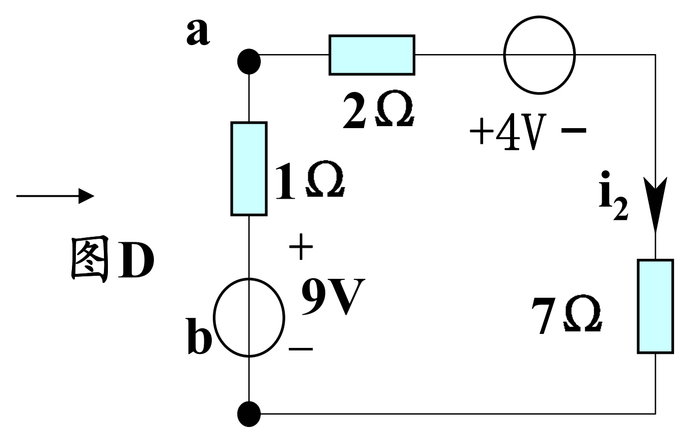
例2:求图A电路中的i_1与i_2 .







图C

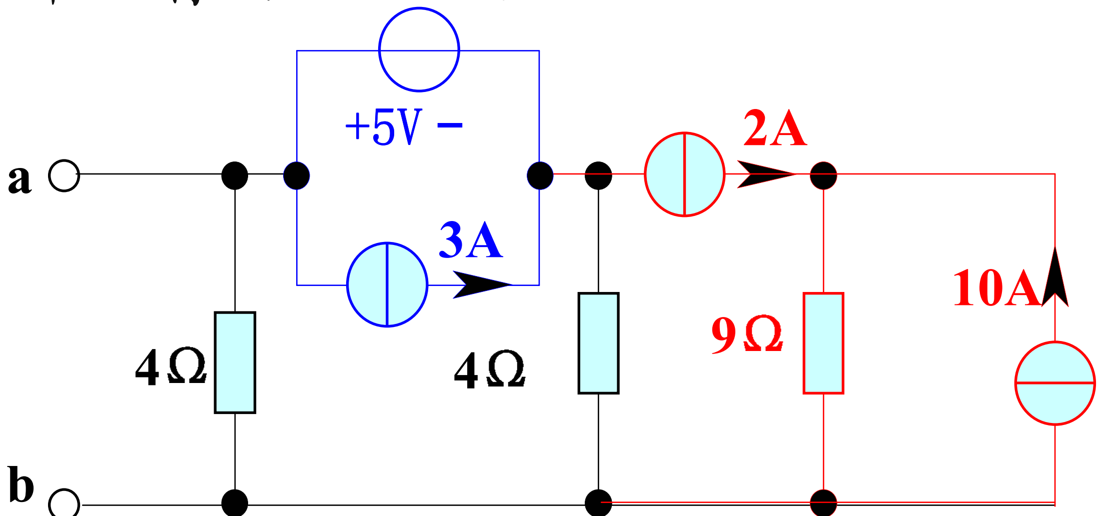


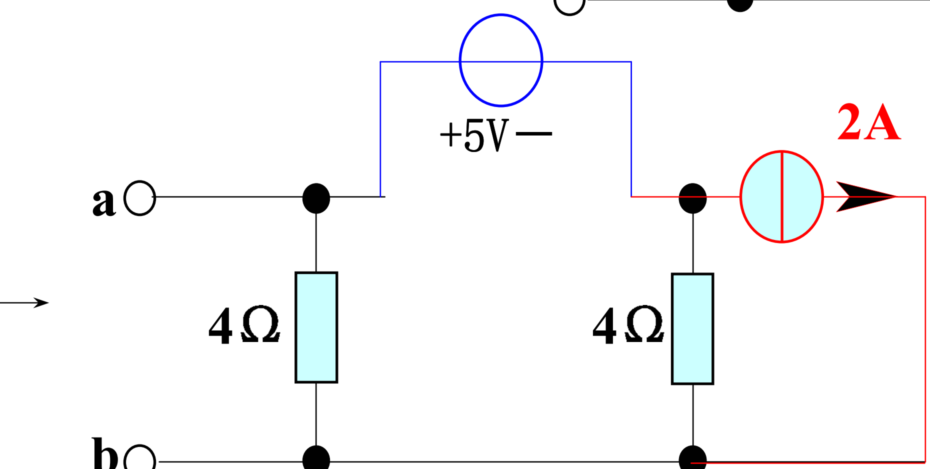
图D

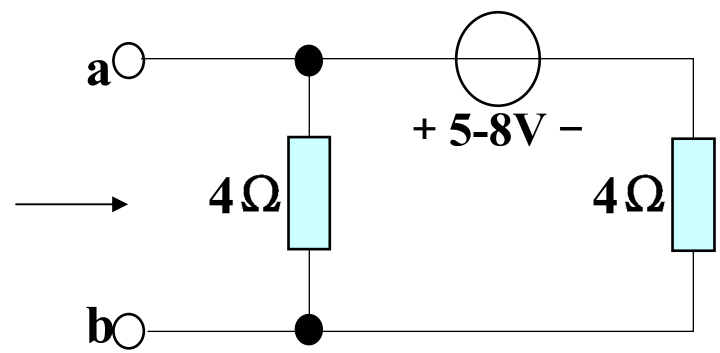
解: 图A → 图B → 图C → 图D

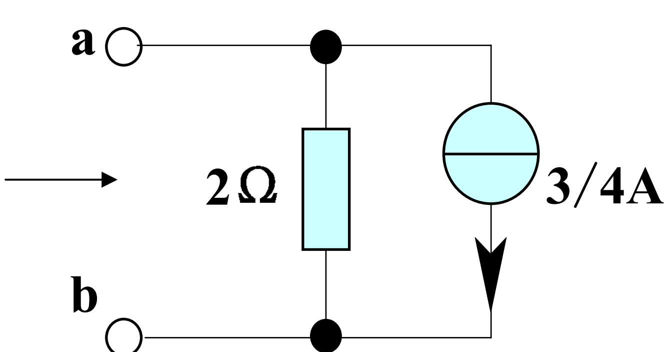
对单回路的D图列写KVL得: $(1+2+7)i_2 = 9-4 \rightarrow i_2 = 0.5\text{A}$; 为了求$i_1$，先求$u_{ab}$: $u_{ab} = -1 \times i_2 + 9 = 8.5\text{V}$ $\rightarrow i_1 = u_{ab} / 2 = 4.25\text{A}$ (B图).

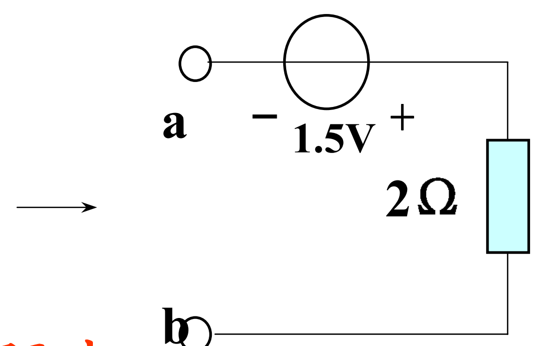
例3. 化简右图所示有源二端网络











作业：习题卡2-8，2-10

第三节含受控源一端口网络的等效电阻

1) 二端网络N内部只含电阻和线性受控源时，其端口可等效为电阻(u、i成正比)，可能为一个负的电阻;

2)当N内部还含有独立电源时，则其端口可等效为有伴电源（有伴电阻有可能为负值）。

受控源等效变换时可适用独立电源等效变换的结论，但在变换过程中要注意：控制量（或控制支路）必须保持完整而不被改变，否则，控制量变没了或被改变了，受控源也就不成立了。等效变换 后:

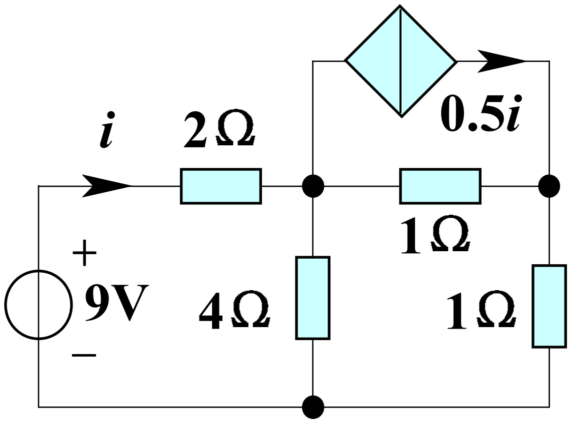
对于第一种电路（不含独立源）常用以下方法求解

1）外施电源法：在端口人为作用独立电源（或标出端口变量u、i），对电路列写KCL、KVL方程（同时代入各元件的VAR），然后消去非端口变量，可得端口VAR，求出端口电压电流比值。

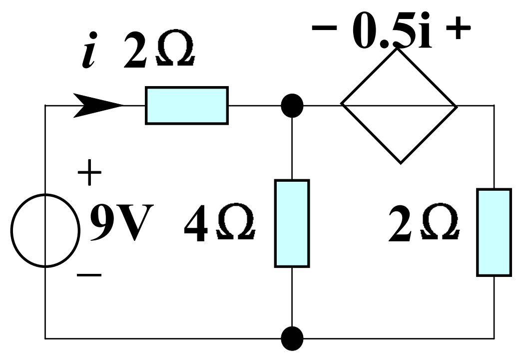
2）控制量为“1”法：令控制量为“1”，则得到受控源的值，进一步推算出端口的VAR，求出端口电压电流比值即为等效电阻。

对于第二种电路（含独立源），以后再讨论。

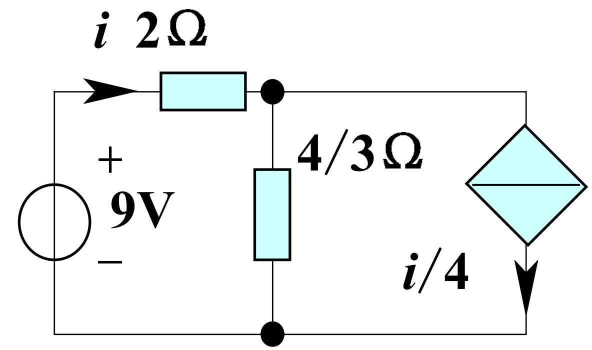
例 1． 求图A电路的电流i．



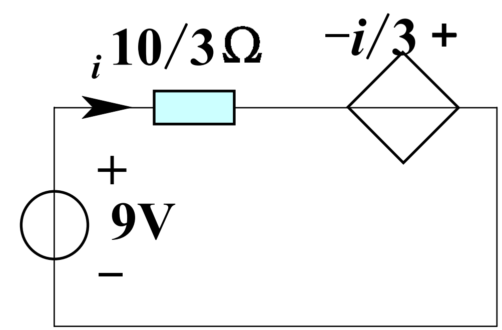
图A



图B



图C



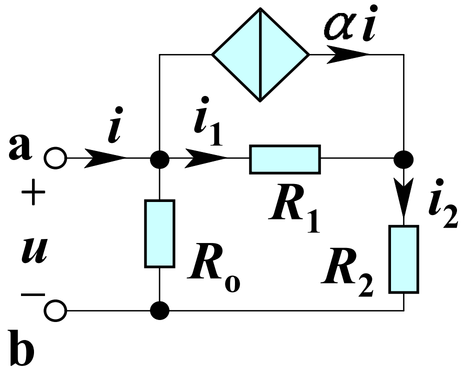
图D

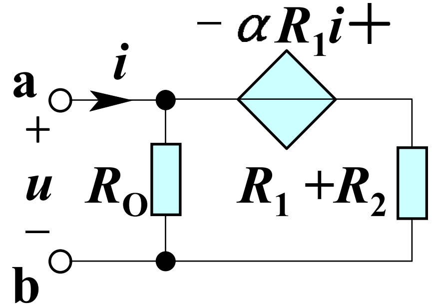
解： 利用有伴受控电源等效变换结论，可得图B、图C与图D （即化成关于所求i的单回路）：

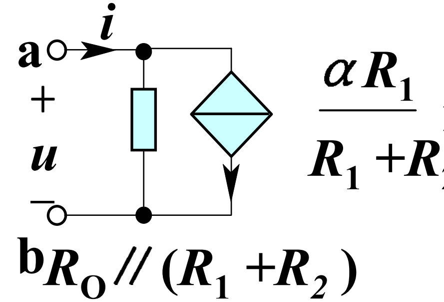
由KVL 得: $\frac{10\,i}{3}-\frac{i}{3}=9 \Rightarrow \quad i=3\text{ A}.$

当电路中含有受控源时，由于受控源一方面与电阻不同，不能作串联等效，另一方面又与独立源不同，不是激励。所以仅通过等效变换还得不到最后结果，还必须列写**KCL、KVL** 方程以及元件的**VAR**关系式，才能最终解决

例2求图示一端口网络的入端电阻R_{ab}

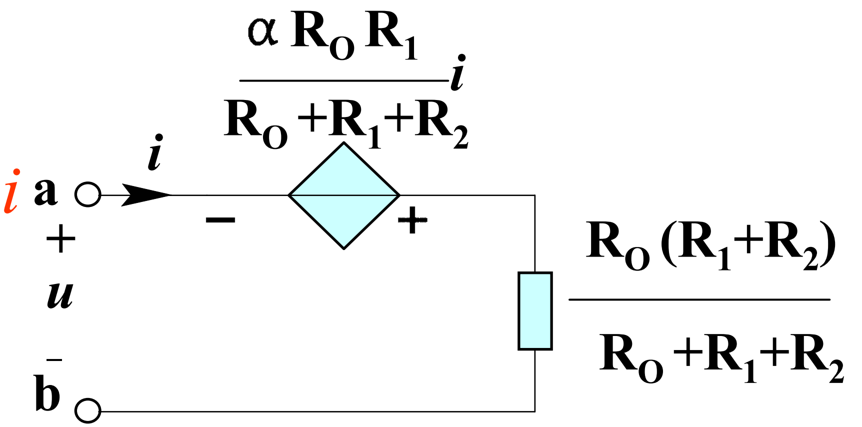






解：先用等效变换法化简，

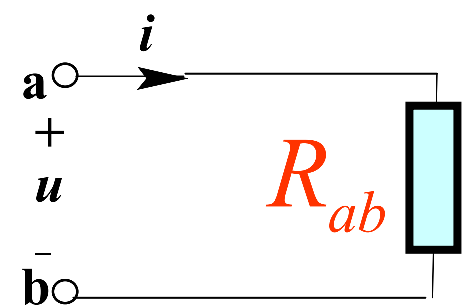
再据KVL写出端口的VAR



$$u=-\frac{\alpha R_oR_2}{R_o+R_1+R_2}i+\frac{R_o(R_1+R_2)}{R_o+R_1+R_2}i$$

$$R_{ab}=\frac{u}{i}=\frac{R_oR_1(1-\alpha)+R_oR_2}{R_o+R_1+R_2}$$

设控制量i=1则有得出R_{ab}有相同的结果



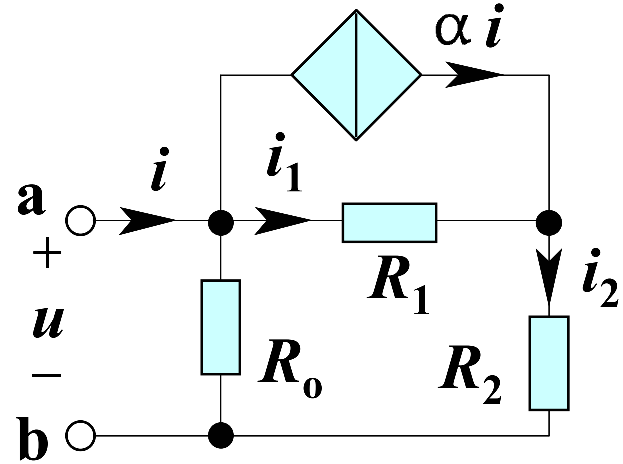
$$u=-\frac{\alpha R_oR_2}{R_o+R_1+R_2}+\frac{R_o(R_1+R_2)}{R_o+R_1+R_2}$$

上题若不化简写端口的**VAR**则有下列过程

KCL： $i_1 = i - \alpha i - (u / R_o)$

$$i_2 = i_1 + \alpha i = i - (u / R_o)$$

(其它变量尽量用端口变量表示)



KVL： $u = R_1 i_1 + R_2 i_2$

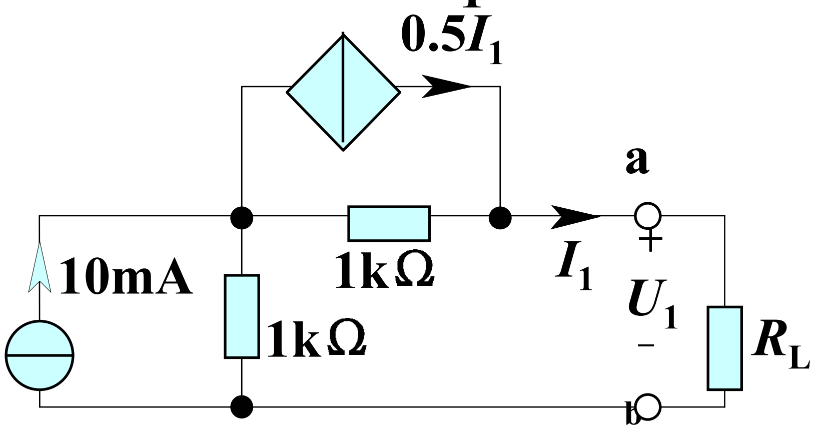
$$= R_1(1-\alpha)i - \frac{R_1}{R_O}u + R_2 i - \frac{R_2}{R_O}u$$

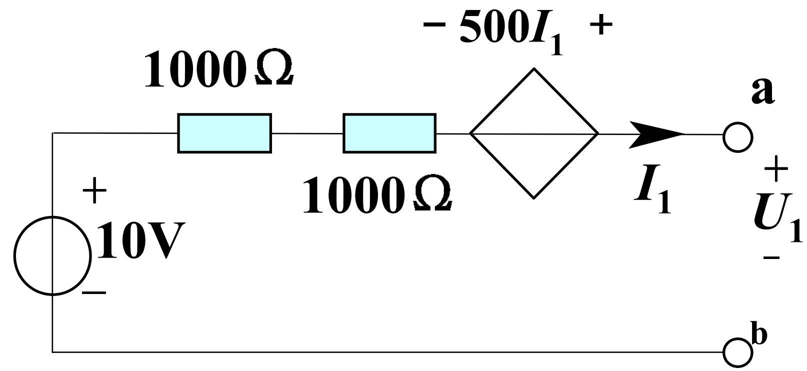
(消去非端口变量，从而解出端口**VAR**)

$$R_{ab} = \frac{u}{i} = \frac{R_O R_1(1-\alpha) + R_O R_2}{R_O + R_1 + R_2}$$

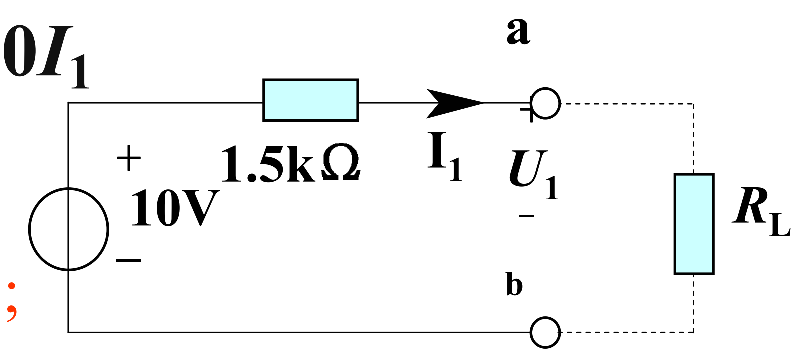
由此可见先等效化简再求解要简单方便些，化简时需要注意“控制量（或者控制支路）必须保持完整而不被改变”不能忘记。

例3. (1) 求ab以左的最简等效电路；(2) 求R_L =2.5kΩ及 3.5kΩ 时的I_1 。





先化简再由KVL得$U_1 = 10-1500I_1$



即 有$R_L I_1 = 10-1500I_1$

当R_L =2.5kΩ 时，$I_1 = \dfrac{10}{1.5+2.5} = 2.5\text{mA};$

当R_L =3.5kΩ 时，$I_1 = \dfrac{10}{1.5+3.5} = 2\text{mA};$

由此例不难看出，若待求量集中在某一支路，尤其是该支路有几种变化情况，则先求出该支路以外二端网络的最简等效电路，避免重复计算。

作业：习题卡2-11，2-12

我们已经解决了本章的第一个内容——电阻电路的等效变换，这种方法可用于：

①分析简单电路;

②使复杂电路的局部得到简化。

而对于一般的复杂电路，要用“系统化”的“普遍性”的方法:

①系统化——便于编制计算机程序;

②普遍性——适用于任何线性电路。

与等效变换法不同，系统化的普遍性方法不改变电路的结构，其步骤大致为

①选择一组完备的独立变量（电压或电流）；

②由KCL、KVL及VAR建立独立变量的方程(为线性方程组)；

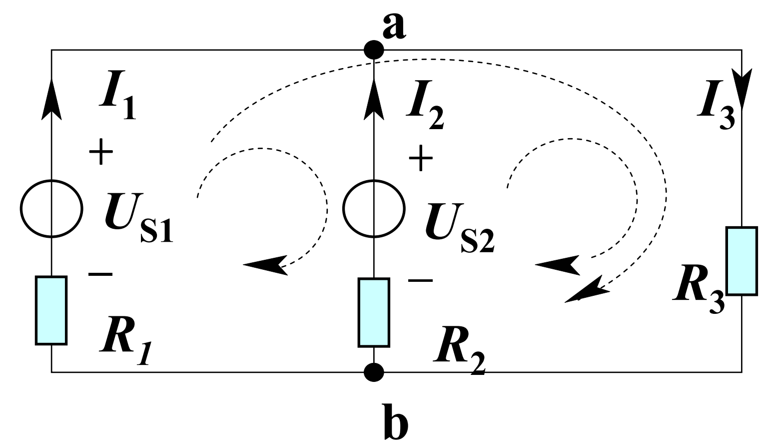
③由方程解出独立变量，进而解出其它待求量。

这类方法亦称为独立变量法，包括支路(电流)法、回路(电流)法、网孔(电流)法、节点(电压)法。

其中：独立性——各变量不能相互表示；完备性——其它电压、电流可由它们所表示。下面先研究支路法:

第四节 支路法

一、 支路法的基本思路



图示电路：b=3；n=2；L=3．其中I_1、I_2、I_3为各支路电流。它们彼此不同。求解之，由支路VAR可求出各支路或各元件的电压，因而支路电流可作为一组完备的独立变量。

支路(电流)法就是以支路电流为电路变量列写方程，求解电路各电气量的方法。

列写KCL方程：

节点a：$-I_1-I_2+I_3=0$ (1)　节点b：$I_1+I_2-I_3=0$ (2) 显然，对所有n个节点列写KCL，每一支路电流将一次正、一次负地出现两次，所有KCL方程相加必等于0。

n个节点的电路至多只有(n-1)个独立的KCL方程。

故对上面的电路只要列写(2-1)=1个KCL方程即可。(不妨取(1)式)。

列写KVL方程：回路的绕行方向如图，左回路：$R_1I_1-R_2I_2=U_{S1}-U_{S2}$ (3) 右回路：$R_2I_2+R_3I_3=U_{S2}$ (4) 外回路：$R_1I_1+R_3I_3=U_{S1}$(5)

易见，(3)、(4)、(5)中的任一式可由另二式导出，同样可以证明

接第四节

b条支路、n个节点的电路至多只有(b-n+1)独立KVL方程，对平面电路，即等于网孔数m 。

独立方程总数=(n-1)+(b-n+1)=b,正好等于独立变量数(支路数)，因而所得的线性方程组是可解的。任选n-1个节点列写KCL可保证其独立性。因每个网孔不可能由别的网孔来合成得到，所以(b-n+1)个网孔可以作为一组独立的回路。选择(b-n+1)个独立回路的另一方法是每选一个回路，至少增加一条新的支路。本例中可以取(3)、(4)两式

支路法的基本步骤为

1．标出各支路电流（参考方向及参数）变量;

2．标出各节点号，选定n-1个，列写KCL方程;

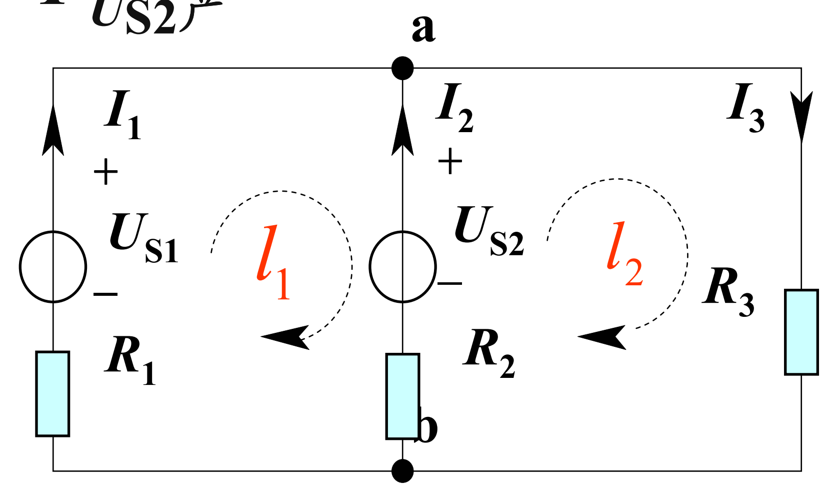
3．选取(b-n+1)个独立回路标出绕行方向，列写KVL方程;

4．联立求解b个独立方程,得各支路电流，进而据各支路的伏安关系解出其它待求量;

5．对所得的结果进行验算。可选一个未用过的回路，代入数据校验KVL，或用功率平衡进行验算。

例：按以上步骤求电路中的U_{ab}、$P_{US2产}$

①见右图;



②KCL取节点a： $-I_1-I_2+I_3=0$

③取两网孔 $R_1I_1-R_2I_2=U_{S1}-U_{S2}$

$$R_1I_1+R_3I_3=U_{S2}$$

④联立求解。可用消元法或克莱姆法则解之，结果为

$$I_1=\frac{(R_2+R_3)U_{S1}-R_3U_{S2}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1};\quad I_2=\frac{(R_1+R_3)U_{S2}-R_3U_{S1}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1};\quad I_3=\frac{R_2U_{S1}+R_1U_{S2}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}.$$

再由支路VAR可求出其它待求量

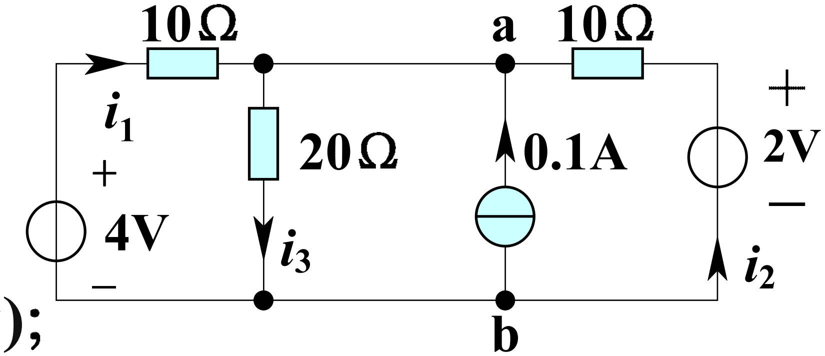
$$U_{ab}=R_3I_3=\frac{R_3(R_2U_{S1}+R_1U_{S2})}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1};$$

$$P_{US2产}=U_{S2}I_2=\frac{(R_1+R_3)U_{S2}^2-R_3U_{S1}U_{S2}}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}.$$

⑤验算：略。

二、 支路法的特例情况

特例 1：含电流源i_s.



处理方法一:

①含i_s的支路电流不再作变量(是已知量);

②选取独立回路时绕过i_s即选择不包含i_s支路的回路，从而可少列与i_s关联的回路的KVL方程。

处理方法二:

①增设i_s上电压u_{Is}为变量，代入相应回路的KVL方程;

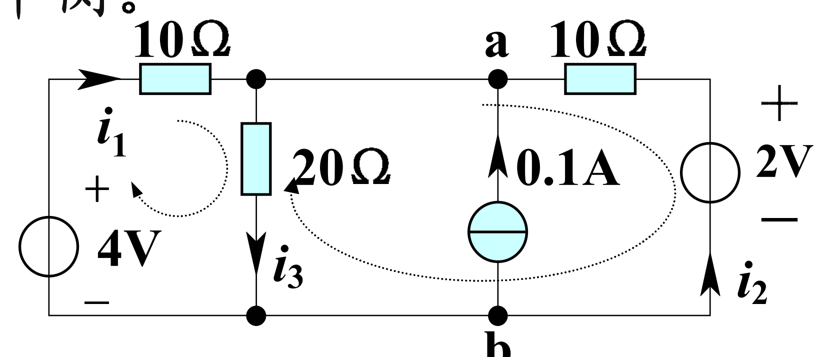
②该支路电流变量写为已知量i_s .

处理方法三（为有伴电流源时）：

将有伴电流源等效成有伴电压源，再按基本步骤列写支路法方程。

例1. 求图示电路各支路电流，并校验功率平衡。

解方法一：按图示选择的回路少一变量、少一方程(巧选回路)就无需再列写中间网孔回路的KVL方程，从而支路法方程为：：

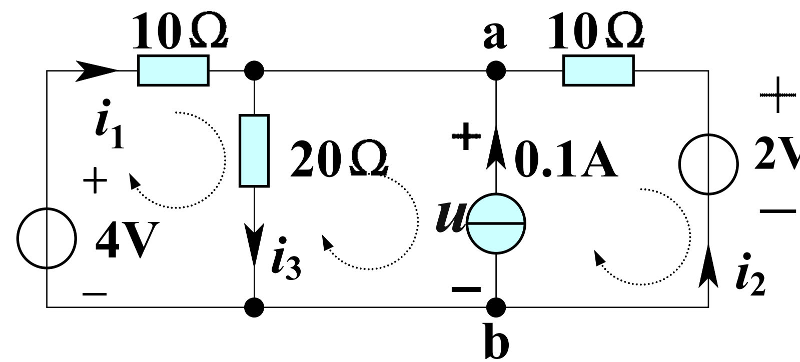


例题

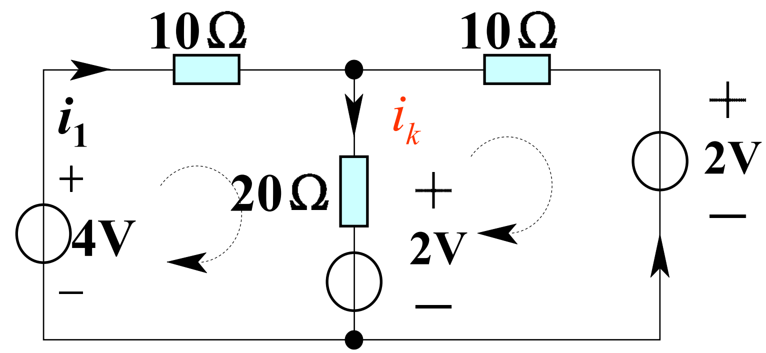
$$\begin{cases}-i_1-i_2+i_3=0.1\\10i_1+20i_3=4\\-10i_2-20i_3=-2\end{cases}\quad 可得：\begin{cases}i_1=0.12\text{A},\\i_2=-0.08\text{A},\\i_3=0.14\text{A}.\end{cases}$$

方法二：少一电流变量，多一电压变量（图中的u），方程数仍等于总变量数：

$$\begin{cases}-i_1-i_2+i_3=0.1\\10i_1+20i_3=4\\u-20i_3=0\\-u-10i_2=-2\end{cases}\quad 可得：\begin{cases}i_1=0.12\text{A},\\i_2=-0.08\text{A},\\i_3=0.14\text{A},\\u=2.8\text{V}.\end{cases}$$



方法三：将20Ω电阻看成i_s的有伴电阻，并等效成有伴电压源，如下图（注意$i_K=i_3-i_s$），此时支路法方程为：

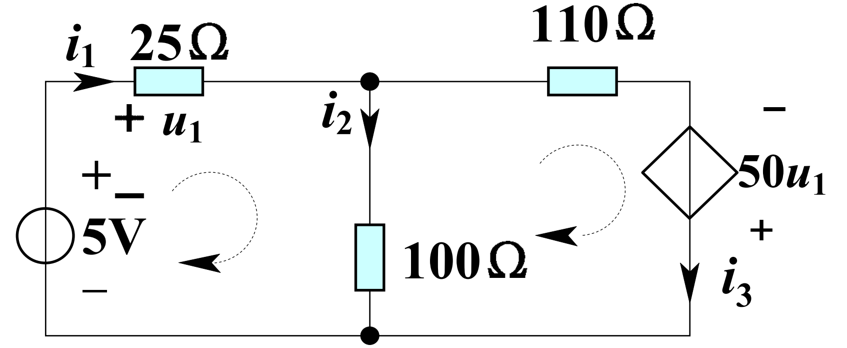


$$\begin{cases}-i_1-i_2+i_K=0\\10i_1+20i_K=4-2\\-10i_2-20i_K=2-2\end{cases}\quad 可得：\begin{cases}i_1=0.12\text{A},\\i_2=-0.08\text{A},\\i_K=0.04\text{A}.\end{cases}$$

再回到原电路，

有：$i_3=i_S+i_K=0.14\text{A}.$

特例2：含受控电源的处理方法:



①将受控源看作独立电源，按上述方法列写支路法方程;

②将控制量用独立变量(支路电流)表示;

③将②的表示式代入①的方程，移项整理后即得独立变量(支路电流)的方程组。

例题：求图示电路的各支路电流

解：①

$$\begin{cases} -i_1+i_2+i_3=0 \\ 25i_1+100i_2=5 \\ -100i_2+110i_3=50u_1 \end{cases}$$

② $u_1=25i_1$

③ 将式②代入①，消去控制量u_1并整理得

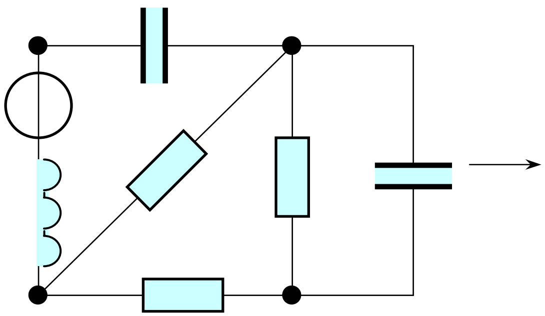
$$\begin{cases} -i_1+i_2+i_3=0 \\ 25i_1+100i_2=5 \\ -1250i_1-100i_2+110i_3=0 \end{cases}$$

进一步求解方程组得到所需要的结果

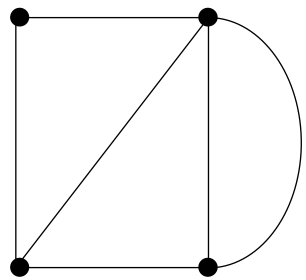
作业：习题卡2-14

网络的线图和独立变量

一、图的基本概念：将电路中的每个元件（支路）用一线段表示，则这些线段通过节点连接成一个几何结构图，称之为网络的线图或拓扑图，简称图，对图中的每一支路规定一个方向，则称为有向图。



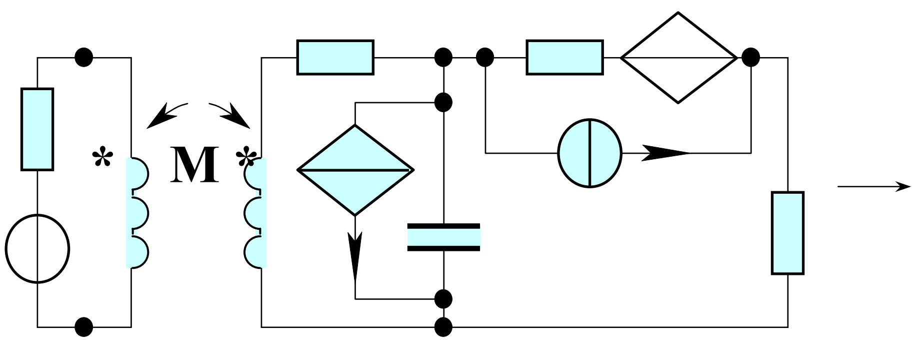
网络A



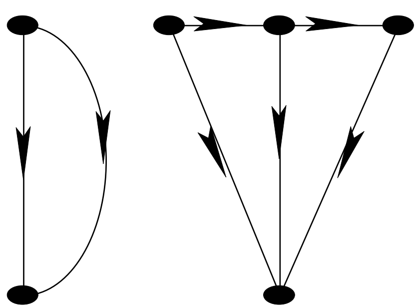
G_A

1. 连通图：任意两节点间至少存在一条通路(路径)，如G_A即为连通图；而G_B为非连通图。

2. 子图：是图G的一个子集。



网络B



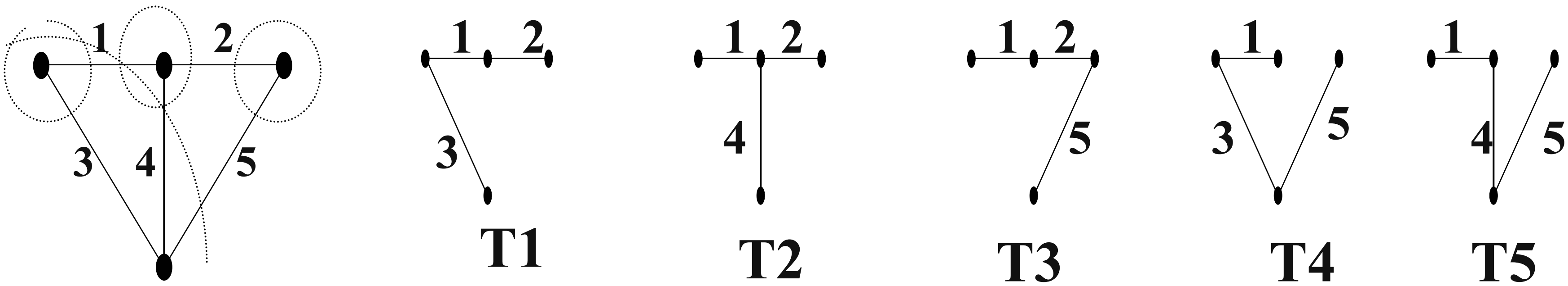
G_B

3 . 路径：由G的某点出发，沿某些支路连续移动，到达另一指定节点(或原来的节点)所形成的通路。

二. 树、树支、连支、割集

树T：是连接所有节点但是不构成回路的支路的集合。即连通图G的一个子图，该子图满足

①是连通的；
②包含G的全部节点；
③不包含回路。



T1={1,2,3},T2={1,2,4},T3={1,2,5},T4={1,3,5},T5={1,4,5}

树支(Tree branches)：构成某个树的支路。恒有：树支数t=n-1．

连支(Link branches)：某个树树支之外的支路为连支，对某一确定的树 每增加一个连支，就和树支构成一个回路。 l=b–n+1．

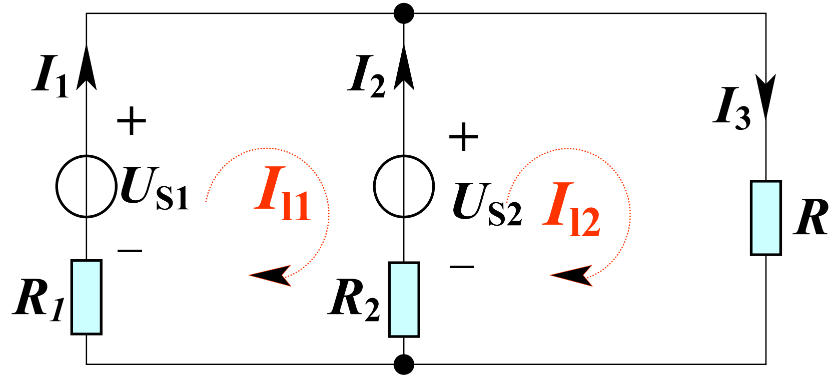
割集Q：是连通图G的某个支路的集合，它满足：i)若将这些支路全部移去，G就分离为两个连通子图（其中一个子图可以为孤立节点）；ii)若少移去一条这样的支路，G就仍然连通。即某一闭合面切割到的支路的集合(注意每条支路只能切割一次)

$Q_1=\{1,3\}$, $Q_2=\{1,4,5\}$, $Q_3=\{1,4,2\}$, $Q_4=\{2,5\}$

第五节 回路法、网孔法

一、回路电流（网孔电流）

在右图中假定有I_{l1}、I_{l2} 两个电流沿各个独立回路的边界流动，则所有的支路电流均可用此电流线性表示，所有电压亦能由此电流线性表示。此电流，称之为回路电流。



$$\begin{cases} I_1 = I_{l1} \\ I_2 = -I_{l1} + I_{l2} \\ I_3 = I_{l2} \end{cases}$$

式中隐含了KCL，沿回路绕行方向列写KVL得

$$\begin{cases} R_1 I_1 - R_2 I_2 = U_{S1} - U_{S2} \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = U_{S2} \end{cases}$$

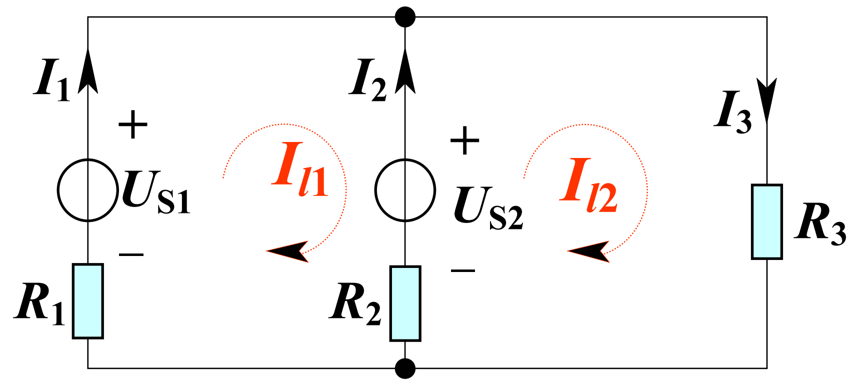
将回路电流代入得：

$$\begin{cases} R_1 I_{l1} + R_2 I_{l1} - R_2 I_{l2} = U_{S1} - U_{S2} \\ -R_2 I_{l1} + R_2 I_{l2} + R_3 I_{l2} = U_{S2} \end{cases}$$

解方程组求得回路电流，进一步求得支路电流，各元件电压。此例可知以回路电流为变量求解比支路法求解的方程数少（n-1）即只有(b-n+1)个。

二、回路法、网孔法

回路电流可以表示出电路所有支路的电流和电压，所以具有完备性，所取的回路是相互独立的，回路电流不可以相互表示，因此又具有独立性。可作为一组完备的独立变量。选择(b–n+1)个独立回路（每选一个回路，至少增加一条新的支路）电流为变量列写方程求解的方法称为回路法，。选(b–n+1)个网孔电流为变量列写方程求解的方法称为网孔法。



$$\begin{cases} R_1 I_{l1} + R_2(I_{l1} - I_{l2}) = U_{S1} - U_{S2} \\ R_2(-I_{l1} + I_{l2}) + R_3 I_{l2} = U_{S2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} (R_1 + R_2)I_{l1} - R_2 I_{l2} = U_{S1} - U_{S2} & (1) \\ -R_2 I_{l1} + (R_2 + R_3)I_{l2} = U_{S2} & (2) \end{cases}$$

式中方程（1）I_{l1}前的系数为回路l_1的所有电阻之和，I_{l2}前的系数为两回路的公有电阻，方程（2）I_{l2}前的系数为回路l_2的所有电阻之和，I_{l1}前的系数为两回路的公有电阻，右边为各回路沿绕行方向上的电压源电位升的代数和。

三、回路法方程的一般形式

$$\begin{cases} R_{11}I_{l1}+R_{12}I_{l2}+\cdots+R_{1m}I_{lm}=U_{S11} \\ R_{21}I_{l1}+R_{22}I_{l2}+\cdots+R_{2m}I_{lm}=U_{S22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{m1}I_{l1}+R_{m2}I_{l2}+\cdots+R_{mm}I_{lm}=U_{Smm} \end{cases}$$

其系数规律为:

（1） R_{11} —回路l_1的所有电阻之和，称为该回路的自电阻(恒 正)(R_{22}、R_{mm} 同理);

（2）R_{12} 、R_{21} —回路1、2的公有电阻之“代数和”，称为互电阻；仅当I_{l1} 、I_{l2}在此互电阻上同方向时取正号；反之取负号。无受控源时有$R_{12}=R_{21}$，$R_{13}=R_{31}$，……;

（3）U_{S11} —回路l_1沿I_{l1}方向上的电压源电位升的代数和(U_{S22}、U_{Smm} 同理)。

有了这些规律，就可以由电路直接列写出回路方程，而不必象上面那样分好几步

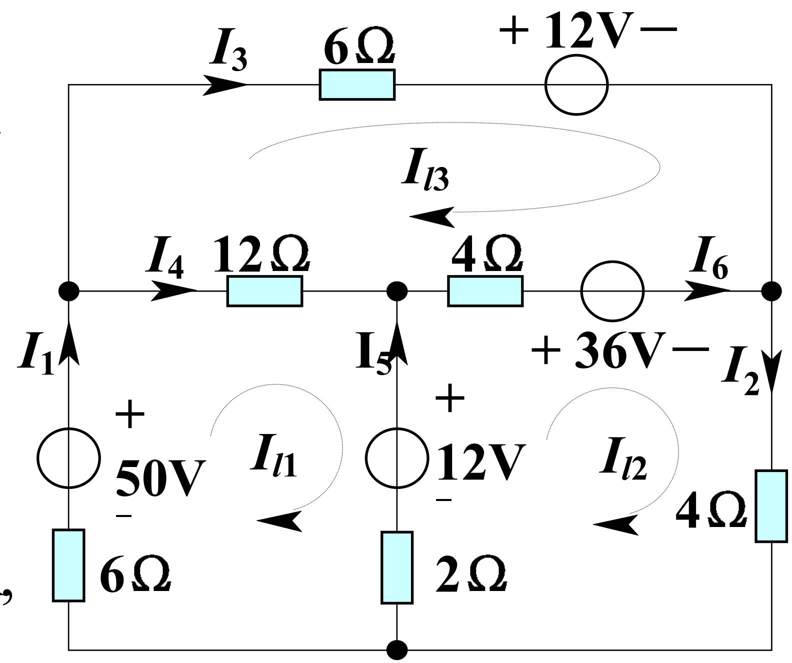
四、回路法(网孔法)的基本步骤

1、选定 (b–n+1个)独立回路，标出回路电流及绕行方向(常选网孔)；

2、运用“自电阻,互电阻及回路电压源的电位升代数和”概念直接列写回路电流方程;

3、联立求解这m个独立方程，得各回路电流，进而解出其它待求值;

例：用回路法求各支路电流。



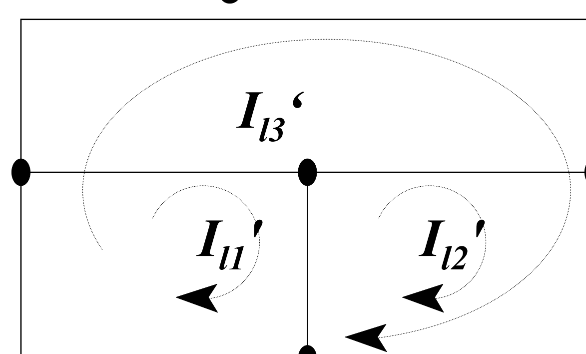
解：方法一网孔法：选择网孔列写方程

$$\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{cases}(6+12+2)I_{l1}-2I_{l2}-12I_{l3}=50-12\\ -2I_{l1}+(2+4+4)I_{l2}-4I_{l3}=12-36\\ -12I_{l1}-4I_{l2}+22I_{l3}=36-24\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}I_{l1}=3\\ I_{l2}=-1\\ I_{l3}=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}I_1=3\text{A}, & I_4=I_{l1}-I_{l3}=1\text{A},\\ I_2=-1\text{A}, & I_5=-I_{l1}+I_{l2}=-4\text{A},\\ I_3=2\text{A}, & I_6=I_{l2}-I_{l3}=-3\text{A}.\end{cases}$$

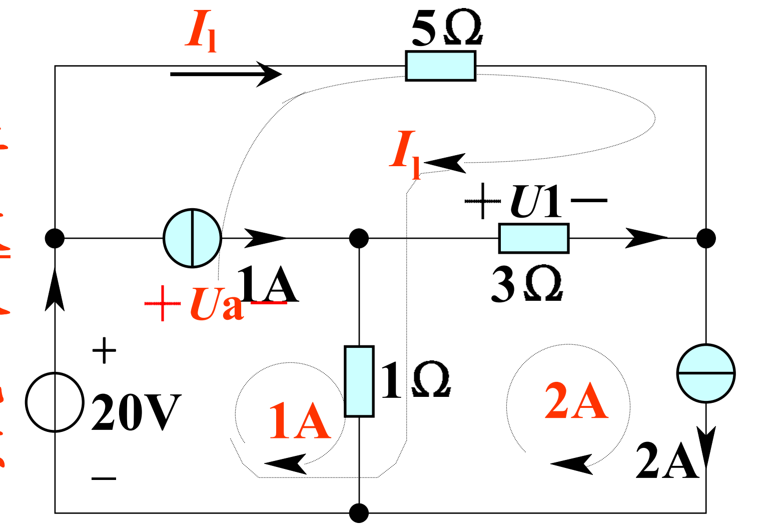
方法二：回路法选所示独立回路：

$$\begin{array}{l} l_1' \\ l_2' \\ l_3' \end{array}\begin{cases}20I_{l1}'-2I_{l2}'+6I_{l3}'=38\\ -2I_{l1}'+10I_{l2}'+4I_{l3}'=-24\\ 6I_{l1}'+4I_{l2}'+16I_{l3}'=26\end{cases}$$



五、回路法的特例情况

特例1：含电流源i_S．



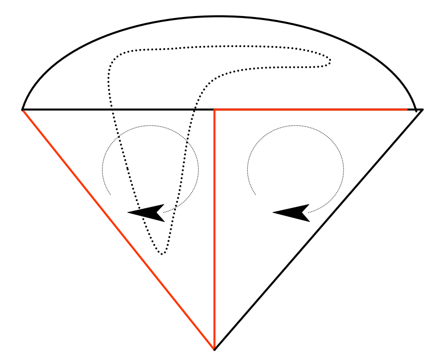
处理方法一(回路法)：选择一个树，将电压源支路放在树支上，将电流源放连支上，选择树支和连支构成回路（基本回路），连支电流就为回路电流，从而i_S 所在回路的KVL方程可不列。（少1变量少1方程)。

处理方法二(网孔法)：① i_S仅在一个网孔中，此网孔方程不列。 ② i_S为多个网孔共有则增设i_S上电压u_{IS}为变量，列写相应网孔的KVL方程；② 补充该i_S与有关回路电流的关系式(多一变量、多一方程)。

处理方法三：为有伴电流源时，先将有伴电流源等效成有伴电压源，再按基本步骤列写回路法方程。

例：用回路法求U_1

解：方法一："巧选回路"法，如图，1A回路不列写方程， 2A回路不列写方程，

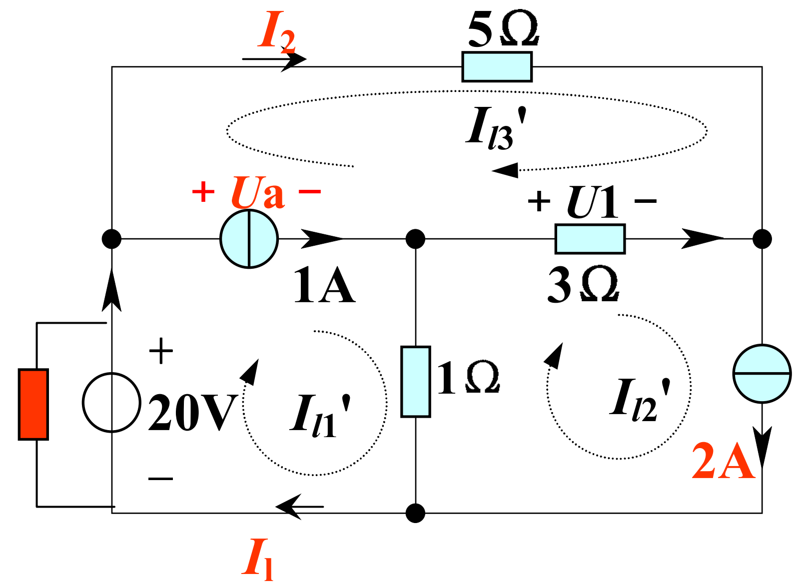


I_1回路：$1 \times 1 - 4 \times 2 + (5+3+1)I_1 = 20$得：$I_1 = 3A$

$U_1 = 3(2 - I_1) = 3(2-3) = -3V$;

方法二：增设变量法，选择网孔如右图

$$\begin{matrix} l_1' \\ l_2' \\ l_3' \end{matrix}\begin{cases} 1I_{l1}'-1I_{l2}'=20-U_a \\ I_{l2}'=2 \\ -3I_{l2}'+8I_{l3}'=U_a \end{cases}$$



补充 $I_{l1}'-I_{l3}'=1$

可得：
$$\begin{cases} I_{l1}'=4\text{A},\ I_{l2}'=2\text{A},\ I_{l3}'=3\text{A}, \\ U_a=18\text{V},\ U_b=5\text{V}, \end{cases}$$

$$U_1=3(I_{l2}'-I_{l3}')=3(2-3)=-3\text{V},$$

熟练后直接用只与一个回路（网孔）关联的支路电流表示回路（网孔）电流。如：

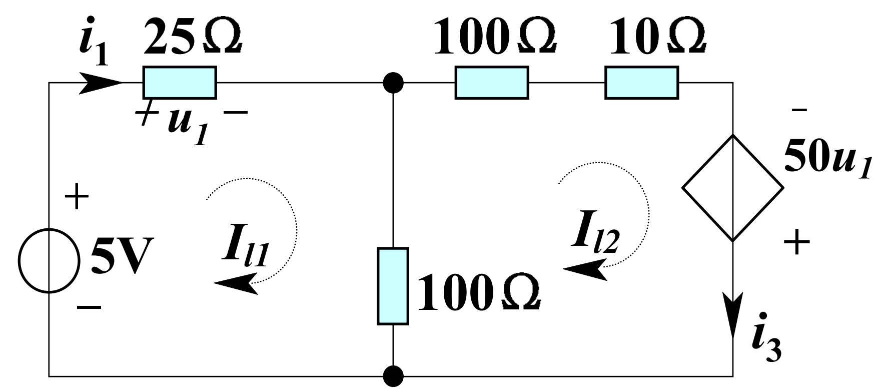
$$\begin{matrix} l_1' \\ l_3' \\ 补 \end{matrix}\begin{cases} 1I_1-2=20-U_a \\ -3\times 6+8I_2=U_a \\ I_1-I_2=1 \end{cases}$$

此例中若有电阻等元件与电压源并联，处理时电阻不计，但要注意此时所求的I_{l1}‘不是电压源上的电流。若有电阻等元件与电流源串联，要注意相类似的问题。即电路中无伴电源等效仍注意对外等效，对内不等效的问题。

特例 2：含受控电源的处理方法:

①先将受控源看作独立电源，按上述方法列写回路法方程;②将控制量用独立变量(回路电流)表示（控制量最好放连支上）。

③将②中的表示式代入①中的方程，移项整理后即得独立变量(回路电流)的方程组。



例1： 试列写图示电路的回路方程

①
$$\begin{cases} 125i_1 - 100i_2 = 5 \\ -100i_1 + 210i_2 = 50u_1 \end{cases}$$

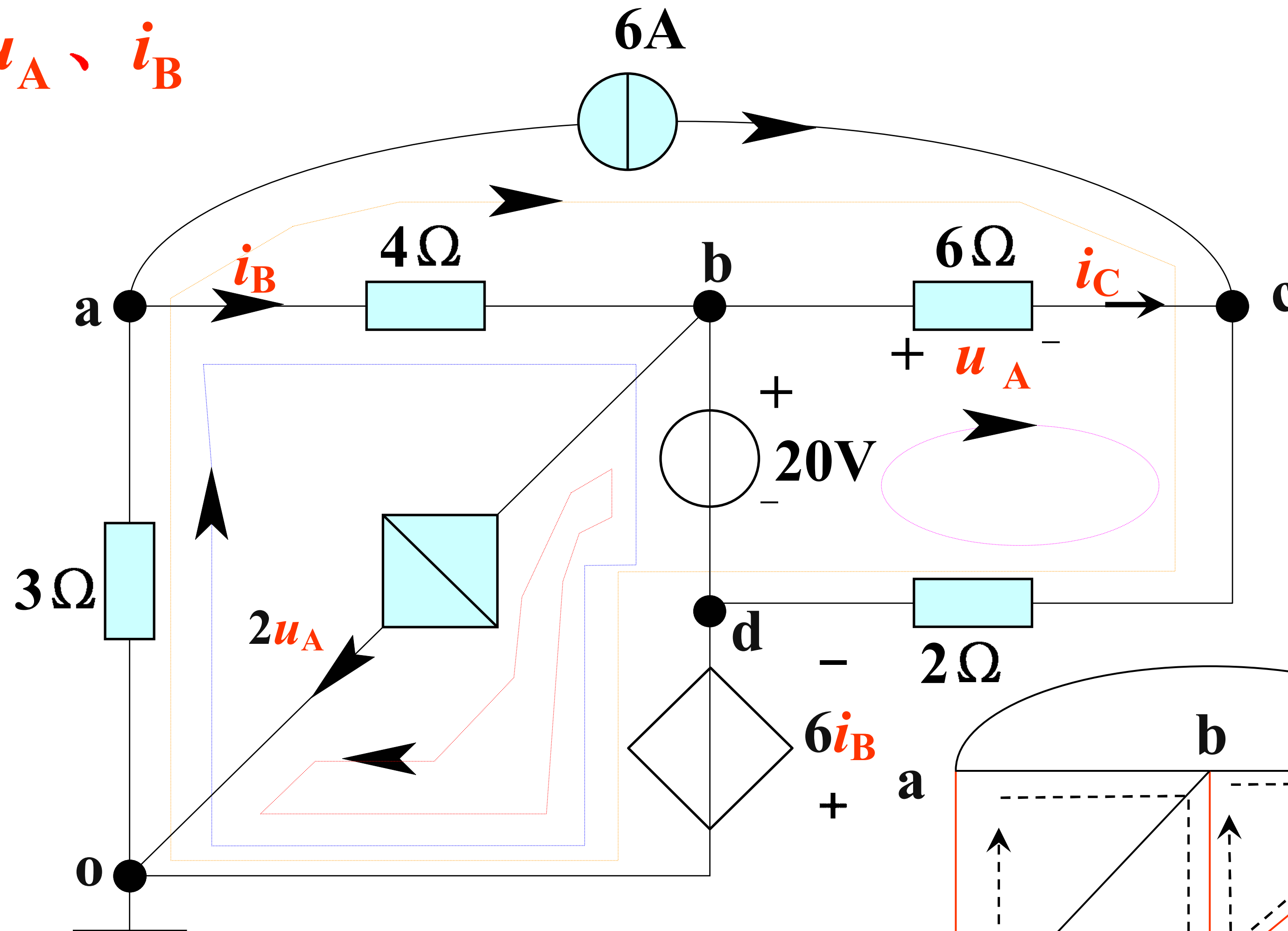
② $u_1 = 25i_1$

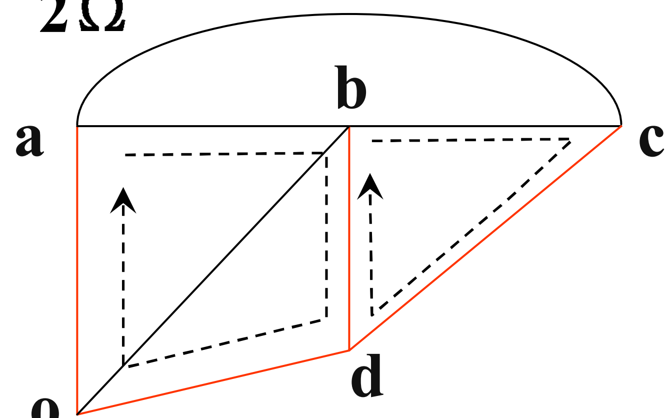
③ 将式②代入①，消去控制量u_1并整理得:

$$\begin{cases} 125i_1 - 100i_2 = 5 \\ -1350i_1 + 210i_2 = 0 \end{cases}$$

这里由于有受控源，$100 = R_{12} \neq R_{21} = -1350$！所以有受控源的电路不可以用互电阻概念直接写回路方程

例2．求u_A、i_B





解： 选 择 树 与 连 支 ， 回 路 取 为 $l_{bodb}(2u_A)$ 、 $l_{abdoa}(i_B)$ 、 l_{bcdb} (i_C) ， l_{acdoa} (6A)

对不是电流源的回路写方程:

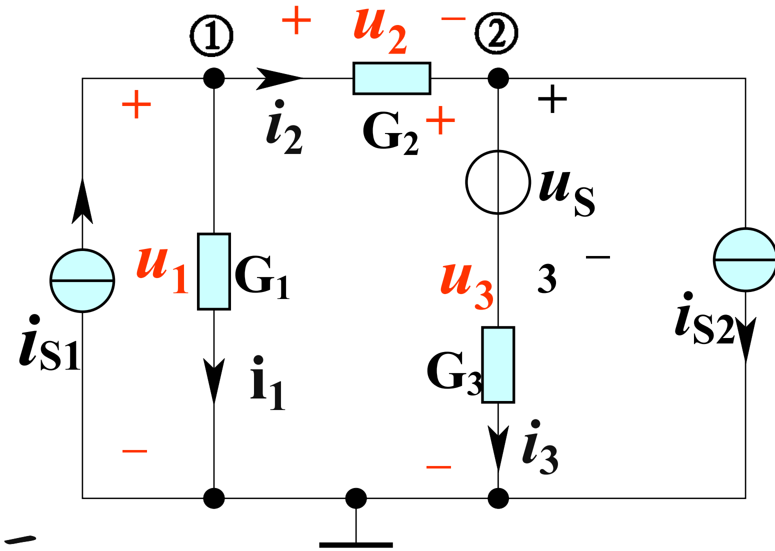
$$\begin{cases} l_{abdoa} & 7i_B + 3\times 6 = 6i_B - 20 \\ L_{bcdb} & 8i_C + 2\times 6 = 20 \\ 补 & u_A = 6i_C \end{cases}$$

解得: $i_B = -38A$ $u_A = 6V$

作业：习题卡2-16，17，21，22

第六节 节点法

一、节点电压的独立性与完备性



节点电压—节点与零电位参考点间的电压。数目为 (n-1)个。

如图：u_{n1}，u_{n2}，数目为 (3-1)

各支路电压分别为：$u_1 = u_{n1}$，$u_2 = u_{n1} - u_{n2}$，$u_3 = u_{n2}$

所有电流亦能由节点电压线性表示

$$i_1 = G_1 u_{n1},\quad i_2 = G_2 (u_{n1} - u_{n2}),\quad i_3 = G_3 (u_{n2} - u_{S3}) \qquad (*)$$

节点电压可线性表示所有支路电压和电流，其具有完备性；从某一节点到参考节点的路径不同于其它节点到参考节点的路径，其又具有独立性。节点电压可作为一组完备的独立变量

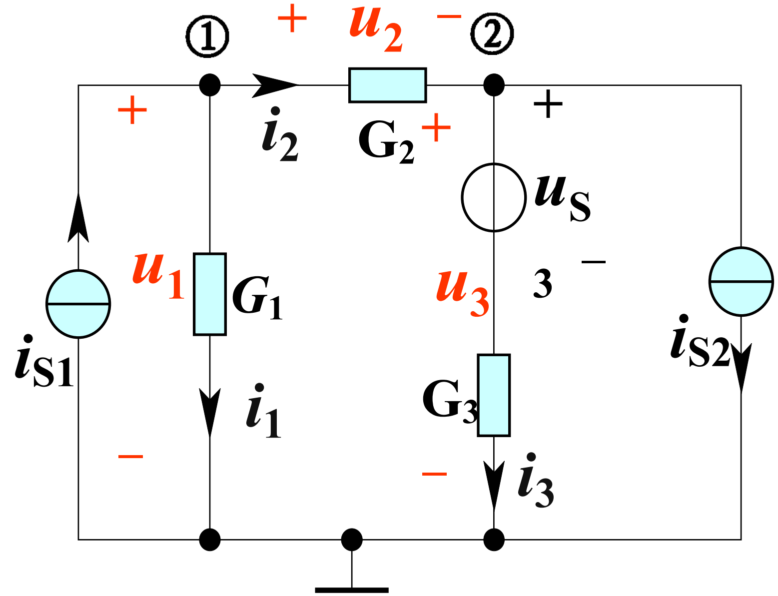
节点电压与支路电压之间的关系隐含了KVL，故上图列写KCL方程时：

$$\begin{aligned} n_1 &: \begin{cases} i_1 + i_2 = i_{S1} \\ -i_2 + i_3 = -i_{S2} \end{cases} \\ n_2 &: \end{aligned}$$

将（*）式代入

$$\begin{cases} G_1u_{n1}+G_2(u_{n1}-u_{n2})=i_{S1} \\ -G_2(u_{n1}-u_{n2})+G_3(u_{n2}-u_{S3})=-i_{S2} \end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} (G_1+G_2)u_{n1}-G_2u_{n2}=i_{S1} \\ -G_2u_{n1}+(G_2+G_3)u_{n2}=G_3u_{S3}-i_{S2} \end{cases}$$



二、节点法方程的规律

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1}+G_{12}u_{n2}+\cdots+G_{1\,(n-1)}u_{n\,(n-1)}=i_{S11} \\ G_{21}u_{n1}+G_{22}u_{n2}+\cdots+G_{2\,(n-1)}u_{n\,(n-1)}=i_{S22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_{n1}u_{n1}+G_{n2}u_{n2}+\cdots+G_{(n-1)\,(n-1)}u_{n\,(n-1)}=i_{Sn\,n} \end{cases}$$

系数规律:

①G_{11} —节点①的所有电导之和，称为该节点的自电导(恒正)(G_{22}、G_{33}同理);

②G_{12}、G_{21}—节点①、②的公有电导之和的负值，称为互电阻(恒负); 无受控源时有 $G_{12}=G_{21}$，$G_{23}=G_{32}$，……

③ i_{S11}—注入节点①的电流源(含由有伴电压源等效来的电流源)的代数和(i_{S22}、i_{S33}同理)。

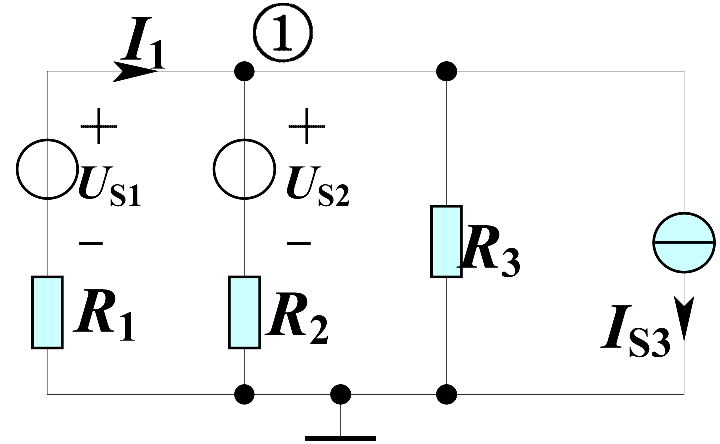
三、节点法的基本步骤

1．选定参考节点，并标出其余(n-1)个节点的节点序号；

2．运用“自电导，互电导及注入节点电流源（含由有伴电压源等效来的电流源）的代数和”等概念直接列写节点法方程；

3．联立求解这(n-1)个独立方程,得各节点电压，进而解出其它待求量。(注意与电流源串联的电阻不得计入自电导和互电导)

四、节点法的特例情况



特例 1 节点数 n=2 独立节点数=1）．如右图：可先将有伴电压源等效成有伴电流源（熟练之后不必），按节点法的基本步骤，有：

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)U_{n1}=\frac{U_{S1}}{R_1}-\frac{U_{S2}}{R_2}-I_{S3}$$

$$\Rightarrow \quad U_{n1}=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}-\dfrac{U_{S2}}{R_2}-I_{S3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

即对n=2的电路有

$$U_{n1}=\frac{\sum GU_s+I_s}{\sum G}$$

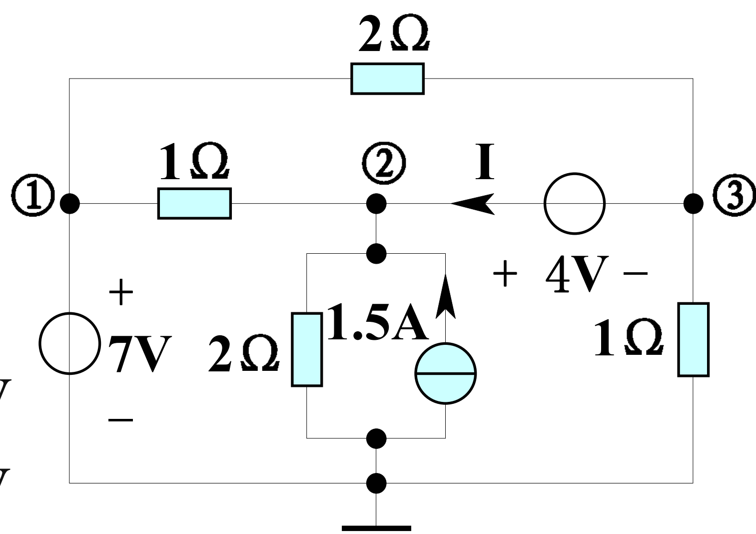
此式称为弥尔曼定理

特例2：含无伴电压源u_S

处理方法一：将u_S的一个极（一般为负极性端）选作参考节点，则另一个极所在节点的电位就已知了，从而少了一个节点电压变量，可少列写该节点的KCL方程(少1变量少1方程)。

处理方法二（改进节点法）：①不止一个电压源则增设u_S上电流i_{Us}为变量，代入相应节点的KCL方程（好比电流源i_{Us}）；② 补充该u_S与两端节点电压的关系式(多一变量、多一方程)。

例：求右图的U_{n2}、U_{n3}及I .



解：显然，对7V电压源可用方法一，而对4V电压源则要用方法二:

$$
\begin{array}{l}
① \\ ② \\ ③ \\ \text{补充}
\end{array}
\begin{cases}
\text{不列写} \\
-7+(\frac{1}{2}+\frac{1}{1})U_{n2}=1.5+I \\
-\frac{1}{2}\times 7+(\frac{1}{2}+\frac{1}{1})U_{n3}=-I \\
U_{n2}-U_{n3}=4
\end{cases}
\rightarrow
\begin{cases}
U_{n2}=6\text{V} \\
U_{n3}=2\text{V} \\
I=0.5\text{A}
\end{cases}
$$

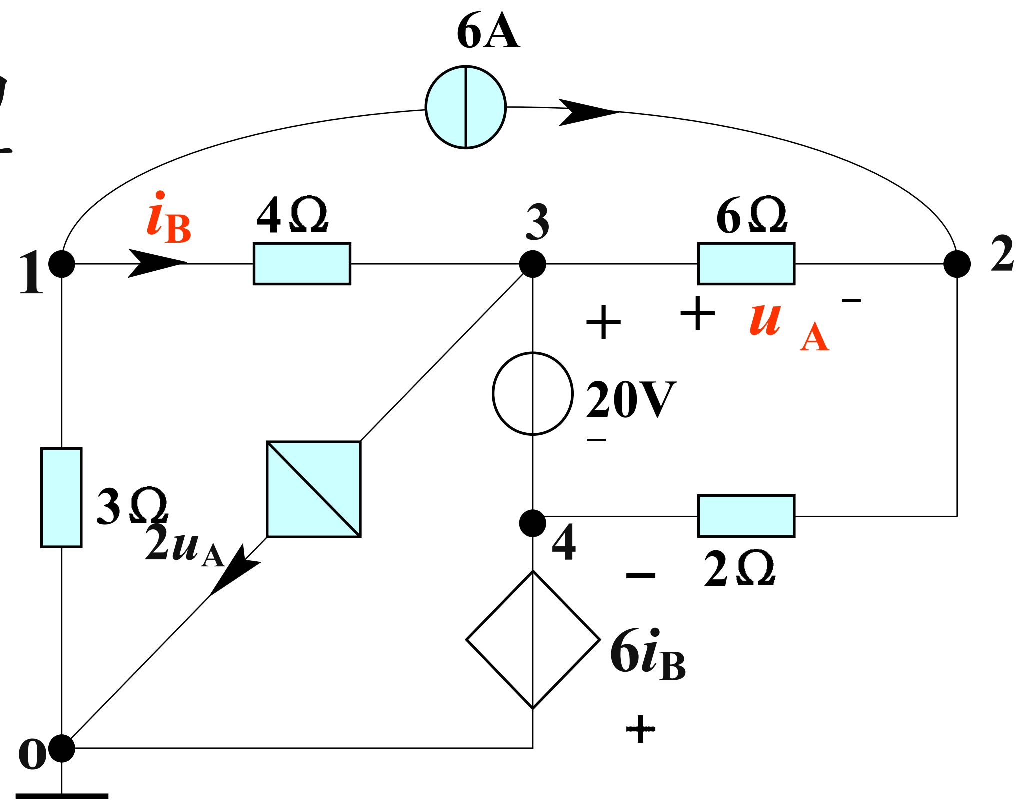
特例3：含受控电源的处理方法：

① 先将控制量用独立变量(节点电压)表示；

② 将受控源看着独立电源，按上述方法列写节点法方程；③将①中的表示式代入②中的方程，移项整理后即得独立变量(节点电压)的方程组。

例. 求u_A、i_B.

解：节点③、④的电位分别为$(20-6i_B)$和$-6i_B$，因此，只要对节点①、② 列写方程：



$$
\begin{cases}
① \quad (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})u_{n1}-\frac{1}{4}(20-6i_B)=-6 \\
② \quad (\frac{1}{6}+\frac{1}{2})u_{n2}-\frac{20-6i_B}{6}+\frac{6i_B}{2}=6 \\
\text{补} \quad i_B=(u_{n1}-20+6i_B)/4
\end{cases}
$$

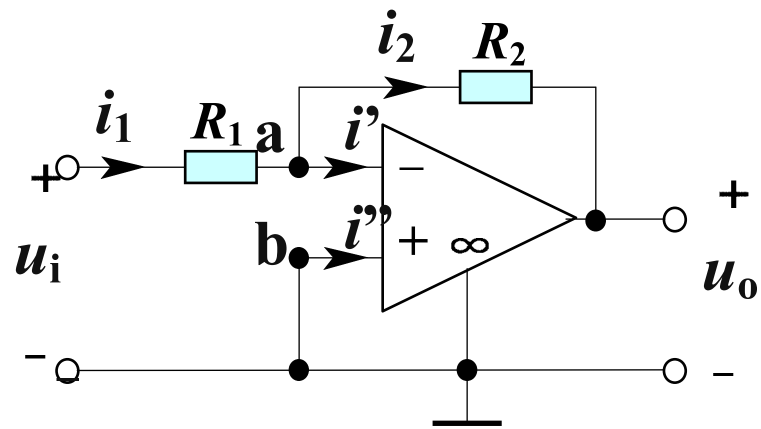
$$
\begin{cases}
u_{n1}=96\text{V} \\
u_{n2}=242\text{V} \\
i_B=-38\text{A}
\end{cases}
\quad \therefore u_A=(20-6i_B)-u_{n2}=6\text{V}.
$$

所得节点方程由于有受控源，同样会造成$G_{12}\neq G_{21}$.

特例4 具有运算放大器的电阻电路

一、利用运放特性及KCL、KVL分析

分析时用理想运算放大器代替实际运算放大器，带来的计算误差很小，所以通常可利用理想运放的“虚断”、“虚短”以及KCL、KVL来分析含运放的电路



倒向比例运算电路

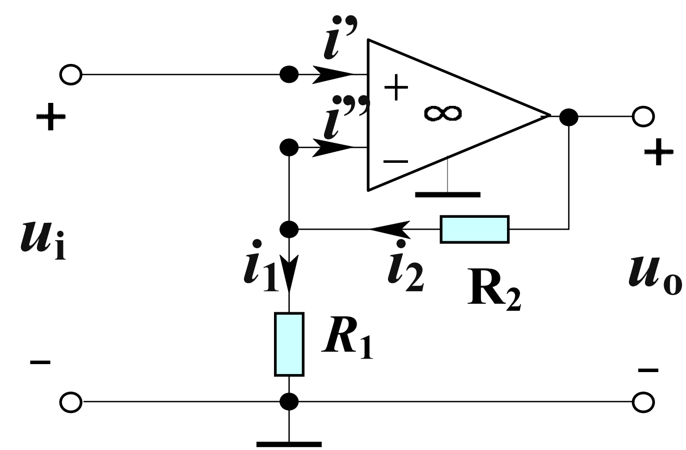
例1：倒向比例运算电路如图 $\dfrac{u_o}{u_i}$

解：由虚短 → $u_a = u_b = 0$

$$i_1 = \frac{u_i}{R_1},\quad i_2 = -\frac{u_o}{R_2};$$

由虚断 $i' = 0 \to i_1 = i_2$ ，

$$\frac{u_i}{R_1} = -\frac{u_o}{R_2} \to \frac{u_o}{u_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$

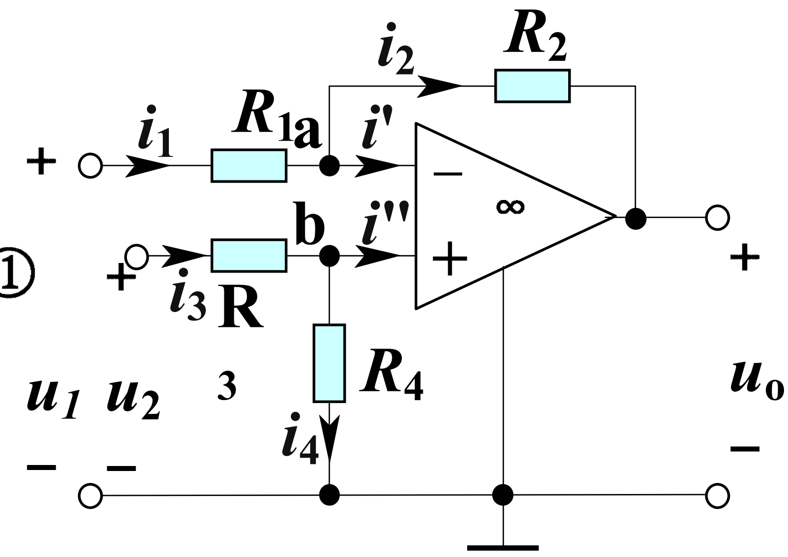


非倒向比例运算电路

例2：倒向比例运算电路如图 $\dfrac{u_o}{u_i}$

解：$$\frac{u_i}{R_1} = \frac{u_o - u_i}{R_2} \to \frac{u_o}{u_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

例3 已知 $\dfrac{R_3}{R_4}=\dfrac{R_1}{R_2}$ 试求u_o的表达式



差动运算电路

解：$i'=0 \rightarrow i_1=i_2 \rightarrow \dfrac{u_1-u_a}{R_1}=\dfrac{u_a-u_o}{R_2}$ ①

$i''=0 \rightarrow i_3=i_4 \rightarrow \dfrac{u_2-u_b}{R_3}=\dfrac{u_b}{R_4}$ ②

②式解出u_b，因虚短 $u_a=u_b$代入①式得

$$u_o=-\frac{R_2}{R_1}u_1+\frac{R_2}{R_1}\left[\frac{R_2}{R_1}+1\right]u_2\Bigg/\left[\frac{R_3}{R_4}+1\right]$$

由题中条件得：$u_o=\dfrac{R_2}{R_1}(u_2-u_1)$

可见输出与两输入之差成正比，因而被称作差动运算电路。

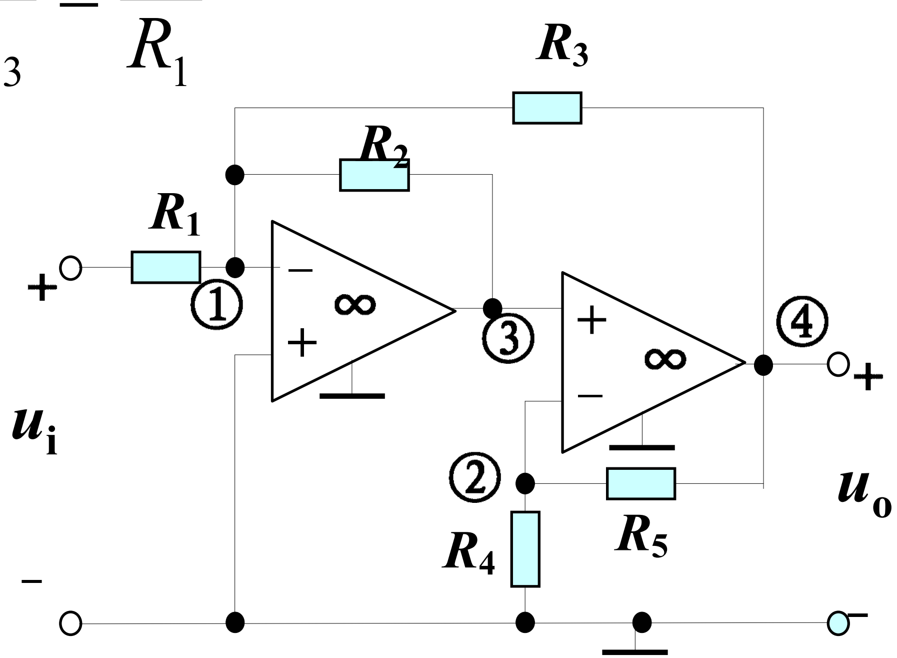
二、含理想运放的节点法

1. 列写运放两输入端节点方程时考虑到“虚断”特性；
2. 不列写其输出端节点方程；既是输入端又是输出端，按输出端处理，不列写方程。
3. 补充“虚短”方程。

例4.（P.49例2-17）试求u_o / u_i．

解：节点①和②的方程分别为：

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)u_{n1}-\frac{u_{n3}}{R_2}-\frac{u_o}{R_3}=\frac{u_i}{R_1} \\ \left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)u_{n2}-\frac{1}{R_5}u_o=0\end{cases}$$



节点③和④：不列写！

由虚短得 $\begin{cases}u_{n1}=0 \\ u_{n2}=u_{n3}\end{cases}$

于是可得：$$\frac{u_o}{u_i}=\frac{-R_2R_3(R_4+R_5)}{R_1(R_3R_4+R_2R_4+R_2R_5)}$$

作业：习题卡2-23，24，28，32