第二章

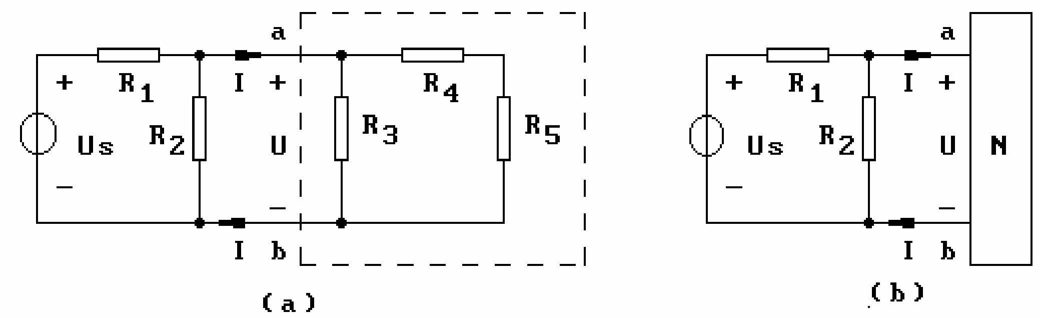
电路的等效变换

§2－1　等效二端网络的定义　电阻串并联电路

一、等效二端网络的定义

1．二端网络的定义

在电路分析中，可以把互连的一组元件看作为一个整体，如图(a)所示(R_3、R_4、R_5这一部分电路)。当这个整体只有两个端钮与外部电路相连接，则不管它的内部结构如何，我们统称它为二端网络或单口网络，可以用图(b)中的N来表示。



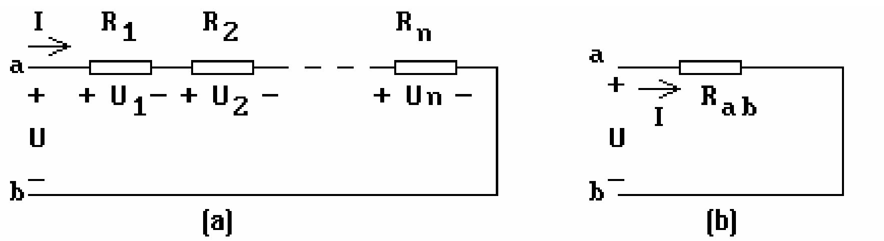
特点：二端网络中，从一个端钮流进的电流必定等于另一端钮流出的电流，该电流I称为端口电流，U为端口电压。

2．等效

二端网络N_1的(VAR)与另一个二端网络N_2的(VAR)完全相同，则称N_1、N_2完全等效。这里的等效是指对任意的外电路等效，对内部不等效。

目的：引入等效概念，可大大简化二端网络，以利分析。

二、电阻的串联电路(流过同一电流)及分压公式



在电路中，把几个电阻元件依次一个一个首尾连接起来，中间没有分支，在电源的作用下流过各电阻的是同一电流。这种连接方式叫做电阻的串联。

图示电路表示几个电阻串联后由一个直流电源供电的电路。U代表总电压，I为电流。

N_1和N_2两个二端网络，运用等效概念，N_1可等效为N_2(一个电阻R_{ab})

由KVL　　$U＝U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n$

由VAR　　$U＝R_1I_1+R_2I_2+\cdots\cdots+R_nI_n＝(R_1+R_2+\cdots\cdots+R_n)I$

对N_2：VAR　　$U=R_{ab}I$　　这里称R_{ab}为等效电阻。

∴串联(n个电阻)等效电阻$R_{ab}=\sum_{k=1}^{n}R_k$，等效电阻如图b

等效电阻必大于任一串联电阻，即：$R_{ab}>R_k$

而第k个电阻上的电压为：

$$U_k=\frac{R_k}{\sum_{k=1}^{n}R_k}U \qquad \text{——} \ (\text{分压公式})$$

下面再看　$P＝UI＝R_1I^2+R_2I^2+\cdots\cdots+R_nI^2=R_{ab}I^2$

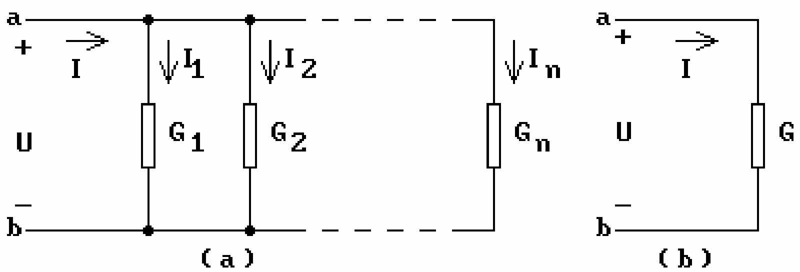
此式表示n个串联电阻吸收的总功率等于它们的等效电阻所吸收的功率。

电阻串联时，各电阻上的电压为：$U_k=R_kI=\frac{R_k}{R_{ab}}U$，此式称分压公式。

例：P. 23　例2－1

三、电阻的并联(加的是同一电压)(及分流公式)

图示为n个电阻并联。电阻并联时，各电阻上的电压相同。



设a、b两端电压为U，总电流I，$G_1,G_2\cdots\cdots G_n$为各电阻的电导，$I_1,I_2\cdots\cdots I_n$为流过各电阻的电流。

由KCL　$I=I_1+I_2+\cdots+I_n=\frac{U}{R_1}+\frac{U}{R_2}+\cdots+\frac{U}{R_n}=(G_1+G_2+\cdots+G_n)U=GU$

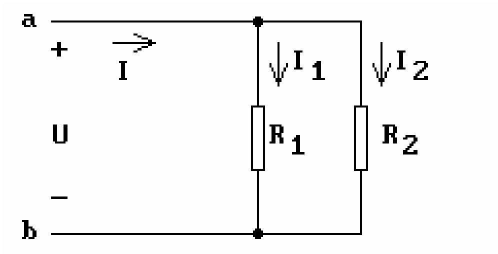
$$G=G_1+G_2+\cdots\cdots+G_n=\sum_{k=1}^{n}G_k \qquad \text{或} \qquad \frac{1}{R}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_k}$$

G称为并联电阻的等效电导，等效电路如图(b)。

再由：$P＝UI＝(G_1+G_2+\cdots\cdots+G_n)U^2＝GU^2＝P_{总}$，得到：$n$个并联电阻吸收的总功率等于它们等效电阻所吸收的功率。

电阻并联时，各电阻中的电流为：$I_k = G_k U = \frac{G_k}{G} I$ ——称为分流公式。可见：各个并联电阻中的电流与它们各自的电导值成正比。

如图，两个电阻并联时，其等效电阻 R 可计算如下：



$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 // R_2$$

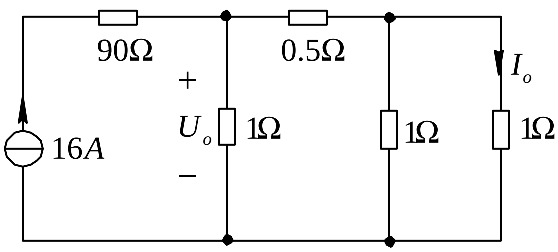
此时分流公式为：$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$

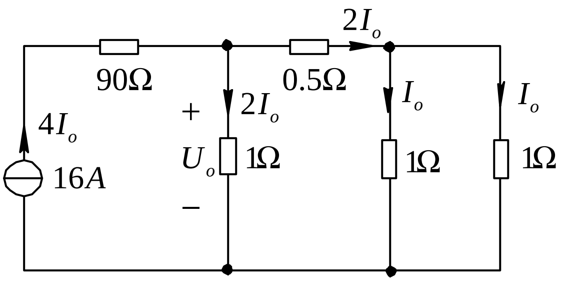
我们看 $R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ 有两个特例：

1) $R_1 = R_2$ 时 则 $R_{ab} = \frac{R_1}{2}$

2) $R_1 << R_2$ 时，$R_{ab} = R_1$

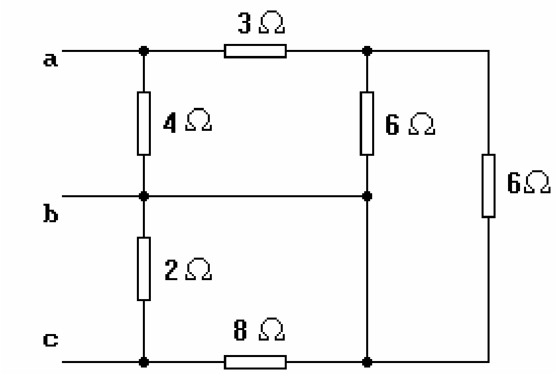
例： 求图示电路中的 I_o 及 U_o。

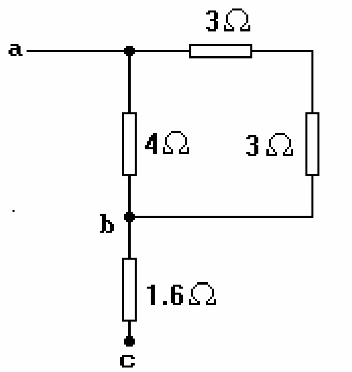




四、电阻的串并联(混联)

如图所示电路中，既有电阻串联，又有电阻并联，这种连接方式叫电阻的串并联(混联)，这种电路称为简单电路，可利用一、二结论逐步化简。





例　求图示电路R_{ab}、R_{ac}

解：　　1) 求R_{ab}

∵2Ω、8Ω被短路

∴ R_{ab}＝4//[3+(6//6)]=4//$(3+\frac{6}{2})$=4//6=2.4Ω

2) 求R_{ac}

原电路可改画为：

∴ R_{ac}=[4//(3+3)]+1.6=2.4+1.6=4Ω

在串并联电路中，对于给定的端钮，若已知电压U(或电流I)，欲求各电阻上的电压和电流，其求解步骤一般是：

1) 首先求出串并联电路对于给定端纽的等效电阻R或电导G；

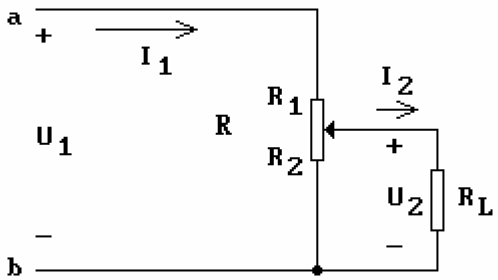
2) 应用欧姆定律求出电流(或电压)；

3) 应用电流分流、电压分压公式求出每个电阻上的电流和电压。

例：图示电路，已知$U_1=220V, R_L=50\Omega$， $R=100\Omega$

1) 当$R_2=50\Omega$时，$U_2=?$ 分压器的输入功率、输出功率及分压器本身消耗的功率为多少？

2) 当$R_2=75\Omega$时，输出电压是多少？



解：1) 当$R_2=50\Omega$时，a、b的等效电阻R_{ab}为R_2和R_L并联后与R_1串联而成，所以

$$R_{ab}=R_1+\frac{R_2R_L}{R_2+R_L}=(50+\frac{50\times50}{50+50})=75\Omega$$

滑线变阻器R_1段流过的电流

$$I_1=\frac{U_1}{R_{ab}}=\frac{220}{75}=2.93A$$

负载电阻流过的电流可由分流公式得：

$$I_2=\frac{R_2}{R_2+R_L}\times I_1=\frac{50}{50+50}\times2.93=1.47A$$

$$U_2=R_LI_2=50\times1.47=73.5V$$

分压器的输入功率为：$P_1=U_1I_1=220\times2.93=644.6W$

分压器的输出功率为：$P_2=U_2I_2=73.5\times1.47=108W$

分压器本身消耗的功率为：

$$P=R_1I_1^2+R_2(I_1-I_2)^2=50\times2.93^2+50\times(2.93-1.47)^2=535.8W$$

2) **当** $R_2 = 75\Omega$ **时**，

$$R_{ab} = (25 + \frac{75\times 50}{75+50}) = 55\Omega$$

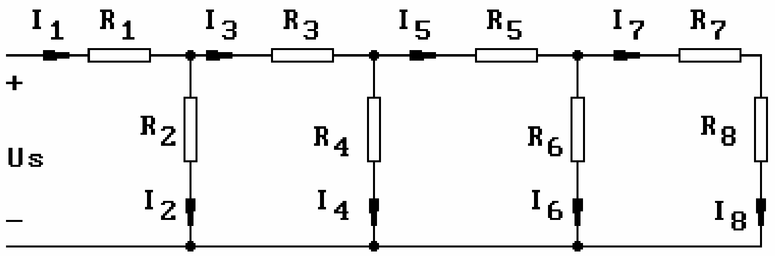
$$I_1 = \frac{220}{55} = 4A$$

$$I_2 = \frac{75}{75+50}\times 4 = 2.4A$$ **(分流公式)**

$$U_2 = 50\times 2.4 = 120V$$

五、梯形电路(P.28，自学)

具有下图所示结构形式的电路称为梯形电路，本质为混联。(注意分析该类电路的方法，线性处理)



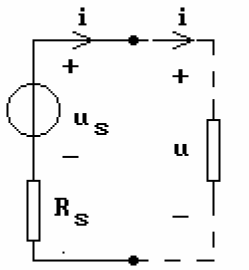
练习：老版 P. 44　2－4

作业： P. 41　2－1(a)(c)；2－2

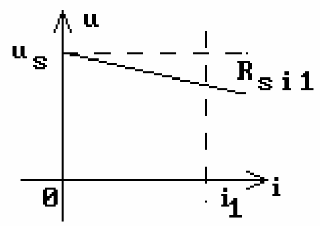
§2-2 实际电源的两种模型及其等效变换

一、由电压源构成的实际电源模型

一般情况下，实际电压源的端电压常随输出电流而变，实际电压源在一定范围内可用电压源U_s串联电阻R_s作为模型：(如干电池)



∴外特性为：



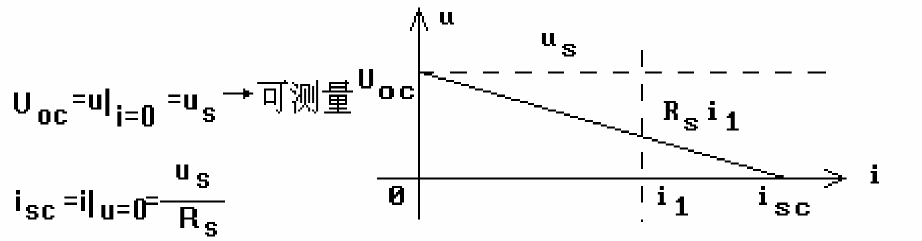
对此图，由欧姆定律及KVL可写出如右方程： $U = U_s - R_s I$

当实际电源不接负载时，它处于开路状态，这时因$I = 0$，所以它的端口电压等于定值电压 U_S,这时的端电压称为开路电压，用 U_{OC} 表示，$U_{oc} = U_S$。式中：U_S为电源的开路电压；R_S为电源内阻，又叫电源的输出电阻。

如果负载短路，实际电源处于短路状态，这时短路电流$I_{sc} = \dfrac{U_{oc}}{R_s}$，而端电压$U = 0$。由于实际电源内阻一般都很小，所以短路电流很大，以致会损坏电源，这是不允许的。

★ 实际电源的开路电压和短路电流的测量：

实际电源的开路电压很容易测出，如果允许将电压源短路，只要测出短路电流，就可以测定实际电源的内阻$R_s = \dfrac{U_s}{I_{sc}}$。

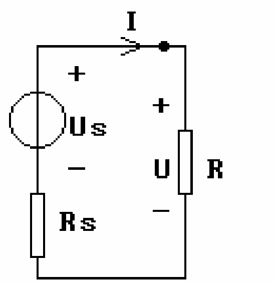


但对一般实际电压源是不允许短路的，那么有没有办法测出呢？如右下图：

方法是：接上适当R，测出U、I

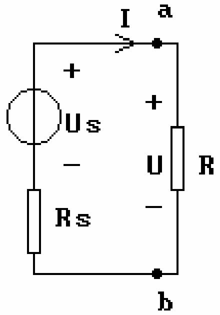
则：

$$R_s = \frac{U_s - U}{I} = \frac{U_{oc} - U}{I}$$



$(I_{sc}=\frac{U_s}{R_s})$

例：**某直流电源的开路电压为** $12V$，**与外电阻接通后**，**用电压表测得** $U=10V$，$I=5A$，**求** R **及** R_s



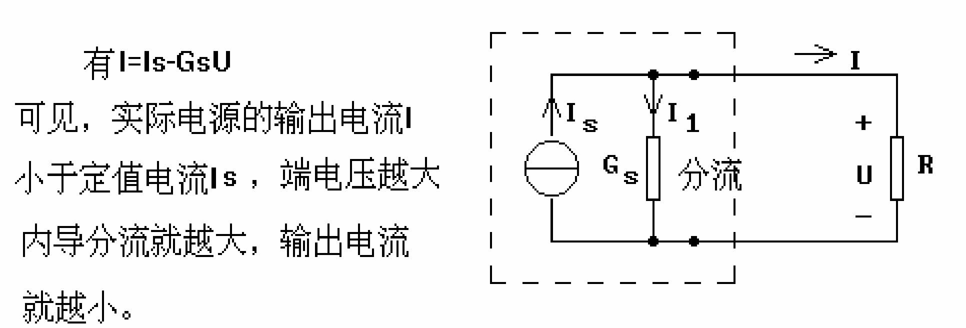
解：

$$R=\frac{U}{I}=\frac{10}{5}=2\Omega$$

$$R_s=\frac{U_{oc}-U}{I}=\frac{12-10}{5}=0.4\Omega$$

二、实际电流源模型—— 一般不得开路

理想电流源实际上是不存在的，**总存在一定内阻**，**可以用理想电流源** Is **和电导为** Gs **的电阻相并联来构成实际电源的模型**。



由欧姆定律、KCL：$I=I_s-G_sU$ (VAR **曲线见** P. 32 **图** 2-14)

I_s **为电源短路电流**，G_s **为电源内电导**：

$$G_s=\frac{I_s}{U_{oc}}$$

实际电流源的 G_s (**内阻** R_s **越大**)**越小**，**内部分流越小**，**就越接近于理想电流源**。

例：**上图中**，$I_s=4A$，$G_s=\frac{1}{8}S$，**当外接电阻** R=8Ω，**求**：I，U。

解：

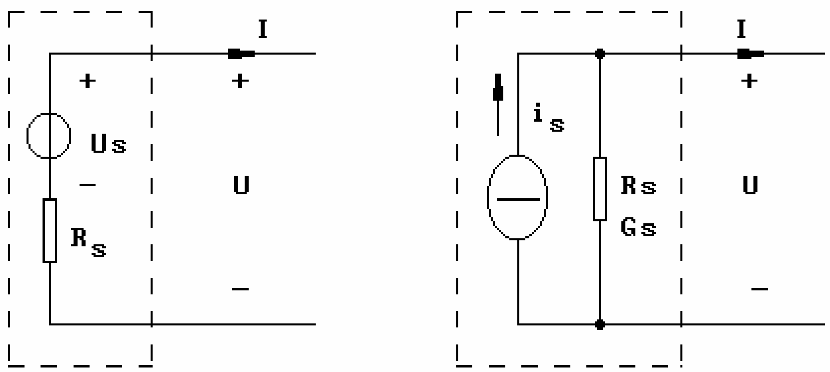
$$I=I_s-G_sU=\frac{U}{R}\Rightarrow U=\frac{I_s}{G_s+\frac{1}{R}}=\frac{4}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}=16V$$

$$I=\frac{U}{R}=\frac{16}{8}=2A$$

三、实际电源两种模型的等效互换

在电路分析中，由等效电路(如果两个电路对外电路的影响一致，则这两个电路等效)的概念，电源的两种模型可等效互换，因为我们关心的是电源对外电路的影响而不是电源内部的情况。

根据等效定义，两种模型等效则它们的 VAR **完全相同，则有：**



$U_s = R_s I_s$**或**$I_s = U_s / R_s$**，应注意：**

1．**互换时要注意电压源电压极性与电流源电流方向关系**

2．**两种模型中** R_s **相等，但联接方式不同**

讨论：

1) **当** $R_s \to 0$ **理想电压源**

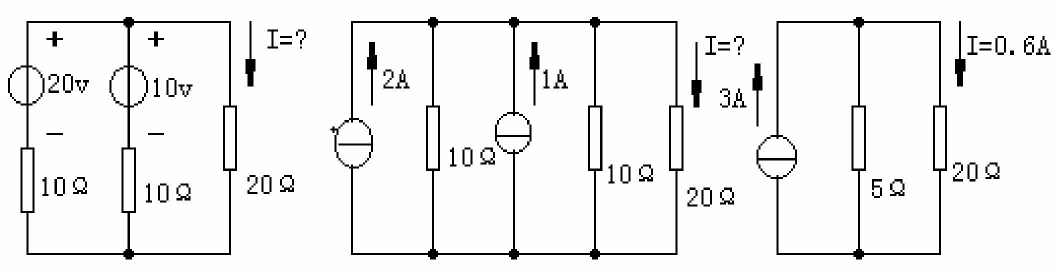
当 $G_s \to 0$ **理想电流源**

彼此间是不能互换的，故电压源和电流源叫做独立源，有时简称电源。

2) **这种等效仅对端口外部等效，对模型内部(虚线内部)不等效。**

例：当 $I=0$，$P_{Rs}=0$**(内部)，而** $P_{GS}=\frac{I_s^2}{G_S}\neq 0$**(内部)。尽管** $R_S=\frac{1}{G_S}$，**但** $P_{RS}\neq P_{GS}$**。然而对外部来说，它们吸收或发出的功率相等。在电路分析中对电源用哪一种模型呢？这要视具体情况而定：**

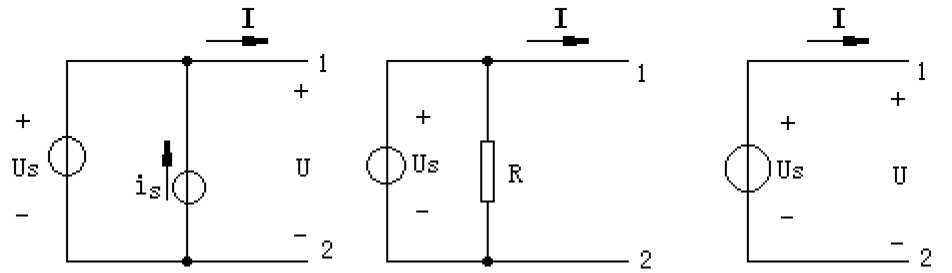
例：



★ **此处讲一下电压源串联、电流源并联。**

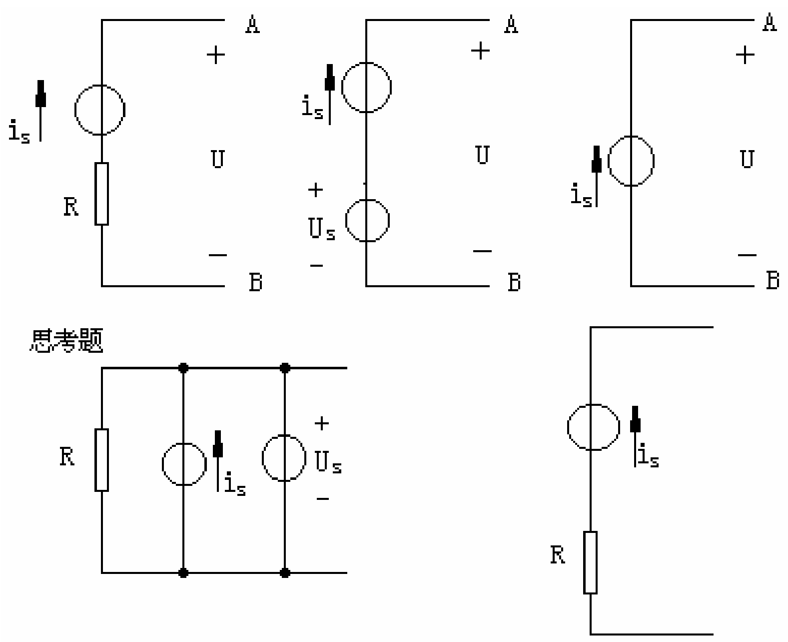
例：P. 42　2－4

三、电源与支路的串并联



从外部性能等效的角度来看，任何一条支路，如图所示，电流源 I_s 或电阻 R 与 U_s 并联后，对外电路而言，总可用一个等效电压源替代，电压仍为 U_s。

同理，任何一条支路与电流源 I_s 串联后，对外电路总可用一个等效电流源替代，等效电流源的电流仍为 I_s，如下图：



练习：老版 P. 45　2－8(a)(b)；　2－10

作业： P. 41　2－3；2－4

§2—3　运用等效变换简化含受控源的电路

第一章中介绍了独立源和受控源，它们有不同之处，但在电路分析中，分析方法有相似之处。对受控源也可进行电压源模型与电流源模型的等效变换，下面通过例题来说明。

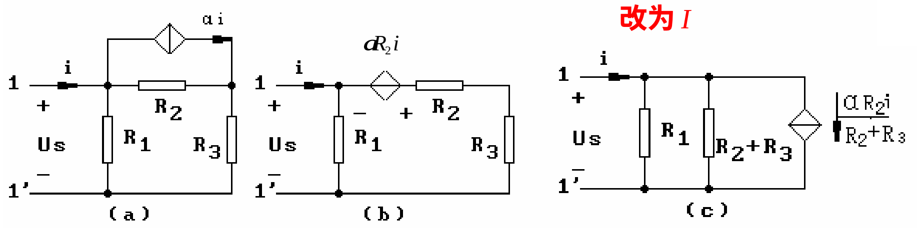
注意：在化简过程中，若受控源还在，则应保留控制量。

一、由受控源、电阻组成的二端网络简化

对于此类的二端网络，总能用一个等效电阻(或称为输入电阻)来等效。等效电阻该如何求呢？

例：求图示含受控源一端口的等效电阻。

下图中的 i 应改为 I



解：这里不能简单地用串并联来处理，为求输入电阻 R_i，我们可用欧姆定律 $R_i=\dfrac{U_{11'}}{I}$。为此，我们不妨先假设在 $1-1'$ 端施加一激励 U_s，则必有一响应——端口电流 I

这样就可以求出输入电阻 $R_i=\dfrac{U_s}{I}$。(端口激励——响应法)，原电路由 $(a)\to(b)\to(c)$ 等效变换。

∴　有

$$I=\frac{U_s}{R_1}+\frac{U_s}{R_2+R_3}+\frac{aR_2I}{R_2+R_3}$$

$$R_i=\frac{U_s}{I}=\frac{R_1R_3+(1-a)R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}$$

对于上式分子中可能出现负值，故在一定条件下，含受控源的输入电阻 R_i 可能为零，甚至为负值。(P. 34 标注)

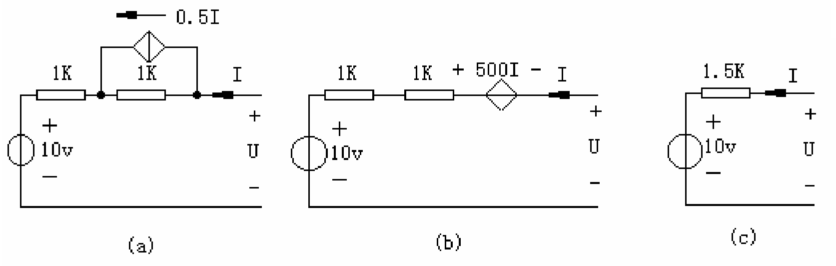
结论：对于一个不含独立源而只含受控源和电阻的二端网络，不论其内部结构如何复杂，它的端口电压和电流恒成正比，即 R_i 为一常数。

分析方法：端口激励——响应法。

上图中若 $a=0$，受控源开路，图(a)则是简单的串并联电路。

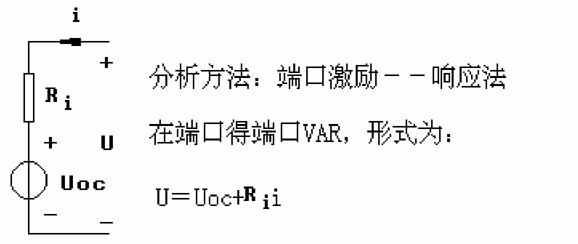
二、由独立源、受控源与电阻组成的二端网络简化

对于此类问题的简化，实际上也是寻求一个简单的等效电路。分析方法：同样可采用激励——响应法，先来看下面的例子。例：试简化图示的二端网络。



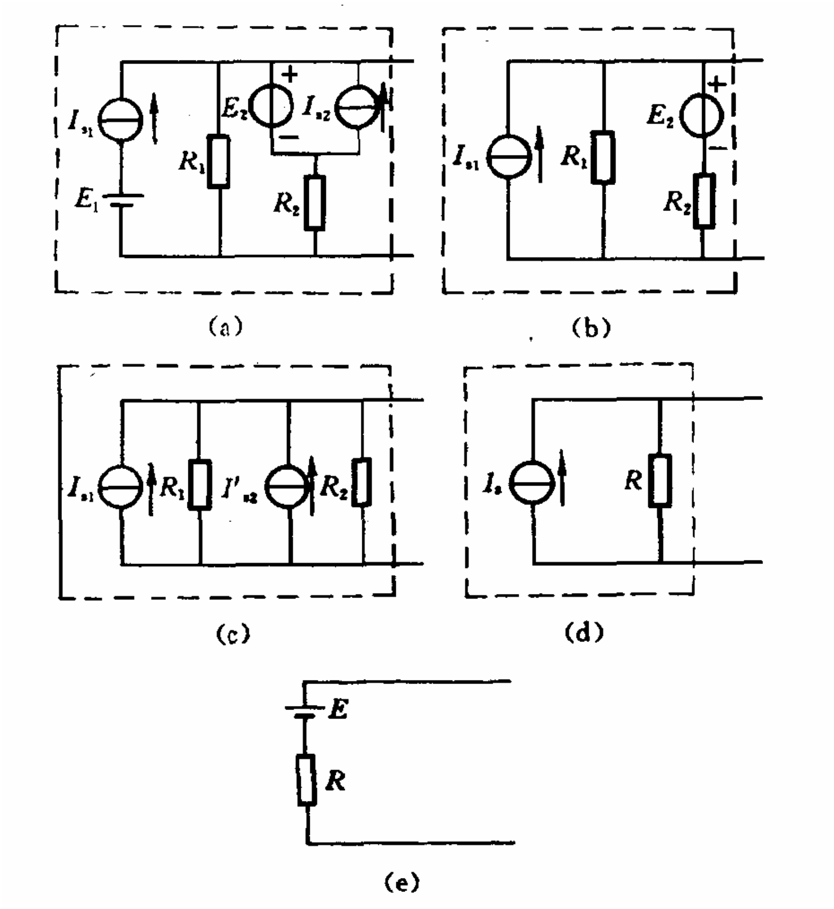
对图(b)**，由** KVL **有** $U = 2000I - 500I + 10 = 10 + 1500I$ **，根据这个** VAR **表达式可以画出图**(c)**。**

结论：一个由独立源、受控源与电阻组成的二端网络，总可用一个电压源与一个电阻串联来等效，(当然也可用电流源并联一个电阻表示)，即



注意：含受控源电路化简，等效变换时，不能把受控源的控制量消除掉。例如：P. 35 例 2－12 中，I_3**这条支路不能随意地化简掉，应保留**I_3**支路。(请同学自学)**

例：**图**(a)**中虚线框内所示的电路，已知电压源电动势** $E_1 = E_2 = 30V$，**电流源电流** $I_{s1} = I_{s2} = 2A$， **电阻** $R_1 = 3\Omega$，$R_2 = 6\Omega$。**试将这虚线框内的电路简化为一个等效的电压源。**



练习： P. 42 2－8

作业： P. 42 2－6；2－7

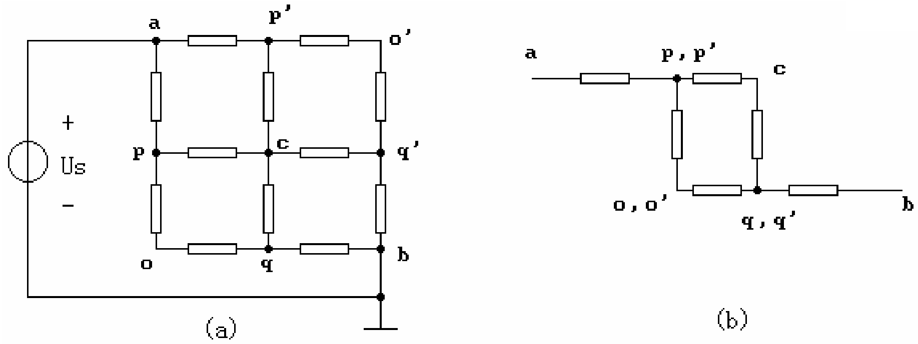
§2－4　非串、并联电路的简化

实际电路中，结构往往十分复杂，如P. 36，图2－23所示惠斯顿电桥电路。对于这种既非串联又非并联的简化如何处理呢？原则上在特定条件下，通过局部电路的等效变换，转换为串、并联电路来求解，下面介绍两种方法：

一、具有一定对称性的电路

有些网络在电气结构上具有某种对称性质，正确地利用对称性，可大大简化分析。

例：图示电阻网络，各电阻相等均为 R，求 ab 端口等效电阻 R_{ab}。



解：假设 a、b 端口加一电压源 Us，由于电路以 acb 为轴左右对称，所以节点 p 与 p'，q 与 q'，o 与 o' 的电位分别相等，将等电位点联接起来就成了图(b)电路，相当于 acb 为轴将左右部分“对折”到左边，对应的电阻并联(各电阻均为 $\frac{R}{2}$)

$$\therefore R_{ab}=\frac{R}{2}+\frac{R\times R}{R+R}+\frac{R}{2}=\frac{3R}{2}$$　　成为串并联电路

对于图(a)还有另一种对称性，就是以 oco' 为中心的上下对称，设b点为零电位点，a 点电位为 Us，则在中心线各点的电位均为 $\frac{1}{2}Us$，即 o，c，o' 三点等电位，也可联接起来，也方便求出

$$\therefore R_{ab}=\frac{R}{2}+\frac{R}{4}+\frac{R}{4}+\frac{R}{2}=\frac{3}{2}R$$

结论：在电路分析中，如果已知或判断出电路中某两点或多点电位(节点电位)相同，即可把这两个(多个)节点短接，来化简电路。

同理：如果已知或预先判断出电路中某一支路没有电流通过，可以把这一支路断开，即开路(请大家自学P. 36　图2－24)

例：P. 37　例2－14

二、Y型和D型网络的等效变换

二者都是简单的三端网络，Y**型网络和**Δ**型网络可以相互转换**。(**大家自学**)

记住：　$R_\Delta = 3R_Y$　**或**　$R_Y = \frac{R_\Delta}{3}$ (**对称情况**)

练习：**老版** P. 44　2－2；**新版** P. 42　2－11

作业：P. 43　2－11；2－13