

非线性阻尼扭摆振动模型及在转动惯量测量中应用

林洪文, 马强, 唐文彦, 王军, 张晓琳

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150001)

摘要: 为减小传统扭摆振动数学模型在大尺寸板状物体转动惯量测量中的误差, 建立扭摆振动一般形式的非线性数学模型, 利用弱非线性条件下平均值方法将其线性化获得扭摆振动线性化方程。导出转动惯量新的数学表达式并计算转动惯量, 其结果的重复性误差减小、精度提高, 实现转动惯量的精确测量。

关键词: 扭摆振动; 转动惯量; 弱非线性

中图分类号: TH124; TB936

文献标志码: A

DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2014.10.003

Torsional pendulum vibration model with nonlinear damping and its application in measurement of moment of inertia of large aled plate-like objects

LIN Hong-wen, MA Qiang, TANG Wen-yan, WANG Jun, ZHANG Xiao-lin

(Harbin Institute of Technology, Harbin150001, China)

Abstract: Here, a general nonlinear mathematical model of torsional pendulum vibration was built to reduce the error of the traditional torsional pendulum vibration model in measuring moment of inertia for large scaled plate-like objects. The average value method under a weak nonlinear damping condition was adopted to linearize the nonlinear model to get a linear equation of torsional pendulum vibration. The new mathematical expression for the moment of inertia to be measured was deduced and calculated. The results obtained with the new model showed higher repeatability and accuracy in measurement of moment of inertia of large scaled plate-liked objects.

Key words: torsional pendulum vibration; moment of inertia; weak nonlinear

转动惯量可表征转动物体惯性大小, 亦为研究、设计、控制转动物体运动规律的重要技术参数, 广泛应用于工业生产各领域, 因此测定物体的转动惯量具有重要实际意义。转动惯量大小不仅与刚体质量有关, 亦与转轴位置、质量分布有关。对形状规则、材料密度均匀的标准件, 其转动惯量可据 $J = \int r^2 dm$ 计算, 但对形状不规则、质量分布不均匀物体, 计算其转动惯量非常困难, 通常用实验方法测定。测量质量分布不均匀、外形尺寸较大物体的转动惯量, 常用扭摆法。测量过程为将被测物体置于精密气浮轴承或金属轴承支撑的扭摆工作台上, 施加激励迫使扭摆工作台做自由扭摆振动, 通过数据采集与计算机系统, 精确记录扭摆台振动在各采样时刻的角位移, 通过数据分析、处理, 计算被测物体转动惯量。

1 扭摆振动传统模型及转动惯量计算方法

扭摆自由振动数学模型据刚体转动定律建立, 其转动过程中扭摆系统力矩为: ① 扭杆在扭转过程中产生的恢复力矩, 在一定形变范围内与系统振动角位移成正比, 即 $M_1 = -K\theta$, 方向始终指向平衡位置, 其中 K 为扭杆刚度系数, 在弹性限度内近似为常数; ② 扭摆系统振动过程中空气阻力力矩在低速振动中与角速度成正比, 即 $M_2 = -C \frac{d\theta}{dt}$, 其中 C 为阻尼系数, 为常数, 方向始终与速度方向相反。故扭摆系统振动方程^[1-2]为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + C \frac{d\theta}{dt} + K\theta = 0 \quad (1)$$

式中: $\theta|_{t=0} = \theta_0, \dot{\theta}|_{t=0} = 0$ 为初始条件。式(1)为二阶常系数线性微分方程。将 $\omega_0^2 = \frac{K}{J} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J}}$ 定义为无阻尼振动固有频率, $\zeta = \frac{C}{2\sqrt{KJ}}$ 定义为系统阻尼比, 则原方程变为

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \quad (2)$$

基金项目: 国防工业十二五军工技术基础项目资助

收稿日期: 2012-08-30 修改稿收到日期: 2013-07-24

第一作者 林洪文 男, 副教授, 1963 年生

通信作者 马强 男, 博士, 讲师, 1972 年 3 月生

二阶微分方程的特征方程为

$$r^2 + 2\zeta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (3)$$

特征根为

$$r_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_0 \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ - \zeta\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (4)$$

若 $\zeta < 1$, 即弱阻尼时, $r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$, 微分方程的解为

$$\theta(t) = A \exp(-\zeta\omega_0 t) \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \zeta^2} + \varphi_0) \quad (5)$$

由扭摆振动初始条件可确定 A, φ_0 。由式(5)看出, 扭摆振动为一幅度按指数衰减的振荡曲线。通过实验数据采集、分析可确定其衰减因子, 振动周期等参数可计算扭摆振动系统的转动惯量。设 ω_d 为有阻尼状态下系统振动频率, 则 $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。定义 T_d, T_n 分别为有、无阻尼振动周期, 则有 $T_n = T_d \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。由此可推导出转动惯量的计算公式为

$$J = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{K}{(2\pi)^2} T_0^2 = \frac{K}{(2\pi)^2} T_d^2 (1 - \zeta^2) \quad (6)$$

式中: K 为扭摆系统刚度系数。

利用形状规则、质量分布均匀的标准砝码可计算对质心轴的转动惯量, 标准砝码在扭摆振动平台振动, 对所采数据分析处理可确定标准值并通过测量系统标定实验获得 K 值。因此, 对待测物体作扭摆振动的数据采集分析, 用式(6)可算出待测物体某一转轴的转动惯量。在测量一般回转体时可忽略空气阻尼, 认为 $\zeta = 0$, 只测量扭摆周期即可求得转动惯量值。在对大尺寸异形物体进行测量时, 阻尼不可忽略情况下可测出扭摆转动角度随时间变化曲线, 据扭摆振幅的衰减规律可求得阻尼比与周期, 进而据公式计算转动惯量。

对大尺寸板状物体转动惯量测量实验结果发现, 改变物体的迎风面积大小, 振动阻尼系数改变振动周期亦改变。按式(6)计算物体转动惯量获得不同结果, 最大相对误差达 2% 以上, 对精密测量无法接受。且与物体在转轴一定时转动惯量不变的规律相矛盾。本文由扭摆振动非线性模型一般形式入手, 利用弱非线性条件下平均值方法导出线性化方程, 获得新转动惯量计算式。

2 板状物体扭摆振动非线性模型及线性化分析

2.1 弱非线性自治系统平均法

由精密气浮平台上大尺寸板状物体扭摆振动试验中采集的数据拟合获得振动曲线看出, 大尺寸板状物体扭摆振动为衰减振荡曲线, 属弱非线性振动。因此, 设扭摆振动弱非线性表达式为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = \varepsilon f(\theta, \dot{\theta}) \quad (7)$$

式中: J 为振动系统转动惯量; K 为扭摆钢杆刚度系数, 扭摆角度很小时为常数。

式(7)右端为非线性项, 其中 ε 为反映弱非线性的无限小量。利用弱非线性微分方程的平均值法求一次近似解方法^[3]的基本思想为将派生系统周期解的振幅、相位视为随时间缓慢变化的函数, 并将振幅、相位对时间导数在一个周期内取平均值, 求出方程的解。动力学方程描述的弱非线性系统自由振动一般形式为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (8)$$

$\varepsilon = 0$ 时式(8)的解为

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = a \cos\varphi \quad (9)$$

式中: $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, a, \varphi_0$ 为由初始条件确定的常数。

速度表达式为

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin\varphi \quad (10)$$

$\varepsilon \neq 0$ 时非线性因素影响使系统响应出现高次谐波, 振动瞬时频率与振幅有关。考虑此影响, 通解可设为

$$x = a \cos\varphi + \varepsilon x_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 x_2(a, \varphi) + \dots \quad (11)$$

式中: $x_1(a, \varphi), x_2(a, \varphi), \dots$ 为 φ 以 2π 为周期的函数, a, φ 为时间 t 的函数, 其决定方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 + \varepsilon \omega_1(a) + \varepsilon^2 \omega_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由于考虑弱非线性系统, 且关心周期解, 因此非线性微分方程的解仍具有与式(9)相同形式, 仅 a, φ_0 不再为常数, 而为时间的函数。 ε 充分小时, a, φ_0 为在某常数附近缓慢变化的函数, 而弱非线性系统解亦可视为在基本解附近缓慢变化的函数。因此, 只要找到 $a(t), \varphi_0(t)$ 的表达式, 即可获得非线性微分方程的解。

为获得描述 $a(t), \varphi_0(t)$ 的方程, 将式(9)两边对时间求导, 得:

$$\dot{x} = \dot{a} \cos\varphi - a(\omega_0 + \dot{\varphi}_0) \sin\varphi \quad (13)$$

比较式(10)、(13)得:

$$\dot{a} \cos\varphi - a\dot{\varphi}_0 \sin\varphi = 0 \quad (14)$$

将 $\dot{x} = -a\omega_0 \sin\varphi$ 对时间求导得:

$$\ddot{x} = -\dot{a}\omega_0 \sin\varphi - a\omega_0(\omega_0 + \dot{\varphi}_0) \cos\varphi \quad (15)$$

将 \dot{x}, \ddot{x} 代入微分方程, 并化简得:

$$\dot{a} \sin\varphi + a\dot{\varphi}_0 \cos\varphi = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos\varphi, -a\omega_0 \sin\varphi) \quad (16)$$

联立式(14)、(16)解得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f(a \cos\varphi, -a\omega_0 \sin\varphi) \sin\varphi \\ \dot{\varphi}_0 &= -\frac{\varepsilon}{a\omega_0} f(a \cos\varphi, -a\omega_0 \sin\varphi) \cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

以上推导中未作任何近似处理,因此,式(9)、(17)完全等价于式(8)的解。但仍难于求解。故需利用弱非线性求其近似解。

若 ε 充分小,则 \dot{a} (或振幅变化率) 及 $\dot{\varphi}_0$ 或频率修正项) 亦很小,与 $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ 或 $x(t)$ 相比, a, φ_0 随时间变化较缓慢。可认为在 $\sin\varphi, \cos\varphi$ 变化的一个周期内 a, φ_0 几乎不变。据此,将式(17)在一个周期内 $2\pi/\omega_0$ 作平均处理,并认为 a, φ_0 为常量。得 $\dot{a}, \dot{\varphi}_0$ 计算式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \sin\varphi d\varphi \\ \dot{\varphi}_0 &= -\frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

若仅求一次近似解,即求 $x = a\cos\varphi$, 则

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) \quad (19)$$

将式(18)代入式(19)得:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \sin\varphi d\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

2.2 非线性系统等效线性化方法

据第一次近似平均法,可对非线性系统进行等效线性化处理^[4]。考虑扭摆振动非线性微分方程:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = \varepsilon \frac{1}{J} f(\theta, \dot{\theta}) \quad (21)$$

式中:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{J}, \quad x \Leftrightarrow \theta, \quad \dot{x} \Leftrightarrow \dot{\theta}, \quad \ddot{x} \Leftrightarrow \ddot{\theta},$$

$$f(x, \dot{x}) \Leftrightarrow \frac{1}{J} f(\theta, \dot{\theta}).$$

引用非线性微分方程一次近似平均法结论^[6]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi J\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \sin\varphi d\varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega_e = \omega_0 - \\ &\frac{\varepsilon}{2\pi J a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

引入等效阻尼系数 λ_e 、角频率 ω_e 、刚度系数 k_e 得:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_e(a) &= \frac{\varepsilon}{\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \sin\varphi d\varphi \\ \omega_e(a) &= \omega_0 - \frac{\varepsilon}{2\pi J a \omega_0} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \\ k_e(a) &= k - \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi) \cos\varphi d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

忽略 $\omega_e^2(a) = \omega_0^2 - \frac{\varepsilon}{\pi J a} \int_0^{2\pi} f(a\cos\varphi, -a\omega_0\sin\varphi)$

$\cos\varphi d\varphi + O(\varepsilon^2)$ 二阶小量得:

$$\omega_e^2 = \frac{k_e(a)}{J}, \quad \dot{a} = -\frac{\lambda_e(a)a}{2J} \quad (24)$$

经线性化获得振动方程为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{d\theta}{dt} + k_e(a)\theta = 0 \quad (25)$$

上式表明,第一次近似解中,弱非线性自治系统振动等价于线性系统。因此, $\lambda_e(a), k_e(a)$ 分别为等效阻尼及刚度系数。导出非线性阻尼项^[5]为

$$\begin{aligned} \varepsilon f(\theta, \dot{\theta}) &\Leftrightarrow -\{[k_e(a) - k]\theta + \lambda_e(a)\dot{\theta}\} \\ &= -[\tau(a)\theta + \lambda_e(a)\dot{\theta}] \end{aligned} \quad (26)$$

重写扭摆振动方程:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda_e(a) \frac{d\theta}{dt} + [k + \tau(a)]\theta = 0 \quad (27)$$

式中: $\tau(a) = k_e(a) - k = (\omega_e^2 - \omega_0^2)J$, $\omega_e < \omega_0$ 即等效阻尼振动周期增大角频率减小时, $\tau(a)$ 为负;反之 $\tau(a)$ 为正。 $\tau(a)$ 为刚度系数的修正量,在平均意义下与时间无关而随振动状态变化参数,在给定振动状态下为常数。

弱非线性自治系统线性化后式(27)的解与传统模型线性有阻尼自由振动方程的解形式相同。转动惯量计算公式变为

$$J = \frac{k_e}{\omega_e^2} = \frac{k + \tau(a)}{\omega_e^2} = J_1 + J_2 \quad (28)$$

式中: $J_1 = \frac{k}{\omega_e^2}$ 在弱非线性自由振动转动惯量计算中与传统模型转动惯量意义相同; $J_2 = \frac{\tau(a)}{\omega_e^2}$ 为在弱非线性下对转动惯量的修正项。

3 板状物体扭摆振动转动惯量实验数据分析

3.1 实验方案及仪器

被测物体为两块相同材料尺寸的均质聚酯矩形纤维板(800 mm × 600 mm)。测试仪器为哈尔滨工业大学精密仪器研究所的 HIT-115 型转动惯量测试台。

3.2 实验测试条件

(1) 气浮平台空气压力 6 ~ 8 MPa; 激光位移传感器采样频率 312.5 Hz。

(2) 两块阻尼板对称置于测量臂上,阻尼板中心轴线与转动平台中心轴线距离分别为 $L = 1\ 200$ mm, 改变两块阻尼板平面与支撑臂轴线之间角度,从 $0^\circ \sim 180^\circ$, 每隔 10° 测量一组, 每组采集 5 次数据, 每次采集数据点 25 000 个。

(3) 通过每次采集数据,拟合得出扭摆转动曲线, 求出其周期、衰减因子、阻尼系数, 求出转动惯量 J_1 。

(4) 计算板状物体扭摆振动在弱非线性转动惯量的修正量 J_2 。

分析实验采集数据发现,板状物体作扭摆振动时,

若阻尼系数增大,周期变长,角速度减小,故有 $J_2 = [\tau(a)/\omega_c^2] < 0$ 。

$$J_2 = -(J_1 - J) \quad (29)$$

由实验数据分析转动惯量 J_1 与振动周期、阻尼系数、阻尼比之关系知, J_1 与振动周期线性关系较好,可由实验数据获得拟合的直线方程 $J_{1\text{拟合}} = J_0 + \lambda(T - T_0)$ 。从而得 $J_2 = -(J_1 - J) = (J - J_0) - \lambda(T - T_0)$, 考虑阻尼系数减小趋于 0 时,周期为 T_0 ,转动惯量 $J \approx J_0$,由此可得弱非线性下转动惯量的修正量 J_2 。

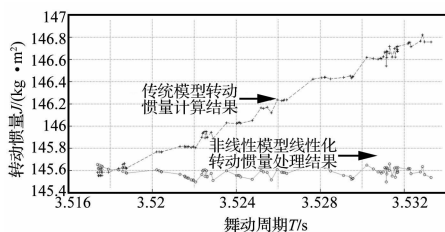


图1 传统模型与线性化模型扭摆转动惯量结果对比(第一种方法)

Fig. 1 Comparison of the calculated results using traditional torsional vibration model and linearization model of moment of inertia(First method)

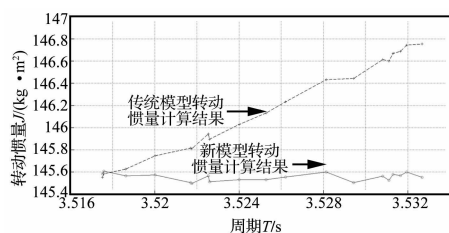


图2 传统模型与线性化模型扭摆转动惯量结果对比(第二种方法)

Fig. 2 Comparison of the calculated results using traditional torsional vibration model and linearization model of moment of inertia(Second method)

分析实验数据知,两阻尼板轴线距气浮平台转动中心 $L = 1\ 200\ \text{mm}$ 时,第一种方法为将阻尼板在每一角度下 5 组数据计算转动惯量 J_1 、振动周期、阻尼系数、阻尼比,不作平均,即 95 组数据分析处理。所得转动惯量最大绝对误差为 $0.142\ 33\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,最大相对误差为 0.098% ;第二种方法为将阻尼板在同一角度下 5 组数据计算转动惯量 J_1 、振动周期、阻尼系数、阻尼比,求其平均值即 19 组数据分析处理结果,转动惯量最大绝对误差为 $0.054\ 99\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$,最大相对误差为 0.038% 。传统模型与线性化模型转动惯量计算结果对比见图 1、

图 2。由两图看出,扭摆振动非线性模型线性化后计算转动惯量结果,可避免传统模型转动惯量随振动状态变化的矛盾。转动惯量的重复性得到较大提高,转动惯量测量最大相对误差均小于 0.1% ;消除系统误差后非线性模型线性化方法计算转动惯量测量结果,误差减小较大,精度提高较大,可实现转动惯量精确测量。

4 结 论

(1) 大尺寸板状物体扭摆振动时,传统数学模型的转动惯量计算结果随振动状态变化,与转动惯量规律矛盾,表明该模型失效。

(2) 利用扭摆振动非线性模型一般形式结合弱阻尼条件运用范德波平均值法,将其线性化后所得新转动惯量计算公式,不仅可消除传统模型矛盾,且转动惯量测量结果的重复性得以提高,大大减小相对误差。消除系统误差后可实现大尺寸板状物体转动惯量的精确测量。

参 考 文 献

- [1] 唐文彦,李慧鹏,张春富. 扭摆法测量飞行体转动惯量[J]. 南京理工大学学报(自然科学版), 2008, 32(1): 69-72. TANG Wen-yan, LI Hui-peng, ZHANG Chun-fu. Measurement of flight object's moment of inertia using torsion pendulum(natural science edition)[J]. Journal of Nanjing University and Technology, 2008, 32(1): 69-72.
- [2] 李化义,张迎春,李葆华,等. 高精度转动惯量测量仪分析与设计[J]. 计量学报, 2004, 25(3): 250-253. LI Hua-yi, ZHANG Ying-chun, LI Bao-hua, et al. Analysis and design of the moment of inertia measuring instrument with high accuracy[J]. Acta Metrologica Sinica, 2004, 25(3): 250-253.
- [3] 唐友刚. 高等结构动力学[M]. 天津:天津大学出版社, 2002.
- [4] Schedlinski C, Link M. A survey of current inertia parameter identification methods[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2001, 15(1): 189-211.
- [5] 邢誉峰,李敏,著. 工程振动基础[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2011.
- [6] Fregolent A, Sestieri A. Identification of rigid-body inertia properties from experimental data[J]. Mechanical System and Signal Processing, 1996, 10(6): 697-709.
- [7] 赵岩,张晓琳,王军,等. 非线性阻尼条件下物体转动惯量测量研究[J]. 振动与冲击, 2013, 31(21): 37-40. ZHAO Yan, ZHANG Xiao-lin, WANG Jun, et al. Measurement of a moment of inertia of a sample piece under nonlinear damping condition[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(21): 37-40.