

# 机动飞行时直升机尾传动轴的横向振动建模与特性

倪 德, 朱如鹏, 靳广虎, 李发家

(南京航空航天大学 江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016)

**摘要:** 提出了直升机空间机动飞行及尾传动轴运动位姿的一种描述方法,建立了相关坐标系。基于扩展哈密顿原理,建立了直升机空间机动飞行下尾斜轴横向弯曲振动的动力学模型,并利用伽辽金法将偏微分方程转化为常微分方程。水平传动轴可以当作尾斜轴的一种特例,通过一坐标变换矩阵即可将尾斜轴的动力学方程变换为水平传动轴的动力学方程。分析了直升机空间机动飞行对尾传动轴横向弯曲振动特性的影响。结果表明:直升机的机动飞行会对尾传动轴的横向弯曲振动产生附加的刚度效应、阻尼效应和激励效应,使得传动轴轨迹中心的位置和运动轨道的大小发生改变。

**关键词:** 机动飞行;直升机;尾传动;轴;横向振动;建模;刚度;阻尼

中图分类号: TH113.2;TH113.1

文献标志码: A

DOI:10.13465/j.cnki.jvs.2014.07.036

## Modeling and characteristics of bending vibration for helicopter tail drive shaft during maneuver flight

NI De, ZHU Ru-peng, JIN Guang-hu, LI Fa-jia

(Jiangsu Provincial Key Laboratory of Precision and Micro-Manufacturing Technology,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** A description method for spatial motions of helicopter maneuver flight and helicopter tail drive shaft was proposed and the corresponding coordinate systems were established. A lateral bending vibration model of the helicopter oblique tail drive shaft during maneuvering flight was established by using the extended Hamilton's principle, and the partial differential equations were converted into the ordinary differential ones by using Galerkin method. A horizontal shaft could be regarded as a special case of an oblique tail shaft, and the dynamic equations of the oblique tail drive shaft could be converted into those of a horizontal drive shaft by using a coordinate transformation matrix. The effects of spatial maneuver flight on the vibration characteristics of the tail drive shaft were discussed with the combination of mathematical model and numerical simulation. The study results revealed that the spatial maneuver flight of a helicopter can produce additional stiffness effect, damping effect and external excitation force effect on the bending vibration of the helicopter tail drive shaft, they may change the center position and the size of the motion orbit of the tail drive shaft.

**Key words:** maneuver flight; helicopter; tail drive; shaft; bending vibration; modeling; stiffness; damping

由于直升机常常做非匀速的空间机动飞行运动,直升机的传动轴工作在一个非惯性系下,其动力学特性与惯性坐标系下的传动轴会有很大的区别。飞机的机动飞行会在转子系统上作用附加载荷,影响转子的正常工作<sup>[1,2]</sup>。直升机尾传动轴系构成直升机最长的传动链,负责向尾旋翼传递动力,其工作状态直接影响直升机的性能。直升机机动飞行引起的附加载荷,更容易造成传动轴的破坏。因此,有必要研究机动飞行

下直升机尾传动轴的动力学特性。

林富生等<sup>[3-5]</sup>研究了飞机在水平或垂直平面作等加速和变加速运动时单盘转子系统的动力学特性。徐敏等<sup>[6-7]</sup>研究了水平盘旋和俯冲拉起两种机动飞行条件对双盘悬臂转子振动特性的影响。后来他们又研究了机动飞行条件下带挤压油膜阻尼器的 Jeffcott 转子的振动特性。顾致平等<sup>[8]</sup>研究了飞机水平盘旋下处于一定角速度的刚性和弹性不同支承情况下转子的瞬态响应。惠旭升等<sup>[9]</sup>从非惯性参考系中质点的运动微分方程出发,推导出转子考虑非惯性力及陀螺力矩影响条件下的盘心运动分量方程函数。祝长生等<sup>[10-11]</sup>建立了飞机在任意空间机动飞行时发动机安装在飞机上任意位置条件下不平衡多盘、多质量和多轴承线性及非

基金项目: 国家自然科学基金(51375226);高等学校博士学科点专项科研基金资助课题(20113218110017);江苏省高校优势学科建设工程资助;江苏省普通高校研究生科研创新计划资助项目(CXZZ11-0199);中央高校基本科研业务费专项资金资助

收稿日期: 2013-07-16 修改稿收到日期:2013-09-27

第一作者 倪 德 男, 博士生, 1986 年生

线性柔性转子系统动力学的统一模型,讨论了飞机的空间机动飞行对发动机转子系统动力特性的影响。张群岩等<sup>[12]</sup>在祝长生等人研究工作的基础上,利用某型发动机的试飞数据对机动飞行条件下发动机转子振动特性的一般性进行了验证和分析。杨永锋等<sup>[13-14]</sup>研究了裂纹转子在俯冲拉起和水平盘旋机动飞行条件下的动力学特性。

直升机尾传动轴采用细长的空心轴,具有质量连续分布的特点。以上研究工作主要针对单盘或转子系统,采用集中质量模型,所以不适用于尾传动轴的研究。许兆棠<sup>[15]</sup>考虑了非惯性系对直升机尾传动轴的影响,但仅考虑了水平和垂直方向加速度的影响。本文的主要工作是建立直升机空间机动飞行时尾传动轴的动力学模型,分析机动飞行对传动轴的影响,为直升机传动轴系的计算分析与工程实践提供参考。

## 1 机动飞行下尾传动轴的动力学方程

### 1.1 坐标系和运动描述

将直升机机体当作一个刚体,在空间有六个自由度,则可以利用刚体的位姿描述方法,即将直升机的运动分解为随基点的平动与绕自身重心的转动,来描述直升机机动飞行时的空间位姿,如图1所示。选取地球为惯性系, $O_0$ 为此惯性空间中的一点,过该点建立固定坐标系 $O_0x_0y_0z_0$ ,用于描述直升机的平动特性,主要为直升机的飞行速度和飞行加速度。以直升机的重心为原点且固连在直升机机体上的相对坐标系 $O_Rx_Ry_Rz_R$ ,用于描述直升机的转动特性。其中, $O_Rz_R$ 轴为机身对称轴,指向与直升机飞行方向相反。于是,直升机的空间位姿可由固定坐标系 $O_0x_0y_0z_0$ 上的平动分量 $[X_0, Y_0, -Z_0]^T$ 和相对坐标系 $O_Rx_Ry_Rz_R$ 上的转动分量 $[\theta_{xR}, \theta_{yR}, -\theta_{zR}]^T$ 来描述。其中,绕 $O_Rx_R$ 轴和 $O_Ry_R$ 轴的转动与直升机的偏航和俯仰运动方向相同,绕 $O_Rz_R$ 轴的转动与直升机的横滚运动方向相反。

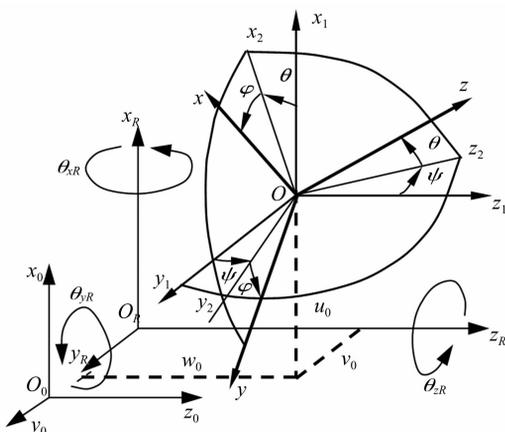


图1 描述直升机机体和尾传动轴空间运动的坐标系

Fig. 1 Coordinate system of helicopter space motion

材料、加工制造工艺等因素使传动轴的质心偏离轴线,形成偏心矩。尾传动轴为跨距较大的空心薄壁结构。工作中,偏心引起的离心惯性力容易使轴产生弯曲,产生动挠度。传动轴除了绕自身轴线转动外,还会绕两端支承轴颈中心连线作涡动,轴截面将产生偏离原先平面的偏摆,即传动轴作空间运动,可分解为随基点的平移和绕基点的定点转动。在静变形状态下,取尾传动轴系水平轴左端面与传动轴支承的轴颈中心连线的交点 $O$ 为原点,建立与相对坐标系 $O_Rx_Ry_Rz_R$ 的对应轴线相平行的参考坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 。 $y_1Oz_1$ 平面与 $y_ROz_R$ 平面、 $x_1Oz_1$ 平面与 $x_ROz_R$ 平面和 $x_1Oy_1$ 平面与 $x_ROy_R$ 平面之间的距离分别为 $u_0$ 、 $v_0$ 和 $w_0$ 。传动轴的横向运动可用轴心的动挠度在参考坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 的 $x_1Oz_1$ 、 $y_1Oz_1$ 两个平面上的分量 $u(t)$ 、 $v(t)$ 表示。轴的定点转动与基点的选择无关,仍以 $O$ 点为原点建立随传动轴运动的动坐标系 $Oxyz$ ,采用三个欧拉角来描述轴截面的偏摆运动,即绕 $Ox_1$ 轴的角 $\psi(t)$ ,绕 $Oy_1$ 轴的角 $\theta(t)$ ,绕 $Oz_1$ 轴的角 $\phi(t)$ 。这里的转动方向按右手法则确定,拇指方向同轴的正方向一致。

### 1.2 尾传动轴的能量

直升机尾传动轴有水平轴和尾斜轴,尾斜轴相对于水平轴倾斜一个角度(逆时针为正)。如图2,对于尾斜轴,建立辅助坐标系 $Ox_b y_b z_b$ ,其中 $y_b$ 与 $y_1$ 重合, $x_b$ 与 $x_1$ 及 $z_b$ 与 $z_1$ 之间的夹角 $\varphi$ 为尾斜轴相对水平轴的倾角。当 $\varphi=0$ 时即为水平传动轴,说明水平传动轴是尾斜轴的一种特例,取尾斜轴为研究对象更具一般性。坐标系 $Ox_b y_b z_b$ 到坐标系 $Ox_1 y_1 z_1$ 的变换矩阵为 $A_\varphi$ ,其表达式为

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

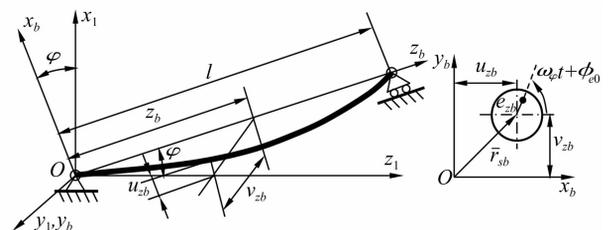


图2 尾斜轴的坐标系和瞬时位置

Fig. 2 Coordinate system and instantaneous position of oblique tail drive shaft

假设传动轴的长度为 $l$ , $u_{zb}$ 、 $v_{zb}$ 分别为坐标为 $z_b$ 时轴段几何中心沿 $x_b$ 、 $y_b$ 轴的位移,轴段截面质心相对于几何中心的偏心距及其初始相位角分别为 $e_{zb}$ 、 $\phi_{e0}$ ,传动轴的角速度为 $\omega_\phi$ 。传动轴的动能为:

$$T_s = \frac{\rho A}{2} \int_0^l v_a^T v_a dz + \frac{\rho}{2} \int_0^l (I(\omega_x^2 + \omega_y^2) + I_p \omega_z^2) dz$$

式中,  $\rho$  为传动轴的密度,  $I$  为轴截面关于中性轴的惯性矩,  $I_p = 2I$  为极转动惯量。  $v_a$  为坐标为  $z$  时轴段截面质心的绝对速度矢量的坐标阵。  $\omega_x$ 、 $\omega_y$ 、 $\omega_z$  分别为传动轴在动坐标系  $Oxyz$  中关于各自坐标轴的角速度分量。根据速度的合成原理, 轴截面质心的绝对速度矢量  $\vec{v}_a$  的表达式为:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_h + \dot{\vec{r}}_s + \vec{\omega}_h \times \vec{r}_s$$

式中,  $\vec{v}_h$  为直升机牵连运动引起的速度矢量,  $\vec{r}_s$  为轴截面质心相对于坐标系  $O_R x_R y_R z_R$  的相对位移矢量,  $\vec{\omega}_h \times \vec{r}_s$  为由于直升机在坐标系  $O_R x_R y_R z_R$  中的转动引起的速度矢量,  $\vec{\omega}_h$  为直升机在坐标系  $O_R x_R y_R z_R$  中绕基点  $O_R$  转动引起的瞬时角速度矢量。

传动轴的动能由平动动能和转动动能组成, 第一项为平动动能, 第二项为转动动能。其平动动能为:

$$T_{st} = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_a dz = \frac{\rho A}{2} \int_0^l (\mathbf{v}_h^T \mathbf{v}_h + \dot{\mathbf{r}}_s^T \dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\dot{\mathbf{r}}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \tilde{\omega}_h \mathbf{r}_s) dz$$

式中

$$\tilde{\omega}_h = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}_{zRb} & \dot{\theta}_{yRb} \\ \dot{\theta}_{zRb} & 0 & -\dot{\theta}_{xRb} \\ -\dot{\theta}_{yRb} & \dot{\theta}_{xRb} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{xRb} \\ \dot{\theta}_{yRb} \\ \dot{\theta}_{zRb} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_\varphi^T \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{xR} \\ \dot{\theta}_{yR} \\ \dot{\theta}_{zR} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_h = \mathbf{A}_\varphi^T \begin{Bmatrix} \dot{X}_0 \\ \dot{Y}_0 \\ \dot{Z}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_s = \begin{Bmatrix} u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \\ v_{zb} + e_{zb} \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \\ z_b \end{Bmatrix} + \mathbf{A}_\varphi^T \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}$$

其中,  $\tilde{\omega}_h$  为叉乘矩阵。

$$L = \frac{\rho A}{2} \int_0^l (\mathbf{v}_h^T \mathbf{v}_h + \dot{\mathbf{r}}_s^T \dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\dot{\mathbf{r}}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \tilde{\omega}_h \mathbf{r}_s) dz + \frac{\rho l}{2} \int_0^l \left[ \left( \dot{\theta}_{xRb} - \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b \partial t} \right)^2 + \left( \dot{\theta}_{yRb} + \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b \partial t} \right)^2 \right] dz + \rho l \omega_\phi^2 \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dz + 2\rho l \omega_\phi \int_0^l \dot{\psi} \dot{\theta} dz - \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b^2} \right)^2 \right] dz - \frac{F_{a0}}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial u_{zb}}{\partial z_b} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{zb}}{\partial z_b} \right)^2 \right] dz_b - \int_0^l \rho A g [u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0})] \cos \varphi dz_b$$

利用扩展哈密顿原理<sup>[16]</sup>, 可得到传动轴的控制方程为:

$$\begin{aligned} & \rho A \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 u_{zb}}{\partial z_b^4} - F_{a0} \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b^2} - 2\rho A \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos \varphi + \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin \varphi \right) \left[ \frac{\partial v_{zb}}{\partial t} + e_{zb} \omega_\phi \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0}) \right] + \\ & \rho A \left[ \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos \varphi + \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin \varphi \right) \left( \frac{d\theta_{xR}}{dt} \cos \varphi - \frac{d\theta_{zR}}{dt} \sin \varphi \right) + \frac{d^2 \theta_{yR}}{dt^2} \right] (z_b + w_0 \cos \varphi + u_0 \sin \varphi) - \\ & \rho A \left[ \left( \frac{d^2 \theta_{zR}}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d^2 \theta_{xR}}{dt^2} \sin \varphi \right) - \frac{d\theta_{yR}}{dt} \left( \frac{d\theta_{xR}}{dt} \cos \varphi - \frac{d\theta_{zR}}{dt} \sin \varphi \right) \right] [v_0 + v_{zb} + e_{zb} \sin(\omega_\phi t + \varphi_{e0})] + \end{aligned}$$

传动轴在动坐标系  $Oxyz$  中的角速度坐标矩阵  $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$  可用欧拉角  $[\psi, \theta, \phi]^T$  表示为:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$$

假设传动轴的角速度为常量, 有  $\dot{\phi} = \omega_\phi$  (即  $\phi = \omega_\phi t$ )。假定欧拉角  $\psi$ 、 $\theta$  为小量, 有  $\cos \theta \approx 1$ ,  $\sin \theta \approx \theta$ 。在忽略高阶小量的情况下, 轴的转动动能为:

$$T_{sr} = \frac{\rho l}{2} \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dz + \rho l \omega_\phi^2 \int_0^l \dot{\psi} \dot{\theta} dz$$

因此, 轴的总动能为:

$$T_s = T_{st} + T_{sr} = \frac{\rho A}{2} \int_0^l (\mathbf{v}_h^T \mathbf{v}_h + \dot{\mathbf{r}}_s^T \dot{\mathbf{r}}_s - \mathbf{r}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\dot{\mathbf{r}}_s^T \tilde{\omega}_h \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \dot{\mathbf{r}}_s + 2\mathbf{v}_h^T \tilde{\omega}_h \mathbf{r}_s) dz + \frac{\rho l}{2} \int_0^l (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dz + \rho l \omega_\phi^2 \int_0^l \dot{\psi} \dot{\theta} dz$$

传动轴的弹性势能为:

$$U_s = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial^2 u_{zb}}{\partial z_b^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b^2} \right)^2 \right] dz +$$

$$\frac{E_{a0}}{2} \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial u_{zb}}{\partial z_b} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_{zb}}{\partial z_b} \right)^2 \right] dz +$$

$$\int_0^l \rho A g [u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \varphi_{e0})] \cos \varphi dz_b$$

其中,  $E$  为传动轴材料的弹性模量,  $U_1$  为轴应变引起的弹性势能,  $U_3$  为重力引起的沿轴横向的势能,  $U_2$  为重力引起的沿轴纵向的势能, 且有:

$$F_{a0} = G_{x1} \sin \varphi = \int_0^l \rho A g \sin \varphi dz_b = \rho A g l \sin \varphi$$

### 1.3 尾传动轴系的运动微分方程

由于欧拉角  $\psi$ 、 $\theta$  为小量, 可近似表示为:

$$\theta = \theta_{yb} + \theta_{yRb} = \partial u_{zb} / \partial z_b + \theta_{yRb} \quad (1)$$

$$\psi = \theta_{xb} + \theta_{xRb} = \theta_{xRb} - \partial v_{zb} / \partial z_b \quad (2)$$

所以系统的拉格朗日函数可表示为:

$$\rho A \left( \frac{d\theta_{yR}}{dt} \frac{\partial z_b}{\partial t} - \frac{dX_0}{dt} \frac{d\theta_{yR}}{dt} \sin\varphi + \frac{dY_0}{dt} \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin\varphi - \frac{dY_0}{dt} \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos\varphi + \frac{dZ_0}{dt} \frac{d\theta_{yR}}{dt} \cos\varphi \right) -$$

$$\rho A \left[ \left( \frac{d\theta_{yR}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos\varphi + \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin\varphi \right)^2 \right] [u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + u_0 \cos\varphi - w_0 \sin\varphi] - \rho I \frac{\partial^4 u_{zb}}{\partial z_b^2 \partial t^2} - 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial^3 v_{zb}}{\partial z_b^2 \partial t} +$$

$$\rho A \frac{d^2 X_0}{dt^2} \cos\varphi + \rho A \frac{d^2 Z_0}{dt^2} \sin\varphi = \rho A e_{zb} \omega_\phi^2 \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) - \rho A g \cos\varphi + \rho I \left[ \frac{d(\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) - \frac{d\ddot{\theta}_{yR}}{dz_b}}{2\omega_\phi} \right] \quad (3)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial t^2} - \rho A \left[ \left( \frac{d^2 \theta_{xR}}{dt^2} \cos\varphi - \frac{d^2 \theta_{zR}}{dt^2} \sin\varphi \right) - \frac{d\theta_{yR}}{dt} \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos\varphi + \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin\varphi \right) \right] (z_b + w_0 \cos\varphi + u_0 \sin\varphi) +$$

$$2\rho A \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \cos\varphi + \frac{d\theta_{xR}}{dt} \sin\varphi \right) \left[ \frac{\partial u_{zb}}{\partial t} - e_{zb} \omega_\phi \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \right] + EI \frac{\partial^4 v_{zb}}{\partial z_b^4} - F_{e0} \frac{\partial^2 v_{zb}}{\partial z_b^2} - \rho I \frac{\partial^4 v_{zb}}{\partial z_b^2 \partial t^2} +$$

$$\rho A \left( \frac{d^2 \theta_{zR}}{dt^2} \cos\varphi + \frac{d^2 \theta_{xR}}{dt^2} \sin\varphi \right) [u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + u_0 \cos\varphi - w_0 \sin\varphi] +$$

$$\rho A \frac{d\theta_{yR}}{dt} \left( \frac{d\theta_{xR}}{dt} \cos\varphi - \frac{d\theta_{zR}}{dt} \sin\varphi \right) [u_{zb} + e_{zb} \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + u_0 \cos\varphi - w_0 \sin\varphi] +$$

$$\rho A \left[ \frac{d^2 Y_0}{dt^2} - \frac{dz_b}{dt} \left( \frac{d\theta_{xR}}{dt} \cos\varphi - \frac{d\theta_{zR}}{dt} \sin\varphi \right) + \left( \frac{dX_0}{dt} \frac{d\theta_{zR}}{dt} - \frac{dZ_0}{dt} \frac{d\theta_{xR}}{dt} \right) \right] + 2\rho I \omega_\phi \frac{\partial^3 u_{zb}}{\partial z_b^2 \partial t} - \rho A \left[ \left( \frac{d\theta_{xR}}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\theta_{zR}}{dt} \right)^2 \right]$$

$$[v_0 + v_{zb} + e_{zb} \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0})] = \rho A e_{zb} \omega_\phi^2 \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + \rho I \left[ 2\omega_\phi \frac{d\dot{\theta}_{yR}}{dz_b} + \frac{d(\dot{\theta}_{yR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi)}{dz_b} \right] \quad (4)$$

传动轴的横向位移  $u_{zb}$ 、 $v_{zb}$  以及偏心  $e_{zb}$  分别为

$$\left. \begin{aligned} u_{zb}(z_b, t) &= \sum_{r=1}^{+\infty} W_r(z_b) q_{ur}(t) \\ v_{zb}(z_b, t) &= \sum_{r=1}^{+\infty} W_r(z_b) q_{vr}(t) \\ e_{zb} &= \sum_{r=1}^{+\infty} W_r(z_b) e_{zbr} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中,  $W_r(z_b)$  为传动轴的第  $r$  阶固有振型函数, 是用于描述轴截面在  $z_b$  处的横向振动幅值函数。  $q_{ur}(t)$  和  $q_{vr}(t)$  是用于描述轴截面在  $z_b$  处的横向振动幅值函数。  $e_{zbr}$  轴的第  $r$  阶偏心量。

将式(5)代入式(3)和式(4), 并利用伽辽金计算方法, 可以将式(3)和式(4)所表示的偏微分方程转化成如下常微分方程( $r=1, 2, \dots$ )

$$\left. \begin{aligned} M_r \ddot{q}_{ur} + (K_r + K_{ur}) q_{ur} + K_{vur} q_{vr} - (\omega_\phi G_{yr} + C_r) \dot{q}_{vr} &= m_e e_{zbr} \omega_\phi^2 \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + F_{eur} + F_{ur} + F_{u\theta} - F_G \\ M_r \ddot{q}_{vr} + (K_r + K_{vr}) q_{vr} + K_{uvr} q_{ur} + (\omega_\phi G_{yr} + C_r) \dot{q}_{ur} &= m_e e_{zbr} \omega_\phi^2 \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) + F_{evr} + F_{vr} + F_{v\theta} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:

$$M_r = \rho A \int_0^l W_r^2 dz_b - \rho I \int_0^l W_r W_r'' dz_b, \quad K_r = EI \int_0^l W_r^{(4)} W_r dz_b - F_{e0} \int_0^l W_r W_r'' dz_b, \quad m_e = \rho A \int_0^l W_r^2 dz_b$$

$$K_{ur} = -\rho A [ \dot{\theta}_{yR}^2 + (\dot{\theta}_{zR}^2 \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR}^2 \sin\varphi)^2 ] \int_0^l W_r^2 dz_b, \quad C_r = 2\rho A (\dot{\theta}_{zR}^2 \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR}^2 \sin\varphi) \int_0^l W_r^2 dz_b,$$

$$K_{vur} = -\rho A [ (\ddot{\theta}_{zR}^2 \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR}^2 \sin\varphi) - \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] \int_0^l W_r^2 dz_b, \quad C_{yr} = 2\rho I \int_0^l W_r W_r'' dz_b,$$

$$F_{eur} = 2\rho A (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi) e_{zbr} \omega_\phi \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r^2 dz_b + \rho A [ \dot{\theta}_{yR}^2 + (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi)^2 ] e_{zbr} \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r^2 dz_b + \rho A [ (\ddot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR} \sin\varphi) - \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] e_{zbr} \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r^2 dz_b$$

$$F_{ur} = \rho A v_0 [ (\ddot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR} \sin\varphi) - \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] \int_0^l W_r dz_b +$$

$$\rho A [ \dot{\theta}_{yR} + (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi)^2 ] (u_0 \cos\varphi - w_0 \sin\varphi) \int_0^l W_r dz_b -$$

$$\rho A (\dot{Y}_0 \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi - \dot{X}_0 \dot{\theta}_{yR} \sin\varphi - \dot{X}_0 \dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{Z}_0 \dot{\theta}_{yR} \cos\varphi + \dot{X}_0 \cos\varphi + \dot{Z}_0 \sin\varphi) \int_0^l W_r dz_b -$$

$$\rho A [ (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi) (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) + \dot{\theta}_{yR} ] \int_0^l (z_b + w_0 \cos\varphi + u_0 \sin\varphi) W_r dz_b$$

$$F_G = \rho A g \cos\varphi \int_0^l W_r dz_b, \quad K_{vr} = -\rho A (\dot{\theta}_{xR}^2 + \dot{\theta}_{zR}^2) \int_0^l W_r^2 dz_b$$

$$K_{ur} = \rho A [ (\ddot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR} \sin\varphi) + (\dot{\theta}_{yR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] \int_0^l W_r^2 dz_b$$

$$F_{evr} = 2\rho A (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi) e_{zbr} \omega_\phi \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r dz_b + \rho A (\dot{\theta}_{xR}^2 + \dot{\theta}_{zR}^2) e_{zbr} \sin(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r^2 dz_b -$$

$$\rho A [ (\ddot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR} \sin\varphi) + \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] e_{zbr} \cos(\omega_\phi t + \phi_{e0}) \int_0^l W_r^2 dz_b$$

$$F_{vr} = \rho A v_0 (\dot{\theta}_{xR}^2 + \dot{\theta}_{zR}^2) \int_0^l W_r dz_b - \rho A (\dot{Y}_0 + \dot{X}_0 \dot{\theta}_{zR} - \dot{Z}_0 \dot{\theta}_{xR}) \int_0^l W_r dz_b -$$

$$\rho A [ (\ddot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \ddot{\theta}_{xR} \sin\varphi) + \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] (u_0 \cos\varphi - w_0 \sin\varphi) \int_0^l W_r dz_b +$$

$$\rho A [ (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) - \dot{\theta}_{yR} (\dot{\theta}_{zR} \cos\varphi + \dot{\theta}_{xR} \sin\varphi) ] \int_0^l (z_b + w_0 \cos\varphi + u_0 \sin\varphi) W_r dz_b$$

$$F_{u\theta} = \rho I [ 2\omega_\phi (\dot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \dot{\theta}_{zR} \sin\varphi) - \dot{\theta}_{yR} ] - \int_0^l W'_r dz_b$$

$$F_{v\theta} = \rho I [ 2\omega_\phi \dot{\theta}_{yR} + (\ddot{\theta}_{xR} \cos\varphi - \ddot{\theta}_{zR} \sin\varphi) ] - \int_0^l W''_r dz_b$$

## 2 机动飞行对直升机尾传动轴振动特性的影响

根据式(6)可知,直升机的空间机动飞行可对尾传动轴的横向弯曲振动特性产生如下影响:

(1) 直升机的空间机动飞行将对尾传动轴的横向弯曲振动产生附加的刚度效应  $K_{ur}$ 、 $K_{uvr}$ 、 $K_{vr}$  和  $K_{uvr}$ 。对于尾斜轴,附加刚度效应的产生于与直升机转动运动的角速度  $\dot{\theta}_{xR}$ 、 $\dot{\theta}_{yR}$ 、 $\dot{\theta}_{zR}$  和转动运动的角加速度  $\ddot{\theta}_{xR}$ 、 $\ddot{\theta}_{zR}$  有关,而与转动角加速度  $\ddot{\theta}_{yR}$  无关。对于水平传动轴,附加刚度效应的产生于与直升机转动运动的角速度  $\dot{\theta}_{xR}$ 、 $\dot{\theta}_{yR}$ 、 $\dot{\theta}_{zR}$  和转动运动的角加速度  $\ddot{\theta}_{zR}$  有关,而与转动角加速度  $\ddot{\theta}_{xR}$ 、 $\ddot{\theta}_{yR}$  无关。同时尾斜轴和水平传动轴的附加刚度效应与直升机的飞行速度  $\dot{X}_0$ 、 $\dot{Y}_0$ 、 $\dot{Z}_0$  和飞行加速度  $\ddot{X}_0$ 、 $\ddot{Y}_0$ 、 $\ddot{Z}_0$  均无关。

(2) 直升机的空间机动飞行将对尾传动轴的横向弯曲振动产生附加的阻尼效应  $C_r$ 。对于尾斜轴,附加阻尼效应仅与直升机转动运动的角速度  $\dot{\theta}_{xR}$ 、 $\dot{\theta}_{zR}$  有关。对于水平传动轴,附加阻尼效应仅与直升机转动运动的角速度  $\dot{\theta}_{zR}$  有关。附加阻尼效应也与直升机的飞行速度  $\dot{X}_0$ 、 $\dot{Y}_0$ 、 $\dot{Z}_0$  和飞行加速度  $\ddot{X}_0$ 、 $\ddot{Y}_0$ 、 $\ddot{Z}_0$  无关。

(3) 直升机的空间机动飞行将对尾传动轴的横向弯曲振动产生附加的外激励效应  $F_{ur}$ 、 $F_{uvr}$ 、 $F_{vr}$  和  $F_{evr}$ 。对于尾斜轴,附加外激励效应与直升机所有转动运动的角速度、角加速度以及直升机的所有飞行速度和飞行加速度均有关。同时  $F_{evr}$  和  $F_{vr}$  还与传动轴上相对位置坐标为  $z_b$  时的轴截面的偏心  $e_{zb}$  有关,  $F_{ur}$  和  $F_{vr}$  还与传动轴坐标系的原点相对于直升机重心的位置参数  $u_0$ 、 $v_0$  和  $w_0$  有关。对于水平传动轴,附加外激励效应与飞行加速度  $\ddot{Z}_0$  无关。需要指出的是,只有当直升机做变速转动运动时,直升机的飞行速度和飞行加速度才会附加外激励效应做贡献。当直升机做横滚机动时,附加外激励

效应与飞行速度  $\dot{Z}_0$  无关。

由于附加的刚度效应、阻尼效应和外激励效应,直升机的空间机动飞行将使得尾传动轴中心运动轨道的大小发生改变,运动轨迹中心的位置沿某个特定的方向发生偏移。以直升机做横滚机动为例,对传动轴运动轨迹的影响如图 3 所示。图 3 是采用龙格库塔法对式(6)所表示的常微分方程进行数值计算并取其稳态响应而得到的。根据铰支梁的边界条件知,振型函数为  $W_r = \sin(r\pi z_b/l)$ ,其他相关的计算参数如表 1 所示,未给出的参数均为 0。图 3 中,正横滚机动速度为  $\dot{\theta}_{zR} = -8$  rad/s,反横滚机动速度为  $\dot{\theta}_{zR} = 8$  rad/s。对于水平传动轴,仅运动轨道的大小发生改变,正横滚时轨道变小,反横滚时变大。对于尾斜轴,运动轨道的大小和轨迹中心位置均发生改变(向右偏移)。

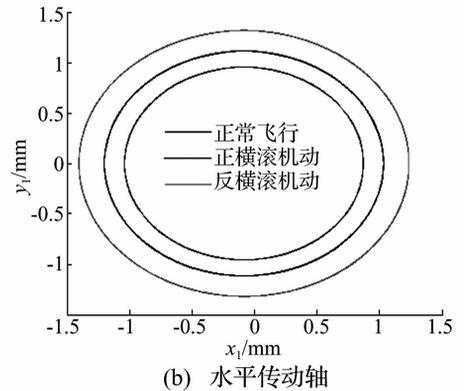
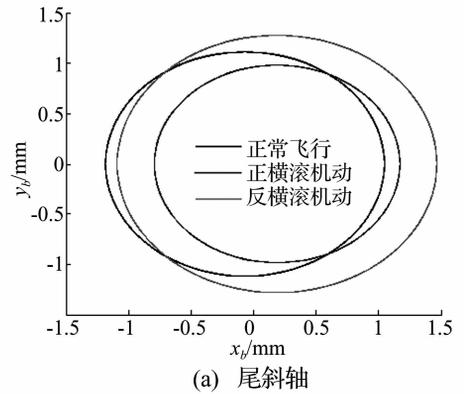


图 3 横滚机动时传动轴的运动轨迹

Fig. 3 Motion trajectory of shaft while roll maneuver

表1 尾传动轴的计算参数

Tab.1 Calculation parameters of tail drive shaft

参数名称	值/单位	参数名称	值/单位
$\rho$	2 710/(kg · m <sup>-3</sup> )	$r$	1/none
$E$	7 × 10 <sup>10</sup> /Pa	$e_{z01}$	5 × 10 <sup>-4</sup> /m
$D$	0.9/m	$g$	9.8/(m · s <sup>-2</sup> )
$d$	0.84/m	$\omega_\phi$	321/(rad · s <sup>-1</sup> )
$l$	2/m	$\varphi$	0.6/rad
$z_b$	1/2/m	$\dot{Z}_0$	80/(m · s <sup>-1</sup> )

### 3 结论

(1) 空间机动飞行会对尾传动轴产生附加的刚度效应、阻尼效应和外激励效应。尾斜轴的影响因素相对于水平轴更复杂。

(2) 受空间机动飞行的影响,通常传动轴运动轨迹的尺寸大小和中心位置都发生变化。若只受附加阻尼效应影响,则仅改变运动轨迹尺寸的大小。

#### 参考文献

- [1] Krothapalli K R, Prasad J V R, Peters D A. Helicopter rotor dynamic inflow modeling for maneuvering flight[J]. Journal of the American Helicopter Society, 2001, 46(2): 129 - 139.
- [2] Ananthan S, Leishman J G. Rotor wake aerodynamics in large amplitude maneuvering flight [J]. Journal of the American Helicopter Society, 2006, 51(3): 225 - 243.
- [3] 林富生, 孟光. 飞行器机动飞行时发动机转子等变速运动的动力学特性研究[J]. 航空学报, 2002, 23(4): 356 - 359.
- LIN Fu-sheng, MENG Guang. Dynamics of a maneuvering rotor in constant acceleration and deceleration [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(4): 356 - 359.
- [4] LIN Fu-sheng, MENG Guang. Study on the dynamics of a rotor in a maneuvering aircraft[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2003, 125(2): 324 - 327.
- [5] 林富生, 黄其柏, 孟光. 单自由度非惯性系内转子系统的动力学特性研究[J]. 武汉理工大学学报, 2007, 31(4): 627 - 629.
- LIN Fu-sheng, HUANG Qi-bai, MENG Guang. Journal of Wuhan University of Technology, 2007, 31(4): 627 - 629.
- [6] 徐敏, 廖明夫, 刘启洲. 机动飞行条件下双盘悬臂转子的振动特性[J]. 航空动力学报, 2002, 17(1): 105 - 109.
- XU Min, LIAO Ming-fu, LIU Qi-zhou. The vibration performance of the double-disk cantilever rotor in flight mission[J]. Journal of Aerospace Power, 2002, 17(1): 105 - 109.
- [7] 徐敏, 廖明夫. 机动飞行条件下带挤压油膜阻尼器的 Jeffcott 转子的振动特性[J]. 航空动力学报, 2003, 18(3): 394 - 401.
- XU Min, LIAO Ming-fu. The vibration performance of the Jeffcott rotor system with SFD in maneuver flight[J]. Journal of Aerospace Power, 2003, 18(3): 394 - 401.
- [8] 顾致平, 于渊博. 飞机水平盘旋下弹性支承转子的特性研究[J]. 西安工业大学学报, 2008, 28(6): 589 - 593.
- GU Zhi-ping, YU Yuan-bo. Investigation of rotor characteristics with elastic support in aircraft of horizontal circling[J]. Journal of Xi'an Technological University, 2008, 28(6): 589 - 593.
- [9] 惠旭升, 蔡安江, 张小龙. 转子在非惯性系中的动力学建模[J]. 机械设计, 2009, 26(7): 35 - 37.
- HUI Xu-sheng, CAI An-jiang, ZHANG Xiao-long. Dynamic modeling of rotor in non-inertia system [J]. Journal of Machine Design, 2009, 26(7): 35 - 37.
- [10] 祝长生, 陈拥军. 机动飞行时航空发动机转子系统的振动特性[J]. 航空学报, 2006, 27(5): 825 - 841.
- ZHU Chang-sheng, CHEN Yong-jun. Vibration characteristics of aeroengine's rotor system during maneuvering flight [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(5): 825 - 841.
- [11] 祝长生, 陈拥军. 机动飞行时发动机转子系统动力学统一模型[J]. 航空动力学报, 2009, 24(2): 371 - 377.
- ZHU Chang-sheng, CHEN Yong-jun. General dynamic model of aeroengine's rotor system during maneuvering flight[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(2): 371 - 377.
- [12] 张群岩, 符烧, 李飞行. 机动飞行时发动机转子振动特性的工程研究[J]. 科学技术与工程, 2011, 11(26): 6498 - 6500.
- ZHANG Qun-yan, FU Rao, LI Fei-xing. Engineering research on aero-engine rotor vibration characteristics in maneuver flight [J]. Science Technology and Engineering, 2011, 11(26): 6498 - 6500.
- [13] 杨永锋, 任兴民, 秦卫阳. 俯冲拉起下裂纹转子的非线性[J]. 振动与冲击, 2007, 26(4): 21 - 24.
- YANG Yong-feng, REN Xing-min, QIN Wei-yang. Nonlinear response analysis of a cracked jeffcott rotor in action of dive-hike[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007, 26(4): 21 - 24.
- [14] 杨永锋, 任兴民, 秦卫阳. 水平盘旋下裂纹转子的非线性响应[J]. 航空动力学报, 2007, 22(6): 1007 - 1012.
- YANG Yong-feng, REN Xing-min, QIN Wei-yang. Study of nonlinear response of cracked Jeffcott rotor in hovering state [J]. Journal of Aerospace Power, 2007, 22(6): 1007 - 1012.
- [15] 许兆棠. 多支点传动轴动力学研究[D]. 南京:南京航空航天大学, 2006.
- [16] 韩修林, 孙梅娟. 非惯性系中的哈密顿原理[J]. 宿州学院学报, 2010, 25(2): 24 - 25.
- HAN Xiu-lin, SUN Mei-juan. Hamilton's principle in the non-inertial frame of reference [J]. Journal of Suzhou University, 2010, 25(2): 24 - 25.