

# 斜齿轮动力学建模中啮合刚度处理与对比验证

王 峰, 方宗德, 李声晋

(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

**摘 要:** 为准确建立斜齿轮动力学模型, 更好分析斜齿轮系统振动特性, 提出基于轮齿承载接触分析、考虑齿轮轴扭转变形的轮齿啮合刚度计算方法。分析国内文献普遍采用的基于啮合刚度分解建立斜齿轮动力学模型, 指出其与理论力学相悖之处, 提出基于力、振动位移分解法建立综合考虑时变啮合刚度激励、啮入冲击激励的斜齿轮啮合型弯-扭-轴耦合振动模型。以某斜齿轮副为例进行的仿真计算结果表明, 基于承载接触分析的轮齿啮合刚度计算方法能准确、方便求得轮齿啮合刚度, 文献[8]动力学响应结果与理论实际存在明显差别, 而基于力、振动位移分解法的响应则能与理论实际较好吻合。

**关键词:** 啮合刚度分解; 承载接触分析; 斜齿轮; 动力学模型; 振动响应

**中图分类号:** TH132.41; O322 **文献标识码:** A

## Treatment and contrast verification of meshing stiffness in dynamic model of helical gear

WANG Feng, FANG Zong-de, LI Sheng-jin

(School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** In order to establish of dynamic model an accurate of helical gear, and investigate vibration characteristics of helical gear system, a meshing stiffness calculation method was put forward based on the analysis of teeth contact under load and the consideration of shaft torsional deformation. The dynamics models of helical gear built according to the decomposition of meshing stiffness in major domestic literatures, were inspected and some violation against theoretical mechanics was pointed out. Resolving forces and vibration displacements, a helical gear vibration model was established considering the meshing stiffness excitation and the corner mesh impact excitation. Taking some helical gear transmission system as an example, the results indicate that the method based on the analysis of teeth contact under load can easily and accurately calculate the teeth meshing stiffness. The dynamic responses calculated in a certain literature are significantly different from the actual results. The results by the method of resolving forces and vibration displacements are in good agreement with the theoretical ones.

**Key words:** decomposition of meshing stiffness; analysis of teeth contact under load; helical gear; dynamic model; vibration response

齿轮系统动力学为研究齿轮系统在传递动力、运动过程中振动、冲击、噪声等基本规律的科学<sup>[1]</sup>。齿轮系统作为机械传动系统的重要组成部分, 其动态特性会直接影响齿轮传动系统运行的稳定性。文献[2-4]由线性、非线性角度, 建立齿轮-转子系统动力学模型, 并用数值仿真方法研究齿轮动力学系统振动噪声等特性。在齿轮系统动力学建模中, 啮合刚度的计算处理一直是研究难点, 文献[5]利用瞬时啮合线总长度近似计算传动斜齿轮副啮合刚度; 文献[6]分析时变啮

合刚度对两级齿轮传动系统动力稳定性影响; 文献[7]则认为轮齿法向啮合刚度可分别对轴向、端面啮合线方向分解, 并由此建立直齿、斜齿、人字齿动力学分析模型。

本文提出基于轮齿承载接触分析考虑齿轮轴扭转变形的轮齿啮合刚度计算方法, 并通过算例将其与传统材料力学及有限元软件法计算结果比较。针对国内文献普遍采用文献[8]中基于将法向啮合刚度进行分解建立动力学方程方法, 提出回避尚未得到论证的啮合刚度分解理论, 由力、位移分解角度建立斜齿轮系统动力学方程, 进行系统振动特性分析。针对同一斜齿轮副动力学物理模型, 分别利用啮合刚度分解方法及力、位移分解方法进行动力学建模, 并实例分析比较两

种方法建立的动力学模型计算结果。

## 1 基于承载接触分析的啮合刚度计算

### 1.1 考虑轴扭转变形的承载接触分析

轮齿接触分析<sup>[9]</sup> (Tooth Contact Analysis, TCA) 及轮齿承载接触分析<sup>[10]</sup> (Load Tooth Contact Analysis, LTCA) 为对轮齿啮合接触及拟真实加载条件下齿轮工作性能的数值模拟。为使其能更好模拟轮齿啮合真实情况, 本文考虑齿轮扭转变形

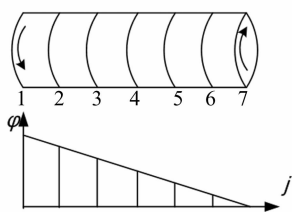


图1 齿轮轴扭转变形角  
Fig.1 Gear shaft torsional deformation angle

对齿面柔度矩阵影响, 获得轮齿承载接触分析。利用一维有限元方法分别计算小齿轮轴、大齿轮轴扭转变形, 将齿轮沿轴向分为与齿面网格对应的  $N$  段, 设置  $N+1$  个节点, 在工作齿面网格每个节点施加单位法向载荷, 计算获得轴扭转角  $\varphi_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, N; j=1, 2, \dots, N$ ),  $\varphi_{ij}$  为在  $i$  点施加单位法向载荷时,  $j$  点相对齿轮扭矩输入端转角。见图1, 设沿轴向将齿轮分为6段, 从右端输入扭矩, 则法向柔度系数为:

$$\gamma_{ij} = \varphi_{ij} r_b$$

其中: 脚标  $i$  表示施加载荷节点编号;  $j$  为产生变形节点编号;  $r_b$  为基圆半径。

为考虑齿轮扭转变形对齿面柔度矩阵影响, 将扭转变形产生的附加柔度矩阵与齿面网格法向柔度矩阵叠加, 获得齿轮系统齿面综合法向柔度矩阵。用叠加后柔度系数按轮齿接触分析方法计算, 即可获得考虑扭转变形影响的承载接触分析。

### 1.2 轮齿啮合刚度计算思路

一对齿轮啮合的两齿面由于传递载荷作用, 必会产生含弯曲变形、剪切变形、接触变形等的弹性变形, 称抵抗弹性变形能力为单齿啮合刚度, 某一瞬间同时参与啮合的几对轮齿刚度叠加称为轮齿在此时刻的综合啮合刚度。

本文采用的基于轮齿承载接触分析的轮齿啮合刚度计算方法基本思路为通过轮齿接触分析及轮齿承载接触分析, 利用变形协调方程、力平衡及非嵌入条件求得啮合齿面法向接触综合变形量, 经换算获得轮齿综合啮合刚度。其中综合考虑齿轮制造加工工艺导致的齿面误差影响、传递载荷齿轮轴扭转变形产生的附加柔度矩阵对齿面综合柔度矩阵影响、安装误差及齿面修形影响, 可较准确计算轮齿啮合刚度。图2为基于承载接触分析的啮合刚度计算方法思路流程。

### 1.3 与经典方法比较

在轮齿啮合刚度计算中, 材料力学求解刚度方法

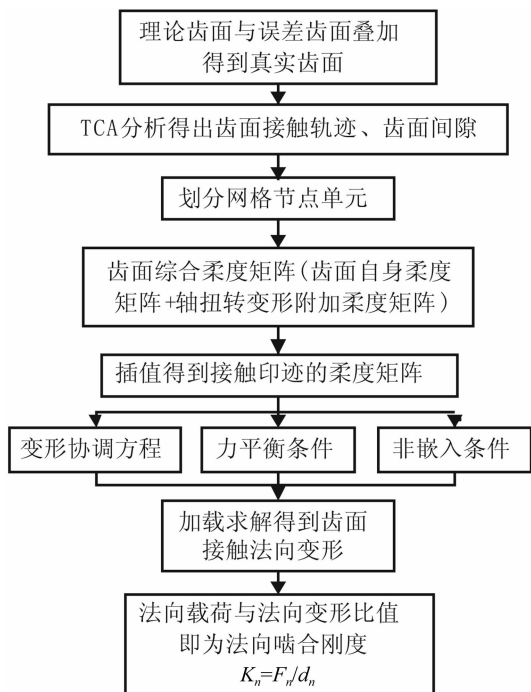


图2 轮齿啮合刚度计算流程

Fig.2 The process of tooth meshing stiffness calculation

应用较广。Weber 在 1949 年提出将啮合轮齿简化为材料力学中变截面悬臂梁, 认为啮合轮齿的综合弹性变形由轮齿弯曲剪切变形、齿轮基体弹性变形引起的轮齿附加变形及齿面啮合接触变形三部分组成。图3为该计算方法中等效的轮齿悬臂梁结构简图。

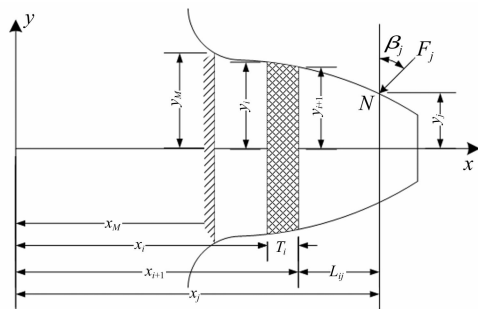


图3 轮齿等效悬臂梁结构简图

Fig.3 Tooth equivalent cantilever structure diagram

Abaqus 作为 CAE 软件的优秀代表, 广泛应用于诸多领域, 故本文用 Abaqus 作为分析齿轮啮合刚度有限元仿真工具, 建立斜齿轮 5 齿有限元计算模型, 对主动轮低转速进行准静态仿真计算, 见图4。轮齿啮合传动误差为:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \frac{z_1}{z_2} \varphi_1$$

式中:  $\varphi_1, \varphi_2$  为小轮、大轮齿数;  $z_1, z_2$  为小轮、大轮齿数。

轮齿法向综合啮合刚度转换式为:

$$k_m(t) = \frac{T_m}{\Delta\varphi} \left( \frac{2\cos\beta}{m_n z_2 \cos\alpha_t} \right)^2$$

式中:  $T_m$  为负载扭矩;  $\alpha_t$  为端面压力角;  $\beta$  为斜齿轮螺旋

角;  $m_n$  为法向模数。

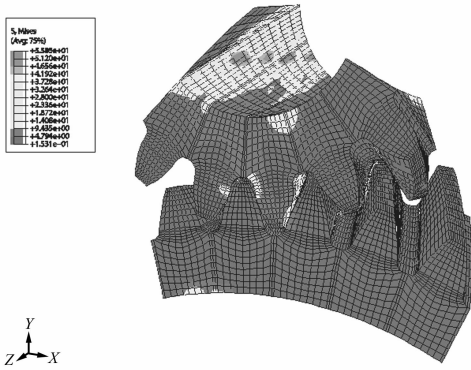


图 4 斜齿轮副五齿有限元模型仿真实例

Fig. 4 Simulation of five teeth finite element model

以表 1 某船用单级斜齿轮副参数作为本文啮合刚度计算分析实例,分别将材料力学法、有限元软件法及本文所提基于轮齿承载接触分析的啮合刚度计算法结果进行比较。见图 5。

表 1 某单级斜齿轮副参数

Tab. 1 The parameters of single-stage helical gear

参数	小齿轮(主动轮)	大齿轮(被动轮)
法向模数/mm	6	
端面压力角/(°)	20	
螺旋角/(°)	24.43	
负载扭矩/(N·m <sup>-1</sup> )	500	
轮齿齿数	17	44
轮齿旋向	左旋	右旋
齿宽/mm	90	90

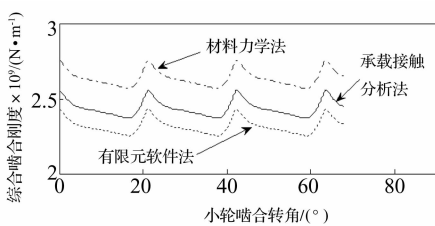


图 5 轮齿综合啮合刚度计算值比较

Fig. 5 Comparison of teeth meshing stiffness

由图 5 三种计算方法所得刚度变化趋势曲线图看出,材料力学法计算所得刚度值最大,有限元软件法计算所得刚度值最小,此因为材料力学方法未考虑齿轮轴扭转变形对轮齿啮合点变形影响;而 Abaqus 有限元软件法中,用准静态动态仿真,故系统动态质量会导致轮齿实际变形大于理论变形,换算成刚度则略偏小;基于承载接触分析法计算的轮齿啮合刚度值处于两种方法之间,综合啮合刚度较前两种方法偏差量最大不超

过 8%。由此可见,本文所提计算方法结果在允许误差范围内。

## 2 基于啮合刚度分解的斜齿轮动力学建模

斜齿轮同时参与啮合的齿对数越多,单对轮齿分担的载荷越少,故其凭借传动平稳、传递载荷能力强等特点广泛应用。但螺旋角过大其轴向力不可忽视,因此斜齿轮动力学系统除具有扭转、横向振动外,还会引起轴向振动,形成综合考虑误差激励、时变啮合刚度激励、啮入冲击激励的斜齿轮副啮合型弯-扭-轴耦合振动模型。斜齿轮系统 6 自由度广义位移列阵可表示为:

$$\{\delta\} = \{y_p, z_p, \theta_p, y_g, z_g, \theta_g\}^T$$

式中:  $y_i, z_i, \theta_i$  ( $i=p, g$ ) 分别为主、从动斜齿轮中心点  $O_p$  及  $O_g$  在  $y$  向、 $z$  向平移振动位移及转角位移,其中  $y$  向为端面啮合法线方向,  $z$  向为齿轮轴向。

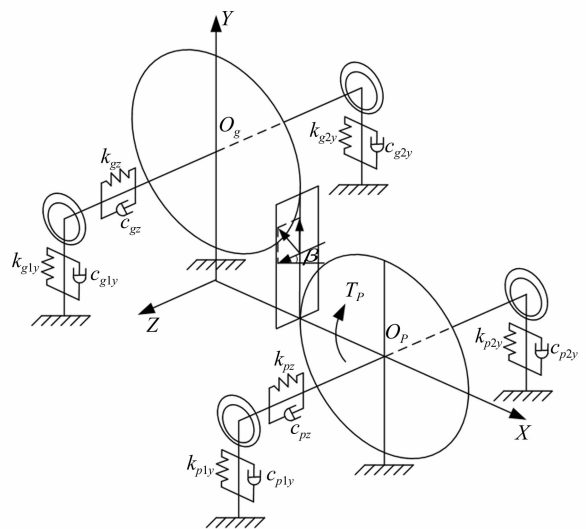


图 6 啮合型弯曲-扭转-轴向耦合斜齿轮振动模型

Fig. 6 The coupling vibration model of helical gear

据牛顿力学定律,由图 6 得系统动力学方程为:

$$\left. \begin{aligned} m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p &= -F_y \\ m_p \ddot{z}_p + c_{pz} \dot{z}_p + k_{pz} z_p &= -F_z \\ I_p \ddot{\theta}_p &= -F_y R_p + T_p - F_s(t) R_p \\ m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g &= F_y \\ m_g \ddot{z}_g + c_{gz} \dot{z}_g + k_{gz} z_g &= F_z \\ I_g \ddot{\theta}_g &= F_y R_g - T_g + F_s(t) R_g \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_p \ddot{y}_p + c_{py} \dot{y}_p + k_{py} y_p &= -F_y \\ m_p \ddot{z}_p + c_{pz} \dot{z}_p + k_{pz} z_p &= -F_z \\ I_p \ddot{\theta}_p &= -F_y R_p + T_p - F_s(t) R_p \\ m_g \ddot{y}_g + c_{gy} \dot{y}_g + k_{gy} y_g &= F_y \\ m_g \ddot{z}_g + c_{gz} \dot{z}_g + k_{gz} z_g &= F_z \\ I_g \ddot{\theta}_g &= F_y R_g - T_g + F_s(t) R_g \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中:  $m_p, m_g, I_p, I_g$  为小、大轮质量及转动惯量;  $R_p, R_g$  为小、大轮基圆半径;  $c_{py}, c_{gy}, k_{py}, k_{gy}$  为系统在中心点  $O_p, O_g$  处径向等效支撑阻尼及刚度;  $c_{pz}, c_{gz}, k_{pz}, k_{gz}$  为系统在中心点  $O_p, O_g$  处轴向等效支撑阻尼及刚度;  $F_y, F_z$  为轮齿端面啮合法线方向及轴向动态啮合力;  $T_p, T_g$  为主动轮扭矩、负载扭矩;  $F_s(t)$  为轮齿线外啮入冲击力。

其中:

$$\left. \begin{aligned} c_{py} &= c_{p1y} + c_{p2y} \\ c_{gy} &= c_{g1y} + c_{g2y} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{py} &= k_{p1y} + k_{p2y} \\ k_{gy} &= k_{g1y} + k_{g2y} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $c_{p1y}, c_{p2y}$ 为小齿轮左、右两端轴承径向支撑阻尼; $c_{g1y}, c_{g2y}$ 为大齿轮左、右两端轴承径向支撑阻尼; $k_{p1y}, k_{p2y}$ 为小齿轮左、右两端轴承径向支撑刚度; $k_{g1y}, k_{g2y}$ 为大齿轮左、右两端轴承径向支撑刚度。

文献[8]认为斜齿轮轮齿方向啮合刚度及啮合阻尼可沿齿轮副端面啮合线方向及轴向分解,即:

$$\left. \begin{aligned} c_{my} &= \cos(\beta c_m) \\ c_{mz} &= \sin(\beta c_m) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{my} &= \cos(\beta k_m) \\ k_{mz} &= \sin(\beta k_m) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中: $\beta$ 为斜齿轮螺旋角; $c_m, k_m$ 为轮齿法向啮合阻尼、啮合刚度。则轮齿端面啮合线方向及轴向动态啮合力可表达为:

$$F_y = \cos(\beta c_m)(\dot{y}_p - \dot{y}_g + R_p \dot{\theta}_p - R_g \dot{\theta}_g) + \cos(\beta k_m)(y_p - y_g + R_p \theta_p - R_g \theta_g) \quad (7)$$

$$F_z = \sin(\beta c_m)[\dot{z}_p - \dot{z}_g + (\dot{y}_p - \dot{y}_g + R_p \dot{\theta}_p - R_g \dot{\theta}_g) \tan \beta] + \sin(\beta k_m)[z_p - z_g + (y_p - y_g + R_p \theta_p - R_g \theta_g) \tan \beta] \quad (8)$$

### 3 基于力、位移分解的斜齿轮动力学建模

本文认为文献[8]的将法向啮合刚度分别沿端面啮合线方向、轴向分解不够严谨且缺少理论支持。设轮齿存在法向啮合误差  $e$ , 法向啮合刚度为  $k_m$ , 则将法向刚度及法向误差分别分解到端面啮合线方向, 求得由误差引起的端面啮合线向啮合力为:

$$P = \cos(\beta k_m) \cos(\beta e) = \cos^2 \beta k_m e \quad (9)$$

显然与牛顿力学先求法向啮合力再分解到端面啮合线方向结果  $P'$  相悖。

$$P' = (k_m e) \cos \beta = \cos(\beta k_m e) \quad (10)$$

为避免将法向啮合刚度分解, 本文在求轮齿动态啮合力时, 将端面啮合线方向振动位移与轴线方向振动位移分别分解到齿面啮合法向、啮合面切向, 由于不考虑摩擦, 故啮合面切向滑动位移不产生作用力, 啮合法向刚度与法向振动总位移之积即为由端面啮合线方向振动位移与轴线方向振动位移产生的法向啮合动态力:

$$P_n = k_m \delta_n = k_m (\delta_y \cos \beta + \delta_z \sin \beta) \quad (11)$$

将法向动态啮合力分解即可获得轮齿啮合线方向动态啮合力与轴线方向动态啮合力。见图7。

基于力、位移分解的动力学建模方程中, 轮齿端面啮合线方向及轴向动态啮合力可表达为:

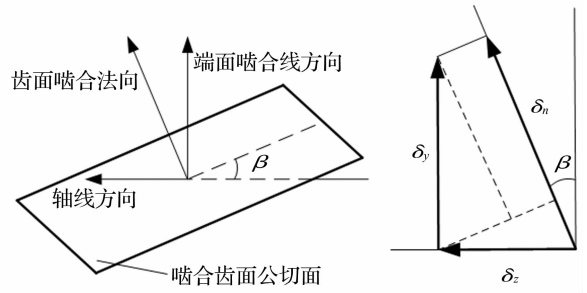


图7 振动位移分解简图

Fig.7 The decomposition diagram of vibration displacement

$$F'_y = \cos(\beta c_m) [\cos \beta (\dot{y}_p - \dot{y}_g + R_p \dot{\theta}_p - R_g \dot{\theta}_g) + \sin \beta (\dot{z}_p - \dot{z}_g)] + \cos(\beta k_m) [\cos \beta (y_p - y_g + R_p \theta_p - R_g \theta_g) + \sin \beta (z_p - z_g)] \quad (12)$$

$$F'_z = \sin(\beta c_m) [\cos \beta (\dot{y}_p - \dot{y}_g + R_p \dot{\theta}_p - R_g \dot{\theta}_g) + \sin \beta (\dot{z}_p - \dot{z}_g)] + \sin(\beta k_m) [\cos \beta (y_p - y_g + R_p \theta_p - R_g \theta_g) + \sin \beta (z_p - z_g)] \quad (13)$$

比较式(7)、(8)、(12)、(13)知, 两种方法所得斜齿轮动力学方程形式存在明显差异。

### 4 实例验证与结果分析

为进一步对比分析两种思路所建斜齿轮动力学模型, 用表1斜齿轮副参数及表2斜齿轮副动力学基本参数, 进行动力学仿真、比较。

表2 某单级斜齿轮副动力学基本参数

Tab.2 The basic dynamics parameters of helical gear system

参数	小齿轮 (主动轮)	大齿轮 (被动轮)
阻尼系数		0.1
密度/(g · cm <sup>-3</sup> )		7.85
主动轮转速/(r · min <sup>-1</sup> )	2000	-
等效质量/kg	7.70	34.9
左端轴承支撑刚度/(N · m <sup>-1</sup> )	9.93 × 10 <sup>8</sup>	1.32 × 10 <sup>9</sup>
右端轴承支撑刚度/(N · m <sup>-1</sup> )	6.27 × 10 <sup>8</sup>	1.21 × 10 <sup>9</sup>

利用变步长四阶 Runge-Kutta 数值积分方法<sup>[11]</sup>进行求解, 获得各方向振动加速度响应, 见图8~图10。由图8~图10看出, 两种思路建模所得各向振动加速度虽波形基本一致但振动幅值存在差异, 啮合线向相对振动加速度均方根值为 9.47 m/s<sup>2</sup>, 10.86 m/s<sup>2</sup>; 小轮轴承支撑径向振动加速度均方根值为 1.42 m/s<sup>2</sup>, 1.72 m/s<sup>2</sup>; 小轮轴向振动加速度均方根值为 0.63 m/s<sup>2</sup>, 0.40 m/s<sup>2</sup>。两种方法最大偏差达 36%。

由图11看出, 本文方法所得轴向动载荷在静载荷 -1578 N 附近波动, 符合动静载基本规律。而基于文献[8]中啮合刚度分解原则计算所得小轮轴向动载荷则在 -260 N 附近波动, 偏离静载荷较远。

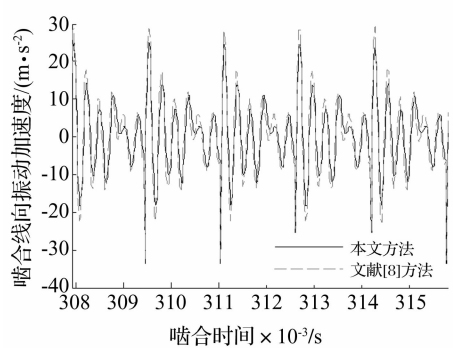


图8 啮合线向相对振动加速度

Fig. 8 The relative vibration acceleration of meshing direction

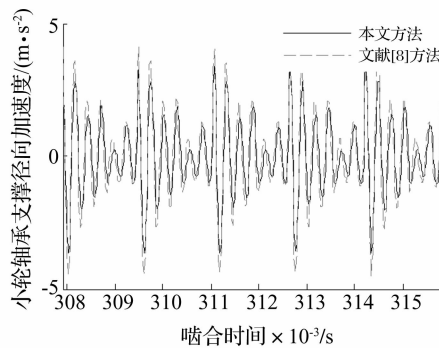


图9 小轮轴承支撑径向加速度

Fig. 9 The radial acceleration of pinion

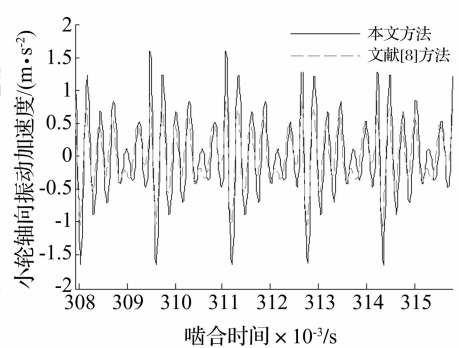


图10 小轮轴向振动加速度

Fig. 10 The axial acceleration of pinion

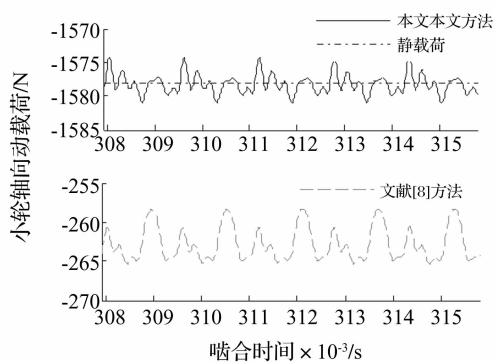


图11 小轮轴向动载荷

Fig. 11 The axial dynamic load of pinion

## 5 结论

(1)提出的基于轮齿承载接触分析的轮齿啮合刚度计算方法,综合考虑齿面误差、齿轮轴扭转变形产生的附加柔度矩阵对齿面综合柔度矩阵影响。与经典方法比较表明,该方法计算轮齿啮合刚度较准确。

(2)通过分析国内文献建立斜齿轮动力学模型采用啮合刚度分解法,指出其与基本牛顿力学相悖之处,并提出基于力、位移分解法,建立综合考虑时变啮合刚度激励、啮入冲击激励的斜齿轮啮合型弯-扭-轴耦合振动模型,形式上比较两种方法建立动力学方程差别。

(3)以一对斜齿轮副动力学仿真模型进行实例仿真显示,基于啮合刚度分解法<sup>[8]</sup>与本文所提方法各向振动响应均方根值结果最大相差36%,且前者小轮轴向动载荷偏离静载荷较远不符合理论实际,后者则在理论静载荷附近波动。由此表明,本文所提基于振动位移及力分解的斜齿轮动力学方程真实有效。

(4)在建立轮齿啮合动力学模型中,尽量避免分解法向啮合刚度,应由力、位移分解角度分析。

## 参考文献

- [1] 王建军, 李润方. 齿轮系统动力学的理论体系[J]. 中国机械工程, 1998, 9(12): 55-58.  
WANG Jian-jun, LI Run-fang. The theoretical system of the gear vibration theory [J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(12): 55-58.
- [2] Seireg A, Houser D R. Evaluation of dynamic factors for spur and helical gear [J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1970, 92(5): 504-515.
- [3] Winter H, Gerber H, Muller R. Investigation on the excitation of vibration and noise at spur and helical gears [C]. ASME International Power Transmission & Gearing Conference, Chicago, 1989: 765-772.
- [4] Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur geared pair [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 142(1): 49-75.
- [5] Umezawa K. Vibration of power transmission helical gears [J]. Bulletin of JSME, 1986, 29(251): 1605-1611.
- [6] Tordion G V, Gauvin R. Dynamic stability of a two-stage gear train under the influence of variable meshing stiffness [J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1977(8): 785-791.
- [7] 吴新跃, 朱石坚. 人字齿轮传动的振动理论分析模型 [J]. 海军工程大学学报, 2001, 13(5): 13-19.  
WU Xin-yue, ZHU Shi-jian. Theoretical vibration pattern of herringbone gearing [J]. Journal of Naval University of Engineering, 2001, 13(5): 13-19.
- [8] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学-振动、冲击、噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 177-180.
- [9] Litvin F L, Fuentes A. Gear geometry and applied theory [M]. United Kingdom: Cambridge University Press, 2004.
- [10] 方宗德. 齿轮轮齿承载接触分析(LTCA)的模型和方法 [J]. 机械传动, 1998, 22(2): 1-4.  
FANG Zong-de. Model and approach for loaded tooth contact analysis (LTCA) of gear drives [J]. Journal of Mechanical Transmission, 1998, 22(2): 1-4.
- [11] Julyan H E, Piro O. The dynamics of runge-kutta methods [J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 1992, 2: 427-449.