第十六章

第 1 节

1．(1) $\dfrac{A}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$ ；(2) $\dfrac{2A}{\pi}-\dfrac{4A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$。

2．(1) $\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ ；(2) $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx$ ；

(3) $-\dfrac{5}{6}\pi^2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx$ ；(4) $-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ ；

(5) $-\dfrac{(a-b)\pi}{4}+\dfrac{2(a-b)}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$。

3．(1) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[1-2(-1)^n\right]}{n}\sin nx$ ；(2) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\left[1-(-1)^n e^{-2\pi}\right]}{n^2+4}\sin nx$ ；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{4}{\pi n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right]\sin nx$ ；(4) $\dfrac{1}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{n-\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\dfrac{n\pi}{2}x$。

4．(1) $\dfrac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{k^2}$ ；(2) $\dfrac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[(-1)^n e^{\pi}-1\right]}{n^2+1}\cos nx$ ；

(3) $(\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2})+\dfrac{2}{\pi}\cos 2x-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{4}{n^2-1}+\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)\cos 2nx$ ；

(4) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[(-1)^n-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx$。

5． $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nxdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nxdx\quad(n=1,2,\cdots)$。

6．(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin nx$ ；(2) $\dfrac{4}{3}\pi^2+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\cos nx-\dfrac{\pi}{n}\sin nx\right)$ ；(3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\sin 2\pi nx$ ；

(4) $\dfrac{1}{6}(1-e^{-3})+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{3\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x-\dfrac{n\pi\left(1-(-1)^n e^{-3}\right)}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right]$ ；

（5）$\frac{C}{2}-\frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x$。

7．$-\frac{5}{4\pi}(2-\sqrt{2})-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t$

$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t$

$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t$。

9.（1）$\tilde{f}(x)=\begin{cases}-f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$ （2）$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(\pi+x) & x\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})\\ -f(-x) & x\in(-\frac{\pi}{2},0)\\ f(x) & x\in(0,\frac{\pi}{2})\\ -f(\pi-x) & x\in(\frac{\pi}{2},\pi)\end{cases}$

10．（1）$\tilde{a}_n=a_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$，$\tilde{b}_n=-b_n\quad(n=1,2,\cdots)$；

（2）$\tilde{a}_n=a_n\cos nC+b_n\sin nC\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

$\tilde{b}_n=b_n\cos nC-a_n\sin nC\quad(n=1,2,\cdots)$；

（3）$\tilde{a}_0=a_0^2$，$\tilde{a}_n=a_n^2-b_n^2$，$\tilde{b}_n=2a_nb_n\quad(n=1,2,\cdots)$。

第 2 节

1．提示：因为 $\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在 $N>0$，使得当 $x\geq N$ 时，$|\psi(x)|<1$。利用积分第二中值定理可得 $\left|\int_N^A\psi(x)\sin pxdx\right|<\frac{4}{p}$ （$\forall A>N$），因此 $\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\right|\leq\frac{4}{p}$。而由 Riemann 引理，$\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin pxdx=0$。因此当 $p\to+\infty$ 时，$\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx=\int_0^N\psi(x)\sin pxdx+\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin pxdx\to 0$。

2．提示：易知

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du=\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du\text{，}$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}du-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}du=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du.$$

而

$$\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}=\lim_{u\to 0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}=\psi'_{+}(0)+\psi'_{-}(0)\text{。}$$

利用 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}du=0\text{。}$$

3．提示：由于

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}du=\int_{0}^{\delta}\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\}\frac{\sin pu}{u}du,$$

利用 Dirichlet 引理即得结论。

8．$\frac{1}{3}$。

第 3 节

1．$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$，$x\in(-\pi,\pi)$；

$$x^3=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin nx\text{，}\quad x\in(-\pi,\pi)\text{。}$$

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$。

6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$。

7．提示：利用分部积分法可得 $b_n''=-n^2b_n$。由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b_n''|\right)\quad(n=1,2,\cdots)\text{，}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n''|\right)。$$

8．提示：利用 Parseval 等式可知 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=0$，于是 $f(x)\equiv 0$。

第 4 节

1．(1) $\frac{A}{i\omega}(1-e^{-i\omega\delta})$；(2) $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$；(3) $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$；(4) $\frac{1}{2+i\omega}$；

(5) $\frac{A\delta}{2}\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\frac{\delta}{2}}{(\omega-\omega_0)\frac{\delta}{2}}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\frac{\delta}{2}}{(\omega+\omega_0)\frac{\delta}{2}}\right]$。

2．正弦变换：$\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$；余弦变换：$\frac{a}{a^2+\omega^2}$。

3． $f_1*f_2(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}(\sin x-\cos x+e^{-x}), & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}e^{-x}(1+e^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

第 5 节

1. 提示：先将圆频率 ω 写成频率形式 $2\pi s$，再对充分大的 N，在区间 $[-N,N]$ 以间隔 Δx 对被积函数抽样（参见图 16.5.2），在每个小区间内利用矩形公式近似代替积分，则

$$\hat{f}(\omega)\approx\int_{-N}^{N}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi sxi}dx\approx\sum_{n=-M}^{M}f(n\Delta x)\mathrm{e}^{-2\pi s(n\Delta x)i}\Delta x,$$

再适当代换整理，就可以得到离散 Fourier 变换形式。

2．提示：设 $\xi\ne 1$ 是方程 $x^N=1$ 的一个根，则 $\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$。