习　　题　15.1

1．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$。

2．设 $f(x,y)$ 当 y 固定时，关于 x 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $y\to y_0-$ 时，它关于 y 单调增加地趋于连续函数 $\phi(x)$，证明

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\phi(x)dx。$$

3．利用交换积分顺序的方法计算下列积分：

（1）$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$；

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}\quad(1>a>0)$。

4．求下列函数的导数：

（1）$I(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}dx$；

（2）$I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}dx$；

（3）$F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$。

5．设 $I(y)=\int_0^y(x+y)f(x)dx$，其中 f 为可微函数，求 $I''(y)$。

6．设 $F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|dx\quad(a<b)$，其中 $f(x)$ 为可微函数，求 $F''(y)$。

7．设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$F(x)$ 是可导的，证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-at)+f(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$

以及初始条件 $u(x,0)=f(x),\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

8．利用积分号下求导法计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2x)dx\quad(a>1)$；

（2）$\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx\quad(|\alpha|<1)$；

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$。

9．证明：第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt \qquad (0<k<1)$$

满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0\text{。}$$

10．设函数 $f(u,v)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数。证明：函数

$$w(x,y,z)=\int_0^{2\pi} f(x+z\cos\varphi,\ y+z\sin\varphi)d\varphi$$

满足偏微分方程

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}\text{。}$$

11．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$。研究函数

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$$

的连续性。

习　　题　15.2

1．证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}dx$，$y\ge a>0$；　　（2）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}dx$，$0\le\alpha\le\alpha_0$；

（3）$\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x dx$，$a\le\alpha\le b$。

2．说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}dx$，$0<\alpha<+\infty$；　　（2）$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$，$0<\alpha<2$。

3．设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续，反常积分 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 当 $\lambda=a$ 与 $\lambda=b$ 时都收敛，证明 $\int_0^{+\infty}t^\lambda f(t)dt$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

4．讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，在 $y\ge y_0>0$；

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，在（I）$a<\alpha<b$；（II）$-\infty<\alpha<+\infty$；

（3）$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x dx$，在（I）$p\ge p_0>0$；（II）$p>0$；

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx$，在（I）$\alpha\ge\alpha_0>0$；（II）$\alpha>0$；

5．证明函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

6．确定函数 $F(y)=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}dx$ 的连续范围。

7．设 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 存在。证明 $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}e^{-sx}f(x)dx$ 在 $[0,+\infty)$

上连续。

8．证明函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微。

9．利用 $\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xy}dy$，计算 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ （$b>a>0$）。

10．利用 $\frac{\sin bx-\sin ax}{x}=\int_a^b\cos xydy$，计算 $\int_0^{+\infty}e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}dx$ （$p>0$，$b>a>0$）。

11．利用 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{a+x^2}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}}$ （$a>0$），计算 $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}}$ （n 为正整数）。

12．计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$。

13．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)。$$

14．(1) 利用 $\int_0^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}$ （$c>0$）；

(2) 利用积分号下求导的方法引出 $\frac{dL}{dc}=-2L$，以此推出与 (1) 同样的结果，并计算 $\int_0^{+\infty}e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy$ （$a>0,b>0$）。

15．利用 $\int_0^{+\infty}e^{-t(\alpha^2+x^2)}dt=\frac{1}{\alpha^2+x^2}$，计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ （$\alpha>0$）。

习　题　15.3

1．计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}dx$；　　(2) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$；

(3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ （$n>0$）；　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx$ （$n>m>0$）；

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7x\cos^{\frac{1}{2}}xdx$；

(7) $\int_0^{+\infty}x^me^{-x^n}dx$ （$m,n>0$）；　　(8) $\int_0^1x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx$ （$p,q,n>0$）。

2．证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ （n 为正整数），并推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^n}dx=1$。

3．证明 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导，且 $\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln xdx$。进一步证明 $\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^ndx$ （$n\geq 1$）。

4．证明 $\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$。

5． 计算$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx$。

6．设$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1\}$。确定正数$p$，使得反常重积分

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{\left(1-x^2-y^2-z^2\right)^p}$$

收敛。并在收敛时，计算I的值。

7．设$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\right\}$。确定正数$\alpha,\beta,\gamma$，使得反常重积分

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{dxdydz}{1+x^{\alpha}+y^{\beta}+z^{\gamma}}$$

收敛。并在收敛时，计算I的值。

8．计算

$$I=\iint_D x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}dxdy,$$

其中**D**是由三条直线$x=0$，$y=0$及$x+y=1$所围成的闭区域，m,n,p均为大于 0 的正数。

9．证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha}xdx=\dfrac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}$ （$|\alpha|<1$）。

10．证明

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi}=\frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}\qquad(0<\alpha<2,0<k<1)。$$

11．设$0\le h<1$，正整数$n\ge 3$。证明

$$\int_0^h(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt\ge\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$