习　题 13.1

1. 设一平面薄板（不计其厚度），它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 $\mathbf{D}$。如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上连续，试用二重积分表示该薄板上的全部电荷。
2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $\mathbf{D}=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界，而且除了曲线段 $y=\sin x,\ 0\le x\le\pi$ 外，$f(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上其它点连续。证明 f 在 $\mathbf{D}$ 上可积。
3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$。

   （提示：计算时可将 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$ 用直线均匀划分。）
4. 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\mathbf{D}=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y)=f(x),\quad (x,y)\in\mathbf{D}。$$

   证明 $F(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。
5. 设 $\mathbf{D}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的零边界闭区域，二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$ 在 $\mathbf{D}$ 上可积。证明

$$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

   和

$$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

   也在 $\mathbf{D}$ 上可积。

习　题 13.2

1. 证明重积分的性质 8。
2. 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

   (1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^2dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)^3dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为 x 轴，y 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域；

   (2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\ln(x+y)dxdy$ 与 $\iint\limits_{\mathbf{D}}[\ln(x+y)]^2dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$。
3. 利用重积分的性质估计下列重积分的值：

   (1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy(x+y)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

   (2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，其中 $\mathbf{D}$ 为区域 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 10\}$；

   (3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdxdz}{1+x^2+y^2+z^2}$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为单位球 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}$。
4. 计算下列重积分：

   (1) $\iint\limits_{\mathbf{D}}(x^3+3x^2y+y^3)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

   (2) $\iint\limits_{\mathbf{D}}xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$；

   (3) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为长方体 $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$。
5. 在下列积分中改变累次积分的次序：

   (1) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy\qquad (a<b)$；

(2) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \qquad (a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x} f(x,y)dy$；

(4) $\int_0^1 dy\int_0^{2y} f(x,y)dx+\int_1^3 dy\int_0^{3-y} f(x,y)dx$；

(5) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz$（改成先 y 方向，再 x 方向和 z 方向的次序积分）；

(6) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)dz$（改成先 x 方向，再 y 方向和 z 方向的次序积分）。

6．计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{D}} xy^2dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\dfrac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{\mathbf{D}} \dfrac{dxdy}{\sqrt{2a-x}} \quad (a>0)$，其中 $\mathbf{D}$ 为圆心在 (a,a)，半径为 a 并且和坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域；

(3) $\iint\limits_{\mathbf{D}} \mathrm{e}^{x+y}\,dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为区域 $\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$；

(4) $\iint\limits_{\mathbf{D}} (x^2+y^2)dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,\ y=x+a,\ y=a$ 和 $y=3a\ (a>0)$ 所围的区域；

(5) $\iint\limits_{\mathbf{D}} ydxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围的区域；

(6) $\iint\limits_{\mathbf{D}} y\left[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\right]dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 为直线 $y=x,\ y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域；

(7) $\iint\limits_{\mathbf{D}} x^2ydxdy$，其中 $\mathbf{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 2x,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$；

(8) $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为曲面 $z=xy$，平面 $y=x,\ x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域；

(9) $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为平面 $x=0,\ y=0,\ z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体；

(10) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围的区域；

(11) $\iiint\limits_{\Omega} z^2dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ $(R>0)$ 的公共部分；

（12）$\iiint\limits_{\Omega} x^2dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$。

7． 设平面薄片所占的区域是由直线 $x+y=2, y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求这个薄片的质量。

8． 求抛物线 $y^2=2px+p^2$ 与 $y^2=-2qx+q^2 \quad (p,q>0)$ 所围图形的面积。

9. 求四张平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截的的立体的体积。

10. 求柱面 $y^2+z^2=1$ 与三张平面 $x=0,\ y=x,\ z=0$ 所围的在第一卦限的立体的体积。

11. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，三个坐标平面及平面 $x+y=1$ 所围有界区域的体积。

12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，a,b 为常数。证明

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)(b-y)dy$；

(2) $\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{(a-x)}f(x)dx$（$a>0$）。

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x)dx=\int_0^1 (e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

14. 设 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$，证明

$$1\le\iint_{\mathbf{D}}\left[\sin(x^2)+\cos(y^2)\right]dxdy\le\sqrt{2}。$$

15. 设 $\mathbf{D}=[0,1]\times[0,1]$，利用不等式 $1-\frac{t^2}{2}\le\cos t\le 1$（$|t|\le\pi/2$）证明

$$\frac{49}{50}\le\iint_{\mathbf{D}}\cos(xy)^2dxdy\le 1。$$

16. 设 $\mathbf{D}$ 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，$\mathbf{D}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y，(α,β) 是 $\mathbf{D}$ 内任意一点。证明

(1) $\left|\iint_{\mathbf{D}}(x-\alpha)(y-\beta)dxdy\right|\le l_x l_y m\mathbf{D}$；

(2) $\left|\iint_{\mathbf{D}}(x-\alpha)(y-\beta)dxdy\right|\le\frac{{l_x}^2{l_y}^2}{4}$。

17. 利用重积分的性质和计算方法证明：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2\le(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx。$$

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge(b-a)^2。$$

19. 设 $\mathbf{\Omega}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,|\,0\le x_i\le 1,\ i=1,2,\cdots,n\}$，计算下列 n 重积分：

(1) $\int_{\Omega}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$；

(2) $\int_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2dx_1dx_2\cdots dx_n$。

习　题　13.3

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

（1）$\iint_{\mathbf{D}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，其中 $\mathbf{D}$ 是由圆周 $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$ 所围区域；

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\sqrt{x}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=x$所围区域；

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}}(x+y)dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=x+y$所围区域；

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由圆周$x^2+y^2=1$及坐标轴所围成的在第一象限上的区域。

2. 求下列图形的面积：

（1）$(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$ （$\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$）所围的区域；

（1） 由抛物线$y^2=mx,\ y^2=nx\ \ (0<m<n)$，直线$y=\alpha x,\ y=\beta x\ \ (0<\alpha<\beta)$所围的区域；

（3）三叶玫瑰线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)\ \ (a>0)$所围的图形；

（4）曲线$\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ \ (h,k>0;\ a,b>0)$所围图形在$x>0,\ y>0$的部分。

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2}f(x,y)dxdy,$$

其中$f(x,y)$在原点附近连续。

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由坐标轴及抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$所围的区域；

（2）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由 i）椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围区域；ii）圆$x^2+y^2=R^2$所围的区域；

（3）$\iint\limits_{\mathbf{D}}ydxdy$，其中$\mathbf{D}$是由直线$x=-2,\ y=0$，$y=2$以及曲线$x=-\sqrt{2y-y^2}$所围的区域；

（4）$\iint\limits_{\mathbf{D}}e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中$\mathbf{D}$是由直线$x+y=2,\ x=0$及$y=0$所围的区域；

（5）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy$，其中闭区域$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|\le 1\}$；

（6）$\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$，其中闭区域$\mathbf{D}$是由曲线$y=\sqrt{a^2-x^2}-a$ （$a>0$）和直线$y=-x$所围成。

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$，其中$\mathbf{\Omega}$为球$\{(x,y,z)|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$；

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$，其中$\mathbf{\Omega}$为椭球$\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$；

（3）$\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$，其中$\mathbf{\Omega}$为柱面$y=\sqrt{2x-x^2}$及平面$z=0,\ z=a\ \ (a>0)$

和 $y=0$ 所围的区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right)}{1+x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为半球 $\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=3a^2\quad(a>0)$ 所围的区域。

(6) $\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)dxdydz$，其中 $\mathbf{\Omega}$ 为平面曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围的区域；

(7) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$，其中闭区域 $\mathbf{\Omega}$=$\{(x,y,z)\,|\ x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$，$z\ge 0,\ y\ge 0\}$；

(8) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)dxdydz$，其中闭区域 $\mathbf{\Omega}=\{(x,y,z)\,|\ 0\le x+y-z\le 1, 0\le x-y+z\le 1, 0\le y+z-x\le 1\}$。

6．求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx\ (R>0)$ 所围立体的体积。

7．求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积。

8．求下列曲面所围空间区域的体积：

(1) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=ax\ (a,b,c>0)$；

(2) $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1\ (a,b,c>0)$ 与三张平面 $x=0,y=0,z=0$ 所围的在第一卦限的立体。

9．设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的一立体。其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，求此物体的质量。

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 8π 立方厘米的水，现又倒入 120π 立方厘米的水，问水面比原来升高多少厘米。

11．求质量为 M 的均匀薄片 $\begin{cases}x^2+y^2\le a^2\\ z=0\end{cases}$ 对 z 轴上 $(0,0,c)\ (c>0)$ 点处的单位质量的质点的引力。

12．已知球体 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$，在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方，求球体的质量与重心。

13．证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\le\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{dxdy}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\le\frac{\pi}{4}。$$

14．设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du。$$

15．设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。证明

$$\iiint_{\Omega} f(z)dxdydz = \pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)du ,$$

其中Ω为单位球$x^2+y^2+z^2 \le 1$。

16．计算下列n重积分：

（1）$\int_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}dx_1dx_2\cdots dx_n$ ，

其中$\mathbf{\Omega} = \{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1+x_2+\cdots+x_n \le 1,\ x_i \ge 0,\ i=1,2,\cdots,n\}$ ；

（2）$\int_{\Omega}({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2)dx_1dx_2\cdots dx_n$ ，

其中$\mathbf{\Omega}$为n维球体$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2 \le 1\}$。

习　　题　13.4

1．讨论下列反常积分的敛散性：

（1）$\iint_{\mathbf{R}^2}\dfrac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ ；

（2）$\iint_{\mathbf{D}}\dfrac{\varphi(x,y)}{\left(1+x^2+y^2\right)^p}dxdy$ ，$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|0\le y\le 1\}$，而且$0<m\le\left|\varphi(x,y)\right|\le M$（$m,M$ 为常数）；

（3）$\iint_{x^2+y^2\le 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}dxdy$ ，其中$\varphi(x,y)$满足与上题同样的条件；

（4）$\iint_{[0,a]\times[0,a]}\dfrac{dxdy}{\left|x-y\right|^p}$ ；

（5）$\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$。

2．计算下列反常积分：

（1）$\iint_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{x^py^q}$ ，其中$\mathbf{D}=\{(x,y)\,|xy\ge 1, x\ge 1\}$，且$p>q>1$ ；

（2）$\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy$ ；

（3）$\iiint_{\mathbf{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$。

3．设$\mathbf{D}$是由第一象限内的抛物线$y=x^2$，圆周$x^2+y^2=1$以及x轴所围的平面区域，证明$\iint_{\mathbf{D}}\dfrac{dxdy}{x^2+y^2}$收敛。

4．判别反常积分

$$I=\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛，求其值。

5．设 $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\le x\le t\\0\le y\le t}} e^{-\frac{tx}{y^2}}dxdy$，求 $F'(t)$。

6．设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明

$$\iint\limits_{0\le y\le x\le a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}dxdy=\pi\int_0^a f(x)dx\text{。}$$

7．计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}dx_1dx_2\cdots dx_n$。

习　　题　13.5

1. 计算下列外积：

（1）$(xdx+7z^2dy)\wedge(ydx-xdy+6dz)$；

（2）$(\cos ydx+\cos xdy)\wedge(\sin ydx-\sin xdy)$；

（3）$(6dx\wedge dy+27dx\wedge dz)\wedge(dx+dy+dz)$。

2. 设

$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$,

$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$。

求 $\omega+\eta$ 和 $\omega\wedge\eta$。

3. 求

$$\omega=x_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+x_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(1+x_2^2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+x_2^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_1$$
$$+(x_3^2+x_2^2)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3-x_1^2\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_2$$

的标准形式。

4. 证明外积满足分配律和结合律。

5. 写出微分形式 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ 在下列变换下的表达式：

（1）柱面坐标变换

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z\text{；}$$

（2）球面坐标变换

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi\text{。}$$

6. 设 $\omega_j=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^j\mathrm{d}x_i$（$j=1,2,\cdots,n$）为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式，证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\text{。}$$