习　题　7.1

1. 用定义计算下列定积分：

   ⑴ $\int_0^1 (ax+b)\,dx$；　　⑵ $\int_0^1 a^x\,dx$　($a>0$).

2. 证明，若对$[a,b]$的任意划分和任意$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$都存在，则$f(x)$必是$[a,b]$上的有界函数。

3. 证明 Darboux 定理的后半部分：对任意有界函数$f(x)$，恒有
$$\lim_{\lambda\to 0}\underline{S}(P)=l。$$

4. 证明定理 7.1.3。

5. 讨论下列函数在 $[0,1]$ 的可积性：

   ⑴ $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　⑵ $f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{为有理数},\\ 1, & x\text{为无理数};\end{cases}$

   ⑶ $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为有理数},\\ x, & x\text{为无理数};\end{cases}$　　⑷ $f(x)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(\sin\frac{\pi}{x}), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

6. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\geq m>0$（m为常数），证明$\dfrac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积。

7. 设有界函数$f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明$f(x)$在$[a,b]$上可积。

8. 设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数。证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$与$\sigma>0$，存在划分P，使得振幅$\omega_i\geq\varepsilon$的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\geq\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$（即振幅不能任意小的那些小区间的长度之和可以任意小）。

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$A\leq f(x)\leq B$，$g(u)$在$[A,B]$上连续，证明复合函数$g(f(x))$在$[a,b]$上可积。

习　题　7.2

1. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上定义，且在$[a,b]$中除了有限个点之外，都有$f(x)=g(x)$，证明$g(x)$在$[a,b]$上也可积，并且有
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx。$$

2. 设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上都可积，请举例说明一般有
$$\int_a^b f(x)g(x)dx\neq\left(\int_a^b f(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)dx\right)。$$

3. 证明：对任意实数a,b,c，只要$\int_a^b f(x)dx$，$\int_a^c f(x)dx$和$\int_c^b f(x)dx$都存在，就成立
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx。$$

4. 判断下列积分的大小：

   ⑴ $\int_0^1 xdx$ 和 $\int_0^1 x^2dx$；　　⑵ $\int_1^2 xdx$ 和 $\int_1^2 x^2dx$；

   ⑶ $\int_{-2}^{-1}(\frac{1}{2})^x dx$ 和 $\int_0^1 2^x dx$；　　⑷ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx$。

5．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续， $f(x)\ge 0$ 但不恒为 0，证明

$$\int_a^b f(x)dx > 0。$$

6．设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ ，证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒为 0。

7．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = f(b)。$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$ ，使得 $f'(\xi)=0$ 。

8．设 $\varphi(t)$ 在 $[0,a]$ 上连续， $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)\ge 0$ 。证明

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt\right)\le \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))dt。$$

9．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调减少，证明对任意 $\alpha\in[0,1]$ ，成立

$$\int_0^\alpha f(x)dx \ge \alpha\int_0^1 f(x)dx。$$

10．（Young 不等式）设 $y = f(x)$ 是 $[0,\infty)$ 上严格单调增加的连续函数，且 $f(0)=0$ ，记它的反函数为 $x = f^{-1}(y)$。证明

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy \ge ab \quad （a>0,\ b>0）。$$

11． 证明定积分的连续性：设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则有

$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b |f_h(x) - f(x)|dx = 0$ 。

12．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上都可积，证明不等式

(1) （Schwarz 不等式） $\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$ ；

(2) （Minkowski 不等式） $\left\{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \le \left\{\int_a^b f^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{\int_a^b g^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}$。

13．设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$ ， $g(x)>0$ ，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{a\le x\le b} f(x)。$$

习　题　7.3

1. 设函数 $f(x)$ 连续，求下列函数 $F(x)$ 的导数：

(1) $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$;　　(2) $F(x) = \int_a^{\ln x} f(t)\,dt$;

(3) $F(x) = \int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 t dt\right)} \frac{1}{1+t^2}dt$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2\ dt}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}\ dw}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\arctan v)^2 dv}{\sqrt{1+x^2}}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}du}$ 。

3. 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的连续函数且恒有 $f(x)>0$，证明 $g(x)=\dfrac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的单调增加函数。

4. 求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ 的极值。

5 利用中值定理求下列极限：

⑴ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}\,dt$；　　⑵ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \dfrac{\sin x}{x}\,dt$　（$p\in\mathbf{N}$）。

6. 求下列定积分：

⑴ $\int_0^1 x^2(2-x^2)^2 dx$；　　⑵ $\int_1^2 \dfrac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}dx$；

⑶ $\int_0^2 (2^x+3^x)^2 dx$；　　⑷ $\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \dfrac{(x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$；　　(6) $\int_0^1 \arcsin x\,dx$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$；　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x dx$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x\,dx$；　　(10) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\,dx$；

(11) $\int_0^1 x^2 \operatorname{arc}\tan x dx$；　　(12) $\int_1^{\mathrm{e}+1} x^2\ln(x-1)\,dx$。

(13) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$；　　(14) $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}\,dx$；

(15) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$；　　(16) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(17) $\int_0^1 \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$；　　(18) $\int_0^1 \dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$；

(19) $\int_1^{\sqrt{2}} \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；　　(20) $\int_0^1 x\sqrt{\dfrac{x}{2-x}}\,dx$；

7. 求下列极限：

⑴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$；

⑵ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$　（$p>0$）；

⑶ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right)$。

8. 求下列定积分：

⑴ $\int_0^{\pi} \cos^n x dx$；　　⑵ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^n x\,dx$；

⑶ $\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx$；　　⑷ $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2(1-4x^2)^{10}dx$；

(5) $\int_0^1 x^n \ln^m x dx$；　　(6) $\int_1^e x\ln^n x dx$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：

⑴ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$；

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$。

10. 利用上题结果计算：

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,dx$; (2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$;

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin^2 x}dx$。

11. 求下列定积分：

(1) $\int_0^6 x^2[x]\,dx$; (2) $\int_0^2 \mathrm{sgn}(x-x^3)\,dx$;

(3) $\int_0^1 x|x-a|\,dx$; (4) $\int_0^2 [e^x]dx$.

12．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且关于 $x=T$ 对称，这里 $a<T<b$。则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{2T-b} f(x)dx + 2\int_T^b f(x)dx。$$

并给出它的几何解释。

13．设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0. \end{cases}$ 计算 $I=\int_1^4 f(x-2)dx$。

14．设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，

$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

15．设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求 $\int_1^e f(x)dx$。

16．设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^1 tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$， $f(1)=1$。求 $\int_1^2 f(x)dx$。

17．求 $\int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx$，其中 n 为正整数。

18．设函数 $S(x)=\int_0^x |\cos t|\,dt$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$。

19．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且对于任何 $a>0$ 有

$$g(x)=\int_x^{ax} f(t)dt \equiv 常数，\ x\in(0,+\infty)。$$

证明：$f(x)=\frac{c}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，其中 c 为常数。

20．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，证明

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}dx = (\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}dx。$$

21．设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |f'(x)|\,dx。$$

22．设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du。$$

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \le 0$， $x \in [0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)dx \le f\left(\frac{1}{3}\right)。$$

(提示： 考虑 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{3}$ 处的 Taylor 公式，再将 x 换成 x^2 。)

25．设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数，证明：对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0。$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0$，$\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$。证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$。(提示：利用反证法。)

习　题　7.4

1. 求下列曲线所围的图形面积：

⑴ $y = \frac{1}{x}$， $y = x$ ， $x = 2$ ；

⑵ $y^2 = 4(x+1)$， $y^2 = 4(1-x)$ ；

⑶ $y = x$ ， $y = x + \sin^2 x$， $x = 0$， $x = \pi$ ；

⑷ $y = e^x$， $y = e^{-x}$， $x = 1$；

⑸ $y = |\ln x|$， $y = 0$， $x = 0.1$， $x = 10$ ；

⑹ 叶形线 $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 2t^2 - t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le 2$ ；

⑺ 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ ；

(8) 阿基米德螺线 $r = a\theta,\ \theta = 0,\ \theta = 2\pi$ ；

(9) 对数螺线 $r = a e^{\theta},\ \theta = 0,\ \theta = 2\pi$ ；

(10) 蚌线 $r = a\cos\theta + b$ （$b \ge a > 0$）；

(11) $r = 3\cos\theta$， $r = 1 + \cos\theta$ $(-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3})$；

(12) 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ；

(13) 四叶玫瑰线 $r = a\cos 2\theta$。

(14) Descartes 叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ ；

(15) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

2. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值。

3. 求下列曲线的弧长：

⑴ $y = x^{3/2}$， $0 \le x \le 4$ ；

⑵ $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$， $1 \le y \le e$ ；

⑶ $y = \ln\cos x$， $0 \le x \le a < \frac{\pi}{2}$ ；

(4) 星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$；

(5) 圆的渐开线$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$；

(6) 心脏线$r = a(1-\cos\theta)$，$0 \le \theta \le 2\pi$；

(7) 阿基米德螺线$r = a\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$；

(8) $r = a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$，$0 \le \theta \le 3\pi$。

4. 在旋轮线的第一拱上，求分该拱的长度为 $1:3$ 的点的坐标。

5. 求下列几何体的体积：

(1) 正椭圆台：上底是长半轴为a、短半轴为b的椭圆，下底是长半轴为A、短半轴为B的椭圆（$A > a, B > b$），高为h；

(2) 椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$；

(3) 直圆柱面$x^2 + y^2 = a^2$和$x^2 + z^2 = a^2$所围的几何体；

(4) 球面$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$和直圆柱面$x^2 + y^2 = ax$所围的几何体。

6. 证明以下旋转体的体积公式：

(1) 设$f(x) \ge 0$是连续函数，由$0 \le a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)$所表示的区域绕$y$轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)dx\text{；}$$

(2) 在极坐标下，由$0 \le \alpha \le \theta \le \beta \le \pi,\ 0 \le r \le r(\theta)$所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta\text{。}$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积：

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，绕$x$轴；

(2) $y = \sin x$，$y = 0$，$0 \le x \le \pi$，

① 绕x轴， ② 绕y轴；

(3) 星形线$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$，绕x轴；

(4) 旋轮线$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$， $y = 0$，

① 绕y轴， ② 绕直线$y = 2a$；

(5) $x^2 + (y-b)^2 = a^2$，（$0 < a \le b$），绕x轴；

(6) 心脏线$r = a(1-\cos\theta)$，绕极轴；

(7) 对数螺线$r = a\,\mathrm{e}^\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$，绕极轴；

(8) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$，绕$x$轴。

8. 将抛物线$y = x(x-a)$与$y = 0$所界区域在$x \in [0,a]$和$x \in [a,c]$的部分分别绕x轴旋转一周后，所得到旋转体的体积相等，求c与a的关系。

9. 记$V(\xi)$是曲线$y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$与$y = 0$所界区域在$x \in [0,\xi]$的部分绕$x$轴旋转一周所得到的旋转体的体积，求常数$a$使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi)。$$

10．将椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转一周围成一个旋转椭球体，再沿 x 轴方向用半径为 r（$r<b$）的钻头打一个穿心的圆孔，剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半，求 r 的值。

11．设直线 $y=ax$（$0<a<1$）与抛物线 $y=x^2$ 所围成的图形的面积为 S_1，且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2。

1） 试确定 a 的值，使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

2） 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。

12． 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上大于零，并满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2 \quad（a \text{为常数}）。$$

进一步，假设曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2。

1） 求函数 $f(x)$；

2） 当 a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小？

13．求下列旋转曲面的面积：

⑴ $y^2=2px$，$0\le x\le a$，绕 x 轴；

⑵ $y=\sin x$，$0\le x\le \pi$，绕 x 轴；

⑶ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 x 轴；

⑷ 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\le t\le\pi$，绕 x 轴；

⑸ 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$，绕极轴；

⑹ 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$，

(i) 绕极轴，(ii) 绕射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$。

14．设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由该曲线、所作切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积。

15．证明由空间曲线

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[T_1,T_2] \\ z=z(t), \end{cases}$$

垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2} z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt，$$

这里假设 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上连续，且 $z(t)\ge 0$。

16．求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径。

（1） $xy=4$，在点 $(2,2)$；

（2） $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$（$a>0$），在 $t=\pi/2$ 对应的点。

17．求下列曲线的曲率和曲率半径。

（1） 抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）；

（2） 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$；

(3)　星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（$a>0$）；

(4)　圆的渐开线 $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t)$（$a>0$）。

18．求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率圆方程。

19．设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]\,(\subset[0,2\pi])$，且 $r(\theta)$ 二阶可导。证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

习　题　7.5

1. 一根 10 米长的轴，密度分布为 $\rho(x)=0.3x+6$ 千克/米（$0\le x\le 10$），求轴的质量。
2. 已知抛物线状电缆 $y=x^2$（$-1\le x\le 1$）上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比，在 $(1,1)$ 处的密度为 q，求此电缆上的总电量。
3. 水库的闸门是一个等腰梯形，上底 36 米，下底 24 米，高 16 米，水平面距上底 4 米，求闸门所受到的水压力（水的比重为 1000 千克/米^3）。
4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t, \quad t>0\ (a>0,b>0), \\ z=bt, \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比，试求其第一圈的质量。

5. 一个圆柱形水池半径 10 米，高 30 米，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。
6. 半径为 r 的球恰好没于水中，球的比重为 ρ，现在要将球吊出水面，最少要做多少功？
7. 半径为 r 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 绕其直径旋转，求它的动能。
8. 使某个自由长度为 1 米的弹簧伸长 2.5 厘米需费力 15 牛顿，现将它从 1.1 米拉至 1.2 米，问要做多少功？
9. 一物体的运动规律为 $s=3t^3-t$，介质的阻力与速度的平方成正比，求物体从 $t=1$ 运动至 $t=T$ 时阻力所做的功。
10. 半径为 1 米，高为 2 米的直立的圆柱形容器中充满水，拔去底部的一个半径为 1 厘米的塞子后水开始流出，试导出水面高度 h 随时间变化的规律，并求水完全流空所需的时间。（水面比出水口高 h 时，出水速度 $v=0.6\times\sqrt{2gh}$。）
11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器，才能使水流出时水面高度下降是匀速的。
12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比，设 t_0 时有镭 Q_0 克，经 1600 年它的量减少了一半，求镭的衰变规律。
13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比，设反应开始时有 B 物质 20%，半小时后有 B 物质 25%，求 B 物质的浓度的变化规律。
14. 设 $[t,t+dt]$ 中的人口增长量与 $p_{\max}-p(t)$ 成正比，试导出相应的人口模型，画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模型加以比较。
15. 核反应堆中，t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比。设 $N(0)=N_0$，证明 $\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1}=\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}$。
16. 一个 1000 米^{3}的大厅中的空气内含有 a %的废气，现以 1 米^3／分钟注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求 t 时刻空气内含有的废气浓度，并求使废气浓度减少一半所需的时间。

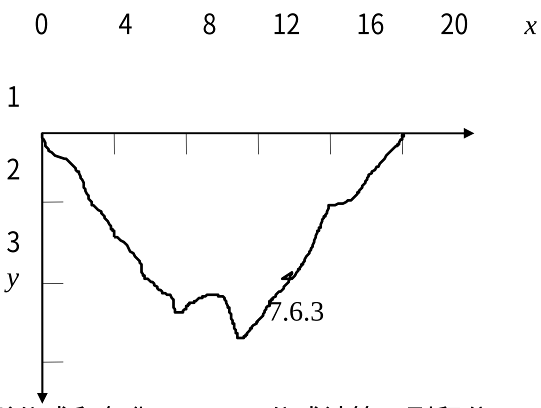
计 算 实 习 题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用 $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$，
   (1) 用普通的梯形公式、Simpson 公式和 Cotes 公式，计算圆周率 π 的近似值并与精确值加以比较；
   (2) 将区间 $[0,1]$ 分成 4、8 等份，用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 π 的近似值，并与精确值加以比较；
   (3) 用 Romberg 方法计算 π 的近似值，使它的精度达到 $O(10^{-8})$；
   (4) 分别用 $n = 1, 2, 4$ 的 Gauss-Legendre 公式计算 π 的近似值，并与前面的计算结果加以比较。
2. 设河面宽 20 米，从河的一岸向另一岸每隔 2 米测得的水深如下：(单位：米)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	0.6	1.4	2.0	2.3	2.1	2.5	1.9	1.2	0.7	0

求河流的横断面积(图 7.6.3)。



3. 分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算下列积分：
   (1) $\int_0^1 e^{x^2} dx$， $m = 16$；
   (2) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x} dx$， $m = 8$ （可看成连续函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的积分；）
   (3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$， $m = 8$；
   (4) $\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$， $m = 8$。
4. 用 Romberg 方法计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$，精确到小数点后第 8 位。
5. 用一般的积分区间上的 Gauss-Legendre 公式（取 $n = 4$）计算积分 $I(N) = \int_0^N e^{-x^2} dx$：
   (1) $N = 1$；
   (2) $N = 3$；
   (3) $N = 10$。

   并与

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   的结果相比较。

6. 按第 3 题⑵同样的观点，计算 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad (x=\frac{k\pi}{3},\ k=1,2,\cdots 6)$，并作出 $f(x)$ 的大致图形。