习　题 4.1

1. 半径为 1 厘米的铁球表面要镀一层厚度为 0.01 厘米的铜，试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克？（铜的密度为 8.9 克/立方厘米。）

2. 用定义证明，函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中，除了 $x=0$ 这一点之外都是可微的。

习　题 4.2

1．设 $f'(x_0)$ 存在，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$。

2．(1) 用定义求抛物线 $y=2x^2+3x-1$ 的导函数；

(2) 求该抛物线上过点 $(-1,-2)$ 处的切线方程；

(3) 求该抛物线上过点 $(-2,1)$ 处的法线方程；

(4) 问该抛物线上是否有点 (a,b)，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行？

3．设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且在 $x=0$ 的某个邻域上成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小。求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程。

4． 证明：从椭圆的一个焦点发出的任一束光线，经椭圆反射后，反射光必定经过它的另一个焦点（图 4.2.5）。

5． 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为 $2a^2$。

6． 求函数在不可导点处的左导数和右导数。

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=\sqrt{1-\cos x}$；

(3) $y=\mathrm{e}^{-|x|}$；　　(4) $y=|\ln(x+1)|$.

7．讨论下列函数在 $x=0$ 处的可导性：

(1) $y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\frac{1}{x},(a>0) & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　(2) $y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\le 0;\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases} x\,\mathrm{e}^{x}, & x>0, \\ ax^2, & x\le 0; \end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{a}{x^2}}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

8． 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在什么情况下，$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导？

9．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $f_+'(a)\cdot f_-'(b)>0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 至少存在一个零点。

10．设 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内可导，

⑴ 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=\infty$ ？

⑵ 若 $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ ？

11．设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$。证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时成立 $f'(0)=g(0)$。

习　　题　4.3

1. 用定义证明 $(\cos x)'=-\sin x$。

2. 证明：

⑴ $(\csc x)'=-\cot x\csc x$；　　⑵ $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

⑶ $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　⑷ $(\operatorname{arc\,cot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$；

⑸ $(\operatorname{ch}^{-1} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；　　⑹ $(\operatorname{th}^{-1} x)'=(\operatorname{cth}^{-1} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$

3. 求下列函数的导函数：

⑴ $f(x)=3\sin x+\ln x-\sqrt{x}$；　　⑵ $f(x)=x\cos x+x^2+3$；

⑶ $f(x)=(x^2+7x-5)\sin x$；　　⑷ $f(x)=x^2(3\tan x+2\sec x)$；

⑸ $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x-4\cos x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}$；　　⑹ $f(x)=\dfrac{2\sin x+x-2^x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

⑺ $f(x)=\dfrac{1}{x+\cos x}$；　　⑻ $f(x)=\dfrac{x\sin x-2\ln x}{\sqrt{x}+1}$；

⑼ $f(x)=\dfrac{x^3+\cot x}{\ln x}$； ⑽ $f(x)=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$；

⑾ $f(x)=(\mathrm{e}^x+\log_3 x)\arcsin x$； ⑿ $f(x)=(\csc x-3\ln x)x^2\operatorname{sh} x$；

⒀ $f(x)=\dfrac{x+\sec x}{x-\csc x}$； ⒁ $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{\arctan x}$；

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在 $(\mathrm{e},1)$ 处的切线方程和法线方程。

5. 当 a 取何值时，直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切，切点在哪里？

6. 求曲线 $y=x^n$ （$n\in\mathbf{N}^+$）上过点 $(1,1)$ 的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_n，并求出极限 $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)$。

7. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$，设集合

$\mathrm{S}_1=\{(x,y)|$过(x,y)可以作该抛物线的两条切线$\}$；

$\mathrm{S}_2=\{(x,y)|$过(x,y)只可以作该抛物线的一条切线$\}$；

$\mathrm{S}_3=\{(x,y)|$过(x,y)不能作该抛物线的切线$\}$，

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件。

8. ⑴ 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处不可导,证明 $c_1 f(x)+c_2 g(x)$ 在 $x=x_0$ 处也不可导。

⑵ 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处都不可导，能否断定 $c_1 f(x)+c_2 g(x)$ 在 $x=x_0$ 处一定可导或一定不可导？

9. 在上题的条件下，讨论 $f(x)g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的可导情况。

10．设 $f_{ij}(x)$（$i,j=1,2,\cdots,n$）为同一区间上的可导函数，证明

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}。$$

习　　题　4.4

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$；

(4) $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$；

(5) $y=\sin x^3$；

(6) $y=\cos\sqrt{x}$；

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{x+1})$；

(8) $y=\arcsin(\mathrm{e}^{-x^2})$；

(9) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(10) $y=\dfrac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$；

(11) $y=\dfrac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$；

(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$；

(13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$；

(14) $y=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}$；

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\sin x$；

(2) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\dfrac{x}{a}\right)$；

(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

(5) $y=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

3. 设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $f(\sqrt[3]{x^2})$；

(2) $f\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

(3) $\sqrt{f(x)}$；

(4) $\arctan f(x)$；

(5) $f(f(e^{x^2}))$；

(6) $\sin(f(\sin x))$；

(7) $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$；

(8) $\dfrac{1}{f(f(x))}$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=x^{x}$；

(2) $y=\left(x^{3}+\sin x\right)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\cos^{x} x$；

(4) $y=\ln^{x}(2x+1)$；

(5) $y=x\dfrac{\sqrt{1-x^{2}}}{\sqrt{1+x^{3}}}$；

(6) $y=\prod_{i=1}^{n}(x-x_{i})$；

(7) $y=\sin x^{\sqrt{x}}$.

5. 对下列隐函数求$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $y=x+\arctan y$；

(2) $y+x\mathrm{e}^{y}=1$；

(3) $\sqrt{x-\cos y}=\sin y-x$；

(4) $xy-\ln(y+1)=0$；

(5) $e^{x^{2}+y}-xy^{2}=0$；

(6) $\tan(x+y)-xy=0$；

(7) $2y\sin x+x\ln y=0$；

(8) $x^{3}+y^{3}-3axy=0$.

6. 设所给的函数可导，证明：

(1) 奇函数的导函数是偶函数；偶函数的导函数是奇函数；

(2) 周期函数的导函数仍是周期函数。

7．求曲线$xy+\ln y=1$在$M(1,1)$点的切线和法线方程。

8. 对下列参数形式的函数求$\dfrac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases}x=at^{2},\\ y=bt^{3};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=1-t^{2},\\ y=t-t^{3};\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t^{2}\sin t,\\ y=t^{2}\cos t;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x=a\mathrm{e}^{-t},\\ y=b\mathrm{e}^{t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=a\cos^{3}t,\\ y=a\sin^{3}t;\end{cases}$

(6) $\begin{cases}x=\operatorname{sh}at,\\ y=\operatorname{ch}bt;\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t},\\ y=\dfrac{t-1}{t};\end{cases}$

(8) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$

(9) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t, \\ y = \mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t; \end{cases}$ (10) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t. \end{cases}$

9．求曲线 $x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^3}$， $y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程。

10．设方程 $\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1, \\ t\sin y - y + \dfrac{\pi}{2} = 0. \end{cases}$ 确定 y 为 x 的函数，其中 t 为参变量，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 。

11. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于 a。

12．设函数 $u = g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续， $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处连续。请举例说明，

在以下情况中，复合函数 $y = f(g(x))$ 在 $x = x_0$ 处并非一定不可导：

⑴ $u = g(x)$ 在 x_0 处可导，而 $y = f(u)$ 在 u_0 处不可导；

⑵ $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导，而 $y = f(u)$ 在 u_0 处可导；

⑶ $u = g(x)$ 在 x_0 处不可导， $y = f(u)$ 在 u_0 处也不可导。

13．设函数 $f(u)$， $g(u)$ 和 $h(u)$ 可微，且 $h(u) > 1$， $u = \varphi(x)$ 也是可微函数，利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分：

⑴ $f(u)g(u)h(u)$； ⑵ $\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$；

⑶ $h(u)^{g(u)}$； ⑷ $\log_{h(u)} g(u)$；

⑸ $\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$； ⑹ $\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u) + h^2(u)}}$.

习　　题 4.5

1. 求下列函数的高阶导数：

(1) $y=x^3+2x^2-x+1$, 求 y'''； (2) $y=x^4\ln x$，求 y''；

(3) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$，求 y''； (4) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$，求 y''；

(5) $y=\sin x^3$，求 y''、 y'''； (6) $y=x^3\cos\sqrt{x}$，求 y''、 y'''；

(7) $y=x^2\mathrm{e}^{3x}$，求 y'''； (8) $y=\mathrm{e}^{-x^2}\arcsin x$，求 y''；

(9) $y=x^3\cos 2x$，求 $y^{(80)}$； (10) $y=(2x^2+1)\operatorname{sh}x$，求 $y^{(99)}$.

2. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y=\sin^2\omega x$； (2) $y=2^x\ln x$；

(3) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$； (4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$； (6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

3. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\ge 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

的各阶导数。

4．设 $f(x)$ 任意次可微，求

(1) $[f(x^2)]'''$； (2) $\left[f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]''$；

(3) $[f(\ln x)]''$； (4) $[\ln f(x)]''$；

(5) $[f(e^{-x})]'''$； (6) $[f(\arctan x)]''$.

5．利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$：

(1) $y=\arctan x$，（提示：$y'(1+x^2)=1$）；

(2) $y=\arcsin x$，（提示：$xy'=(1-x^2)y''$）.

6． 对下列隐函数求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $e^{x^2+y}-x^2y=0$；　(2) $\tan(x+y)-xy=0$；

(3) $2y\sin x+x\ln y=0$；　(4) $x^3+y^3-3axy=0$.

7．对下列参数形式的函数求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=at^2, \\ y=bt^3, \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=at\cos t, \\ y=at\sin t, \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=a\,\mathrm{e}^{-t}, \\ y=b\,\mathrm{e}^{t}, \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t}, \\ y=\sqrt{1-t}, \end{cases}$　(6) $\begin{cases} x=\sin at, \\ y=\cos bt. \end{cases}$

8．利用反函数的求导公式$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$，证明

(1) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　(2) $\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

9．求下列函数的高阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求d^2y；　(2) $y=x^4\,\mathrm{e}^{-x}$，求d^4y；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求$d^2y$；　(4) $y=\dfrac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求$d^2y$；

(5) $y=x\sin 3x$，求d^3y；　(6) $y=x^x$，求d^2y；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求d^ny；　(8) $y=x^n\cos 2x$，求d^ny.

10．求$d^2(\mathrm{e}^x)$，其中

(1) x是自变量;　(2) $x=\varphi(t)$是中间变量.

11．设$f(u)$，$g(u)$任意次可微，且$g(u)>0$。

(1) 当$u=\tan x$时，求d^2f；

⑵ 当 $u=\sqrt{v}$ 、 $v=\ln x$ 时，求 $d^2 g$ ；

⑶ $d^2[f(u)g(u)]$ ； ⑷ $d^2[\ln g(u)]$ ；

⑸ $d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]$ ；

12.利用数学归纳法证明：

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}。$$