

文章编号: 1003-207(2014)07-0001-09

基于贝叶斯 Wishart 波动模型的原油市场 与股市动态相依性研究

朱慧明, 彭成, 游万海, 邓超

(湖南大学工商管理学院, 湖南长沙 410082)

摘要: 针对时变相关系数矩阵在多变量随机波动模型的估计问题, 构建了贝叶斯动态相关 Wishart 波动模型。在 CC-MSV 模型的基础上, 设置精度矩阵服从 Wishart 分布, 使得模型的相关系数矩阵具有时变特征。通过模型的统计结构分析, 选择参数先验分布, 设计相应的 Gibbs-MTM-ARMS 混合算法, 据此估计模型参数; 并利用上证综合指数、标普 500 指数与原油期货价格数据进行实证分析。研究结果表明: 模型能够有效地刻画原油市场与股票市场的动态相依性; 金融危机期间, 股票市场与原油市场的相关性较强, 并且难以判断正负方向; 金融危机后, 中国股票市场与原油市场呈现极微弱的相关性, 而美国股票市场与原油市场的正相关性较为明显。

关键词: 动态相依性; 随机波动; 贝叶斯分析; Wishart 分布; Gibbs-MTM-ARMS 混合算法

中图分类号: F224 **文献标识码:** A

1 引言

原油作为基础的能源和化工原料, 是最主要的生产要素之一, 在经济与金融发展中发挥着重要的作用。股票市场是经济发展水平的重要标志, 研究国际原油市场与股票市场的关系无论是从国家能源安全, 还是从风险防范、资源配置角度都具有重要的理论意义与现实意义。随着世界经济对原油依赖性越来越强, 原油市场与股票市场的关系也日益成为学者们关注的焦点问题^[1-7]。金融资产收益率与收益率的波动是金融市场两个基本的概念。目前, 大量文献主要从收益的视角研究原油市场与股票市场之间的相关性, 如 Park 和 Ratti^[8] 利用多元向量自回归模型发现油价对股票市场具有显著的影响; Miller 和 Ratti^[9] 运用协整向量误差相关模型发现原油价格波动与 OECD 国家的股票市场收益是负相关的。同样的, 收益率的波动性作为体现金融市场质量与效率的有效指标, 直接影响着市场的不确定性与风险, 描述原油市场与股票市场的波动率特

征, 测度波动率的大小及刻画它们的动态特征也具有极为重要的理论与实际意义。因此, 从波动模型的角度研究原油市场与股票市场的联系也越来越受到青睐, 如姬强和范英^[10] 利用动态条件相关的多元 GARCH 模型, 分析美国次信贷危机发生前后国际原油市场和中、美股票市场间的协动性; Vo^[11] 利用常数相关和动态相关多变量随机波动模型研究美国股票市场与原油市场之间的相关性。多元 GARCH 模型与多变量随机波动模型在考虑波动方程时均假设变量的波动仅受到前期同一变量影响, 在一定程度上限制了模型的解释能力。Philipov 和 Glickman^[12]、Asai^[13] 等人则通过设置精度矩阵服从 Wishart 分布, 解决了这一问题, 使得模型的适应性更加广泛。

估计和预测多变量金融时间序列的相关系数是进行最优投资组合选择, 管理风险, 预测 VaR 等金融市场活动中一个极为重要的环节。为了估计和预测时变性的相关系数, 学者们主要构建了三种波动模型: 多变量 GARCH 模型^[14]、多变量随机波动 (Multivariate Stochastic Volatility, MSV) 模型^[15] 和多变量 Wishart 波动模型^[16-18]。在实际经济问题分析中, 变量的协方差阵是不可直接观察的, GARCH 类模型利用前期已知信息进行测度, 多变量随机波动 (Multivariate Stochastic Volatility, MSV) 模型则将其视为内在的潜状态变量。Bau-

收稿日期: 2013-07-16; 修订日期: 2014-02-19

基金项目: 国家自然科学基金项目 (71221001, 71031004, 7171075); 教育部博士点基金项目 (201101611110025); 湖南省自然科学基金项目 (11JJ3090)

作者简介: 朱慧明 (1966-), 男 (汉族), 湖南湘潭人, 湖南工商大学管理学院, 教授, 博士生导师; 研究方向: 贝叶斯计量经济模型。

wens 和 Laurent^[19]指出 GARCH 类模型面临维数诅咒难题; Asai 等人^[15]构建多变量随机波动模型的贝叶斯 MCMC 算法,减少了参数个数。然而,它们的波动方程仅仅考虑变量各自的时序影响,而忽略了变量之间的相互影响。变量之间的波动溢出效应以均值方程为媒介间接体现的,而未直接反映在波动方程。Wishart 波动模型^[16-18]设置收益率序列的协方差阵服从 Wishart 过程,使得模型波动方程直接受到自身与其他变量的前期波动的影响,从而体现变量之间的波动溢出效应,进而研究多个变量之间的波动与风险特征。

为了估计原油市场与股票市场的动态相关系数,构建了动态相关 Wishart 多变量随机波动模型,设计 Gibbs-MTM-ARMS 混合抽样的 MCMC 数值计算方法对模型参数进行估计;并且,利用国际原油期货价格(WTI)、上证综合指数(SSECI)和标普 500 指数(S&P500)进行实证分析,刻画原油市场中、美股票市场各自的波动特征以及它们之间动态相依性。

2 贝叶斯动态多变量 Wishart 随机波动模型的构建

2.1 动态多变量 Wishart 随机波动模型

多变量随机波动模型可以看作是一种对多变量 ARCH/GARCH 类模型的扩展。它通过对资产收益波动加入一个随机干扰项,使波动与收益的变化同时具有随机不确定性。考虑常数相关多变量随机波动(Constant Correlation MSV, CC-MSV)模型:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \Omega_t \varepsilon_t, \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, P_\varepsilon) \\
 \Omega_t &= \text{diag}\{\exp(0.5h_{1t}), \exp(0.5h_{2t}), \dots, \exp(0.5h_{nt})\} \\
 h_{t+1} &= \mu + \text{diag}(\varphi_{11}, \varphi_{22}, \dots, \varphi_{nn})(h_t - \mu) + \eta_t
 \end{aligned} \tag{1}$$

此处, $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{nt})'$ 表示 n 种资产在 t 时刻的收益,相关系数矩阵为 $P_\varepsilon = (\rho_{ij})_{n \times n}$ 是常数矩阵(对角线元素为 1,即 $\rho_{ii} = 1$)。潜在的状态变量 $h_t = (h_{1t}, h_{2t}, \dots, h_{nt})'$ 和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)'$ 均表示 $n \times 1$ 维的向量,并且指定 $h_0 = \mu$ 。第一个等式描述收益的变化特征,称为收益方程;第三个等式称为波动方程,描述收益的波动特征, $\eta_t \sim N(0, \text{diag}(\sigma_{\eta 1}^2, \sigma_{\eta 2}^2, \dots, \sigma_{\eta n}^2))$ 为随机扰动项。CC-MSV 模型能够有效的估计协方差矩阵 $\text{Var}(y_t) = \Sigma_t = (\sigma_{ij,t})$,刻画潜在的波动特征,但是不能体现金融收

益序列时变的相关系数特征,而在一定程度上限制了它的应用。

为了得到收益序列的动态相关系数矩阵,Engle^[20]提出了动态条件相关(Dynamic Conditional Correlation, DCC)模型,分析多变量 GARCH 模型中相关系数矩阵的动态行为。假设 $D_t = \text{diag}\{\sigma_{11,t}^{1/2}, \sigma_{22,t}^{1/2}, \dots, \sigma_{nn,t}^{1/2}\}$ 为收益向量在 t 时刻的协方差矩阵,则动态相关系数矩阵 $P_t = (\rho_{i,j})_{n \times n}$ 为:

$$P_t = D_t^{-1} \Sigma_t D_t^{-1} \tag{2}$$

显然, t 时刻收益向量的协方差阵为 $\Sigma_t = D_t P_t D_t$ 。若协方差阵 Σ_t 是正定的,存在精度矩阵 $\Phi_t = \Sigma_t^{-1}$,且假设 Φ_t 服从自由度为 ν ,尺度矩阵为 S_{t-1} 的 Wishart 分布,那么,构建 DC-W-MSV 模型:

$$\begin{aligned}
 \Phi_t &| \nu, S_{t-1} \sim \text{Wishart}_n(\nu, S_{t-1}) \\
 S_t &= \frac{1}{\nu} \sum_{i=0}^d \Phi_t^{l_i} M_i \Phi_t^{l_i}
 \end{aligned} \tag{3}$$

此处, Wishart 表示 Wishart 分布, $\Phi_t^{l_i}$ 表示矩阵 Φ_{t-i} 的特征值分解, M_i 是对称正定矩阵, l_i 表示尺度参数, d 表示滞后阶数。因为精度矩阵 $\Phi_t \sim \text{Wishart}_n(\nu, S_{t-1})$,所以协方差阵 $\Sigma_t = \Phi_t^{-1} \sim i\text{Wishart}_n(\nu, S_{t-1}^{-1})$ ($i\text{Wishart}$ 是逆 Wishart 分布)。根据逆 Wishart 分布的性质,可以推导协方差阵的条件期望:

$$E(\Sigma_t | \nu, S_{t-1}) = (\nu - n - 1) - 1S_{t-1}^{-1} \tag{4}$$

显然,参数 d 和 $\Theta = \{\nu, l_{0,d}, M_{0,d}\}$ 决定了协方差矩阵的动态行为。 M_i 衡量了协方差矩阵的跨期敏感度,反映协方差受到前期的影响。 ν 的大小决定 Φ_t 估计值的离散程度。滞后阶数 d 表明 Σ_t 的持续效应。 l_i 揭示了协方差跨期关系的强度,称为持久参数。 l_i 越接近 0,当期波动对未来资产回报的波动影响越小; l_i 越接近 1,影响越大; $l_i > 1$ 表明波动结构是非平稳的。

2.2 模型参数的贝叶斯后验推断

多变量随机波动模型中因为包含不可观测的隐波动变量,导致难以表达精确的似然函数形式,使得估计潜在状态变量和参数都极为困难。MCMC 算法因为处理高维积分问题方面的独特优势,成为时变波动模型中应用最广泛的方法。

按照前文的分析,分为两个阶段估计模型中的相关系数矩阵 $\{P_t\}$:

(1) 估计 CC-MSV 模型中的参数 $(\hat{\mu}, \hat{\varphi}_{ii}, \hat{\sigma}_{\eta_i})$, $i = 1, 2, \dots, n$ 和潜在的状态变量 $\{\hat{h}_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$; 令 $\gamma_{it} = y_{it} \exp(-\hat{h}_{it}/2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 进行滤

波,做标准化处理,此处 \hat{h}_u 是后验均值。

(II) 令 $\gamma_t = (\gamma_{1t}, \gamma_{2t}, \dots, \gamma_{mt})' \sim N(0, P_t)$, 同时结合模型 (3), 从而估计参数 Θ 和动态相关系数矩阵 $\{P_t\}$, $t = 1, 2, \dots, T$ 。

CC-MSV 模型的 MCMC 算法设计参考文献 [15], 下文主要讨论如何设计步骤 (II) 的 MCMC 算法。记 $A_{r,m} = \{A_r, A_{r+1}, \dots, A_m\}$, 给定 P_t 的条件下, γ_t 服从均值向量为 0 和协方差为 P_t 的多元正态分布; 而给定参数 Θ 和 $\Phi_{1,t-1}$ 的条件下, Φ_t 服从自由度为 v , 尺度矩阵为 S_{t-1} 的 Wishart 分布。那么, $\gamma_{1:T}$ 和 $\Phi_{1:T}$ 的联合密度函数为边缘似然函数与潜变量 $\Phi_{1:T}$ 的密度函数之积, 即:

$$\pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T} \mid \Theta) \propto \prod_{t=1}^T |P_t|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\gamma_t' P_t \gamma_t)\right\} \times \frac{|S_{t-1}^{-1}|^{v/2} |\Phi_t|^{(v-n-1)/2}}{2^{vn/2} \Gamma_n(v/2)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\text{tr}(S_{t-1}^{-1} \Phi_t)\right\} \quad (5)$$

那么, 模型的似然函数为一个高维积分过程:

$$L(\gamma_{1:T} \mid \Theta) \propto \int \pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T} \mid \Theta) d\Phi_{1:T}$$

它的具体形式难以获得, 使得极大似然法难以实现。在贝叶斯理论的框架下, 参数 Θ 与潜变量 $\Phi_{1:T}$ 的后验联合分布 $\pi(\Phi_{1:T}, \Theta \mid \gamma_{1:T})$ 可以利用 MCMC 抽样方法进行模拟, 因此可以将参数空间扩展为包括潜变量在内的新的参数空间, 从而估计模型参数和潜变量, 因此问题转化为从完全条件后验分布 $\pi(\Phi_{1:T} \mid \Theta, \gamma_{1:T})$ 与 $\pi(\Theta \mid \Phi_{1:T}, \gamma_{1:T})$ 中抽取随机样本。从式 (5) 中可以看出, 模型参数 Θ 只与 $\pi(\Phi_{1:T} \mid \Theta)$ 有关, 因此, 可以独立地推断它的完全条件后验密度函数; 而推导 $\{\Phi_t\}$ 的完全条件后验密度需要考虑相关系数矩阵 P_t 。

定理 1 参数 Θ 和潜变量 $\Phi_{1:T}$ 的后验联合分布正比于联合密度函数 $\pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T} \mid \Theta)$ 与参数先验分布 $\pi(\Theta)$ 之积, 且

$$\pi(\Phi_{1:T}, \Theta \mid \gamma_{1:T}) \propto \pi(\gamma_{1:T} \mid \Phi_{1:T}) \pi(\Phi_{1:T} \mid \Theta) \pi(\Theta) \quad (6)$$

证明: 参数 Θ 和潜变量 $\Phi_{1:T}$ 的后验联合分布:

$$\pi(\Phi_{1:T}, \Theta \mid \gamma_{1:T}) = \frac{\pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T}, \Theta)}{\int \pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T}, \Theta) d\Phi_{1:T} d\Theta}$$

显然, $\int \pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T}, \Theta) d\Phi_{1:T} d\Theta$ 是与 Θ 和 $\Phi_{1:T}$

无关的常数因子, 因此:

$$\pi(\Phi_{1:T}, \Theta \mid \gamma_{1:T}) \propto \pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T} \mid \Theta) \propto \pi(\gamma_{1:T}, \Phi_{1:T} \mid \Theta) \pi(\Theta) = \pi(\gamma_{1:T} \mid \Phi_{1:T}) \pi(\Phi_{1:T} \mid \Theta) \pi(\Theta)$$

证毕。

为了进行贝叶斯分析, 需要设置模型参数 Θ 的先验分布。根据 Philipov 和 Glickman^[12], Asai 和 McAleer^[13] 等人的观点, 模型参数先验分布的设置如下:

$$\begin{aligned} \pi(M_i) &\sim iWishart_n(f_{M_i,0}, (f_{M_i,0} - n - 1)I_n); \\ \pi(l_i) &\propto 1; \pi(v - n) \sim Gamma(\alpha_v, \beta_v) \end{aligned} \quad (7)$$

此处, $Gamma$ 表示伽玛分布。因为 Wishart 分布中, 自由度 v 必须大于尺度矩阵的维数 n , 所以设置 $v - n$ 的先验分布为伽玛分布, 从而保证 $v > n$ 。同样, 为了满足矩阵参数 M_i 的对称正定性, 这里选择逆 Wishart 分布作为先验分布, 当 $d = 0$ 时, 逆 Wishart 分布是共轭先验。 l_i 设置为扩散先验, 使得对 l_i 可能的取值具有相等概率。

下面给出参数 Θ 和潜在状态变量 Φ_t 的后验完全条件密度函数的具体形式, 进而设计 MCMC 抽样算法, 估计模型参数。

定理 2 潜在状态变量 Φ_t 的完全条件后验密度函数为:

$$\pi(\Phi_t \mid \Phi_{1:t-1}, \Phi_{t+1:T}, \gamma_{1:T}, \Theta) \propto |P_t^{-1}|^{1/2} |\Phi_t|^{(v-n-1)/2} \times \exp\left\{-\left(\gamma_t' P_t^{-1} \gamma_t + \Delta(\Phi_t)\right)/2\right\} \quad (8)$$

此处:

$$\begin{aligned} \Delta(\Phi_t) &= v \sum_{k=t+1}^T \log(|S_{k-1}^{-1}|) - \sum_{k=t}^T \text{tr}(S_{k-1}^{-1} \Phi_k) \\ \gamma &= \min\{t + d + 1, T\}. \end{aligned}$$

证明: 根据定理 1, 可知 Φ_t 的完全条件后验密度函数:

$$\begin{aligned} \pi(\Phi_t \mid \Phi_{1:t-1}, \Phi_{t+1:T}, \gamma_{1:T}, \Theta) &\propto \pi(\gamma_t \mid \Phi_t) \prod_{k=t}^T \\ \pi(\Phi_k \mid v, S_{k-1}) &\propto N(\gamma_t \mid P_t) \prod_{k=t}^T Wishart_n(\Phi_k \mid v, S_{k-1}) \end{aligned}$$

将上式化简即得定理 2 的结论。证毕。

根据 Φ_t 的条件后验密度函数进行抽样之前, 需要指定 $(\Phi_0, \Phi_{-1}, \dots, \Phi_{-d})$ 。采用 MTM (Multiple-Try Metropolis) 算法, 估计参数 Φ_t , 假设当前值为 $\Phi_t^{(r)}$, MTM 算法的具体步骤如下:

(1) 独立从分布 $\xi \sim Wishart_n(1/\Delta_{\Phi_t}, \Delta_{\Phi_t} I)$ 生成 $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$, 令:

$$\Phi_{t(i)} = (\Phi_t^{(r)})^{1/2} \xi_i (\Phi_t^{(r)})^{1/2}, i = 1, 2, \dots, k$$

此处, $(\Phi_t^{(r)})^{1/2}$ 是 $\Phi_t^{(r)}$ 的平方根阵。那么, $\Phi_{t(i)} \sim Wishart_n(1/\Delta_{\Phi_t}, \Delta_{\Phi_t} \Phi_t^{(r)})$ 即为 $\Phi_t^{(r)}$ 的建议分布, 令:

$$\lambda(\Phi_t^{(r)}, \Phi_{t(i)}) = (|\Phi_t^{(r)}| \cdot |\Phi_{t(i)}|) (n+1)/2b$$

为对称函数, 则:

$$\omega(\Phi_{t(i)}, \Phi_t^{(r)}) = \pi(\Phi_{t(i)} \mid \cdot) \pi(\Phi_t^{(r)} \mid \Phi_{t(i)}) \lambda(\Phi_t^{(r)}, \Phi_{t(i)})$$

$$\Phi_{i(i)} = |\Phi_{i(i)}|^{(n+1)/2} |\xi_i^{-1}|^{1/(2\Delta\Phi_i)} \exp\{-0.5\text{tr}(\xi_i^{-1})\} \tag{9}$$

(2) 随机地从 $\{\Phi_{i(1)}, \Phi_{i(2)}, \dots, \Phi_{i(k)}\}$ 按照比例 $\omega(\Phi_{i(i)}, \Phi_i^{(r)})$ 抽取候选值 Φ_i^* , 并令 $W_1 = \sum_{i=1}^k \omega(\Phi_{i(i)}, \Phi_i^{(r)})$.

(3) 按照步骤(1)生成 Φ_i^* 的参考集合(Reference Set) $\{\Phi_{i(1)}^*, \Phi_{i(2)}^*, \dots, \Phi_{i(k-1)}^*, \Phi_i^{(r)*}\}$, 注意集合中第 k 个元素为 Φ_i 的当前值; 并计算 $\omega(\Phi_{i(i)}^*, \Phi_i^{(r)*})$, 使得:

$$W_2 = \sum_{i=1}^k \omega(\Phi_{i(i)}^*, \Phi_i^{(r)*})$$

(4) $\Phi_i^{(r+1)} = \Phi_i^*$ 的接受概率为 $\rho = \min\{1, W_1/W_2\}$; 否则, $\Phi_i^{(r+1)} = \Phi_i^{(r)}$.

参数集 $\Theta = \{v, l_{0,d}, M_{0,d}\}$ 含有 $d+2$ 个实参数和 $d+1$ 个矩阵参数, 下面记 $M = M_{0,d}$.

推论 1 参数空间 $\Theta = \{v, l_{0,d}, M\}$ 的联合后验密度为:

$$\pi(v, l_{0,d}, M | \Phi_{1:T}) \propto \pi(\Phi_{1:T} | \Theta) \pi(v) \pi(l_{0,d}) \prod_{i=0}^d \pi(M_i) \tag{10}$$

证明: 略(可参考定理 2 的证明过程).

值得注意的是, 表达式(10)中参数 $\{v, l_{0,d}, M\}$ 的先验分布设置是相互独立的. 各参数的完全条件后验分布密度函数如下:

定理 3 参数 M 的完全条件后验密度为:

$$\pi(M | \Phi_{1:T}, v, l_{0,d}) \propto \prod_{i=1}^T \text{Wishart}_n(\Phi_i | v, S_{i-1}) \times \prod_{i=0}^d i\text{Wishart}_n(M_i | f_{M_0}, V_{M_0}) \tag{11}$$

证明: 略(可参考定理 2 的证明过程).

从表达式(11)可知, 参数难以直接进行抽样, 为此, 同样采用 MTM 对 M 进行抽样分析, 详细步骤参考参数 Φ_i 的抽样方法. 当 $d=0$ 时, M 的完全条件后验分布是自由度为 $vT + f_{M_0}$, 尺度矩阵为 $f_{M_0} I_n + v \sum_{i=1}^T \Phi_i^{-1/2} \Phi_i \Phi_i^{-1/2}$ 的逆 Wishart 分布, 可直接利用 Gibbs 抽样.

定理 4 自由度 v 的完全条件后验密度为:

$$\pi(v | \Phi_{1:T}, l_{0,d}, M) \propto \exp\{(\nu\Delta(v) + nvT \log(v) - T \log(\Gamma_n(v/2) + (\alpha_v - 1) \log(v - n)))/2\} \tag{12}$$

此处:

$$\Delta(v) = \sum_{i=1}^T (\log |W_{i-1}^{-1}| + \log | \Phi_i |) - nT \log 2 - \text{tr}(\sum_{i=1}^T W_{i-1}^{-1} \Phi_i) + 2/\beta_v$$

$$W_i = \sum_{i=0}^d M_i^{1/2} \Phi_{i-1}^i (M_i^{1/2})'$$

证明: 略(可参考定理 2 的证明过程).

定理 5 参数 $\{l_i\}, i=0, 1, 2, \dots, d$ 的完全条件

联合后验密度为:

$$\pi(l_{0,d} | \Phi_{1:T}, v, M) \propto \exp\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T v \ln |S_{i-1}^{-1}| - \text{tr}(S_{i-1}^{-1} \Phi_i)\} \tag{13}$$

证明: 略(可参考定理 2 的证明过程).

因为 v 和 $\{l_i\}, i=0, 1, 2, \dots, d$ 的条件后验分布的复杂性, 应用 ARMS(Adaptive Rejection Metropolis Sampling) 抽样方法, 从 v 和 $\{l_i\}, i=0, 1, 2, \dots, d$ 的条件后验分布进行抽样.

2.3 Gibbs-MTM-ARMS 混合抽样算法设计

根据 DCC-W-MSV 模型中参数的条件后验分布, 设计 Gibbs-MTM-ARMS 混合抽样的数值计算方法, 以此估计模型参数及置信区间. 记 $\{\Phi_{1:T}^{(0)}, M^{(0)}, l_{0,d}^{(0)}, v^{(0)}\}$ 为参数 $\{\Phi_{1:T}, M, l_{0,d}, v\}$ 的初始值; 假设 $\{\Phi_{1:T}^{(r)}, M^{(r)}, l_{0,d}^{(r)}, v^{(r)}\}$ 为第 r 次抽样的估计值, 则第 $(r+1)$ 次抽样的迭代步骤如下:

- (1) 利用 MCMC 算法, 估计 CC-MSV 模型中的参数, 并得到 DC-W-MSV 的样本数据 γ_i ;
- (2) 由 $\pi(\Phi_i | \Phi_{1:T-1}^{(r)}, \Phi_{i+1:T}^{(r)}, M^{(r)}, l_{0,d}^{(r)}, v^{(r)})$ 利用 MTM 抽样算法生成 $\Phi_i^{(r+1)}$;
- (3) 利用 MTM 算法, 从后验条件分布 $\pi(M | \Phi_{1:T}^{(r+1)}, v^{(r)}, l_{0,d}^{(r)})$ 抽取 $M^{(r+1)}$;
- (4) 由 $\pi(l_{0,d} | \Phi_{1:T}^{(r+1)}, M^{(r+1)}, v^{(r)})$ 利用 ARMS 算法抽取 $l_{0,d}^{(r+1)}$;
- (5) 由 $\pi(v | \Phi_{1:T}^{(r+1)}, M^{(r+1)}, l_{0,d}^{(r+1)})$ 利用 ARMS 算法抽取 $v^{(r+1)}$;
- (6) 重复步骤(2)~(5), 直至参数的后验条件分布为平稳分布.

3 实证分析

3.1 指标选取及统计特征分析

为了分析原油市场与股票市场的联系, 选取上证综合指数(SSECI)、标准普尔 500 指数(S&P500)和纽约商业交易所推出的轻质低硫原油(WTI)期货价格这三个指标, 在 2006 年 1 月 3 日至 2012 年 12 月 31 日的日收盘价作为样本. 舍去节假日差异等因素造成的缺失数据, 共有 1704 个样本, 其中, 上证指数和 S&P500 指数来源于雅虎金融数据库; 原油期货价格来源于 EIA 数据库. 数据的选取的跨度包含了美国“次贷危机”引发的全球金融危机和随后发生“欧债危机”; 在此期间, 原油价格波动也尤为剧烈. 收益序列: $R_{it} = 100(\ln(p_{i,t}) - \ln(p_{i,t-1}))$, R_{it} 表示收益率; $p_{i,t}$ 表示指标 i 在时刻 t 的收盘价. 各指标的时间趋势图和对数收益率时间图如下:

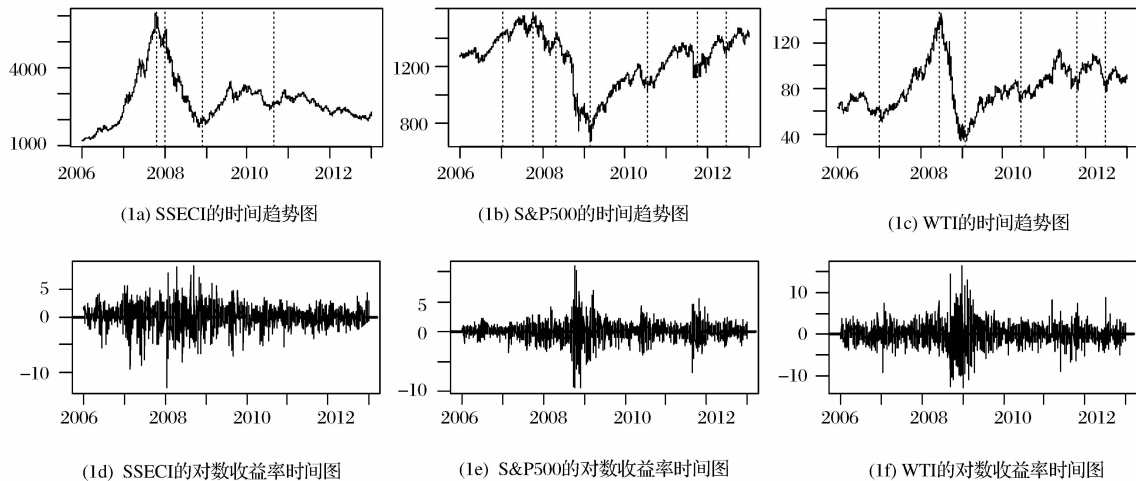


图 1 各指数与对数收益率时间图

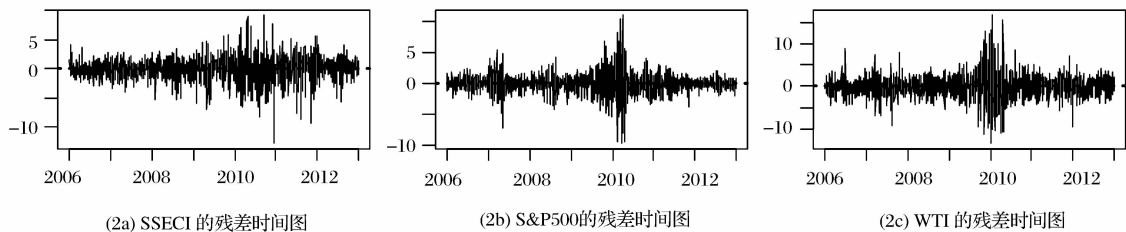


图 2 TAR(1)模型的残差时间图

从图 1 可知,各指标的收益率体现波动率聚集的性质,而且呈现明显的自相关和异方差性质。为了减弱趋势项及自相关性的影响,根据 Asai 等人^[13]的观点,采用门限自回归模型对收益序列进行处理,即:

$$R_{it} = \begin{cases} \alpha_{i,1} + \beta_{i,1}R_{i,t-1} + v_{it}, & R_{i,t-1} \leq \theta_i \\ \alpha_{i,2} + \beta_{i,2}y_{i,t-1} + v_{it}, & R_{i,t-1} > \theta_i \end{cases} \quad (14)$$

那么,残差 $\hat{v}_{it} = R_{it} - E(R_{it} | I_{i,t-1}) = R_{it} - \hat{R}_{it}$ 就是 CC-MSV 模型中均值方程的收益序列, $I_{i,t-1}$ 表示过去的信息集。残差估计如下:

从图 2 可知,残差出现大幅波动的时期是不同于对数收益率的,而且 SSEC 的残差波动比 S&P500 和 WTI 更加频繁。

3.2 CC-MSV 模型的 MCMC 估计

下面分别利用 SSEC 与 WIT、S&P500 与 WTI 经过处理的数据,构建二元 CC-MSV 模型。迭代次数设置为 30000 次,舍去初始 10000 次不平稳数据,同时为了减少链条自相关性,在剩余链条,每 2 个随机数只保留一个,实际用于分析的数据为 10000 个。模型估计结果如表 1 所示:

表 1 CC-MSV 模型参数的 MCMC 估计

参数	SSEC—WTI(模型 1)						S&P500—WTI(模型 2)					
	估计值	标准差	MC 误差	Q _{0.025}	Q _{0.975}	Z 值	估计值	标准差	MC 误差	Q _{0.025}	Q _{0.975}	Z 值
μ_1	0.8179	0.2172	0.0109	0.3825	1.2470	-0.9445	-0.0684	0.2911	0.0162	-0.6835	0.4697	-0.1906
μ_2	1.2140	0.2909	0.0214	0.5266	1.6860	1.0671	1.2390	0.3010	0.0226	0.4996	1.7230	-1.0201
φ_{11}	0.9826	0.0064	0.0004	0.9686	0.9937	-0.9562	0.9874	0.0047	0.0003	0.9770	0.9955	-1.8256
φ_{22}	0.9897	0.0043	0.0002	0.9807	0.9974	-1.1411	0.9881	0.0056	0.0004	0.9759	0.9970	1.0291
σ_{η_1}	0.1579	0.0221	0.0021	0.0922	0.1418	1.1051	0.1725	0.0198	0.0018	0.1413	0.2185	1.1661
σ_{η_2}	0.1151	0.0134	0.0012	0.0922	0.1418	1.3698	0.1274	0.0202	0.0019	0.0979	0.1710	-0.5155
ρ_{12}	0.1233	0.0244	0.0005	0.0760	0.1706	-0.9415	0.3605	0.0228	0.0011	0.3157	0.4049	-1.1692

此处, Q 表示分位点。从表 1 中可以看出, 各参数 MC 误差远小于标准差, 且 Geweke 统计量 (Z 值) 的绝对值小于 1.96, 在 95% 的置信水平下, 可判断迭代初的样本均值与迭代末的样本均值不存在显著性的差异, 抽样获得的 Markov 链是收敛的。

图 3a-3f 为 CC-MSV 模型中参数 φ_{11} 、 φ_{22} 和 ρ_{12} 的后验分布密度函数图。从图中可以看出, 各参数的边缘后验分布核密度估计的曲线平滑, 有明显的单峰对称特征, 说明参数贝叶斯估计值的误差非常小。CC-MSV 模型中, 波动率估计如图 4 所示:

从波动率估计图 4 可以看出, 两个模型对 WTI 波动率的估计无显著差异; SSECI 比 S&P500 和 WTI 的波动频率更大, WTI 的波动水平是最大的, S & P500 与 WTI 的波动具有周期性, 而 SSECI 表

现不明显, 这基本与门限自回归的残差图 2 吻合。在 CC-MSV 模型中, $\rho_{12}^{(1)} = 0.1233 > 0$, $\rho_{12}^{(2)} = 0.3605 > 0$ 且 $\rho_{12}^{(1)} < \rho_{12}^{(2)}$, 说明 (1) S&P500 与 WTI 的相关性要强于 SSECI 和 WTI 的相关性, 美国对石油的依赖大于中国导致原油价格波动对美国市场的影响要高于中国。(2) WTI 和 SSECI、S&P500 是正相关的, 但是 SSECI 表现不明显。从图 1 和图 4 中, 可以看出 S&P500 与 WTI 的波动具有协同性, 但是 SSECI 与 WTI 的波动则毫无规律。因此, 从静态角度研究 SSECI 与 WTI 之间的相关性是不全面的。

3.3 DC-W-MSV 模型 的 MCMC 估计

利用 2.2 中的步骤进行滤波, 获得标准化处理后的数据 γ_{it} , 构建 DC-W-MSV 模型 ($d = 1$), 估计

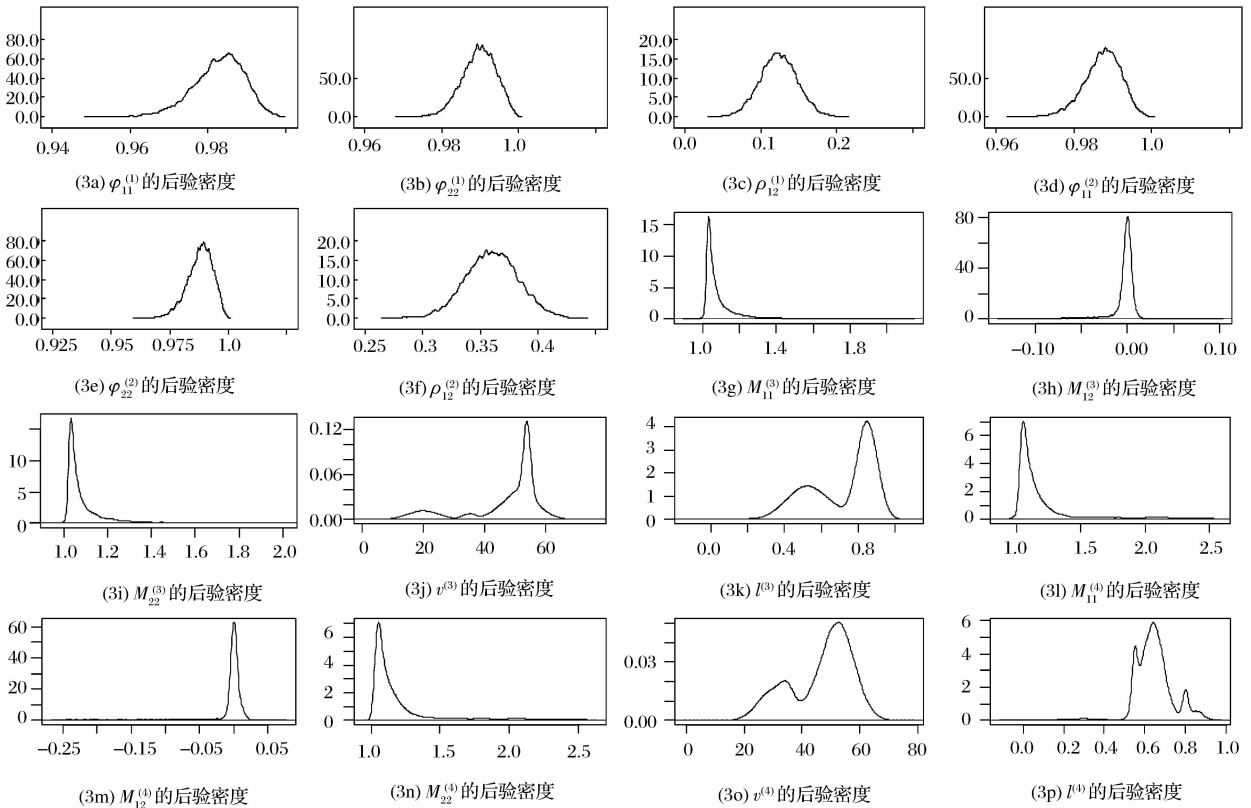


图 3 CC-MSV 模型与 DC-W-MSV 模型中各参数的后验密度图

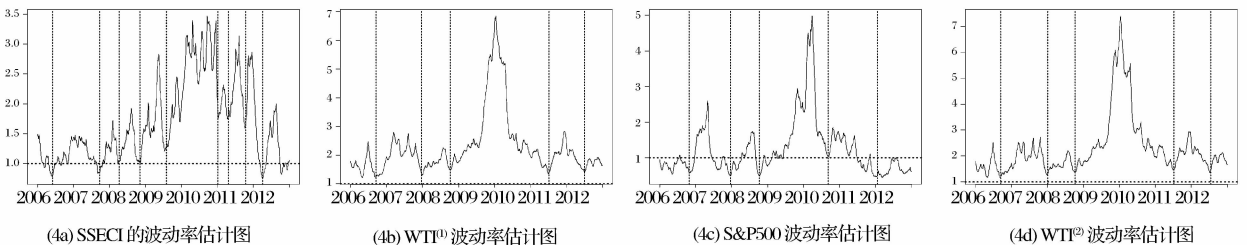


图 4 CC-MSV 模型的波动率估计图

动态相关系数。模型参数的 MCMC 估计结果如表 2 所示:

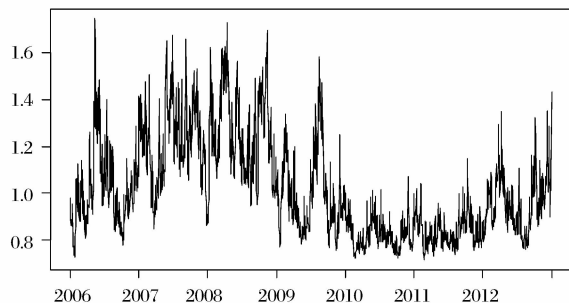
表 2 中,各参数 MC 误差远小于标准差, Geweke 统计量的绝对值也小于 1.96,因此,可判断抽样得到的链条是平稳收敛的。各参数的后验密度如图 3g-3p 所示,从图中可知,除了参数 $l^{(3)}$ 、 $v^{(4)}$ 和 $l^{(4)}$,其余参数的边缘后验分布核密度估计的曲线

平滑,有明显的单峰对称特征,说明参数贝叶斯估计值的误差非常小。而 $l^{(3)}$ 、 $v^{(4)}$ 和 $l^{(4)}$ 的后验密度图出现双峰,甚至三峰的情况,可能是因为数据具有多峰的特征。

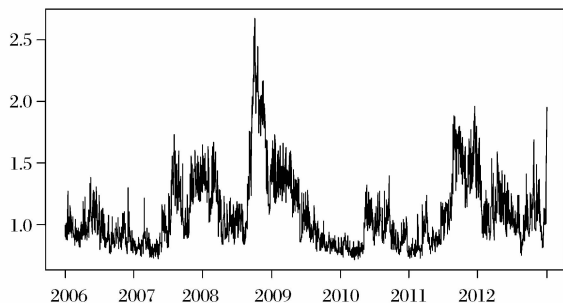
DC-W-MSV 模型中各指标的波动率(标准差)与动态相关系数图如下:

表 2 贝叶斯 DC-W-MSV 模型参数的 MCMC 估计

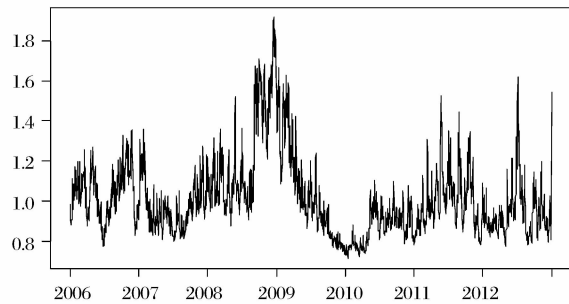
参数	模型 3(SSECI-WTI)						模型 4(S&P500-WTI)					
	估计值	标准差	MC 误差	$Q_{0.025}$	$Q_{0.975}$	Z 值	估计值	标准差	MC 误差	$Q_{0.025}$	$Q_{0.975}$	Z 值
M_{11}	1.1691	0.3267	0.0117	1.0193	2.2617	0.0096	1.2960	0.4694	0.0231	1.0590	1.2430	-0.7162
M_{12}	-0.0134	0.0470	0.0013	-0.1579	0.0094	-0.0397	-0.0701	0.1800	0.0075	-0.0113	0.0032	0.6436
M_{22}	1.1597	0.2930	0.0106	1.0210	2.1120	0.0183	1.3043	0.4699	0.0226	1.0583	1.2494	-0.5709
v	51.2806	12.5523	0.6146	15.1411	60.8500	1.4489	46.6200	10.8393	1.0276	24.0211	62.5954	0.6169
l	0.7111	0.1826	0.0197	0.3490	0.9365	1.9032	0.6418	0.1007	0.0263	0.4420	0.8542	0.1027



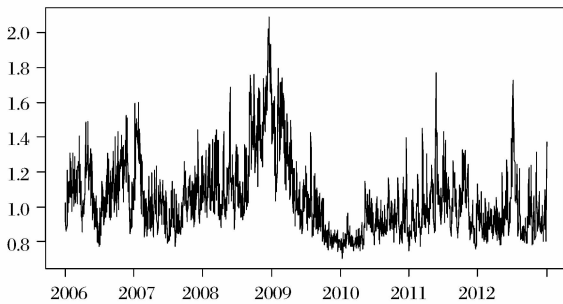
(5a) SSECI 的波动率估计图



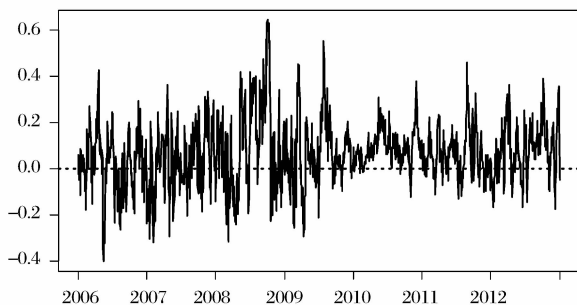
(5b) S&P500 的波动率估计图



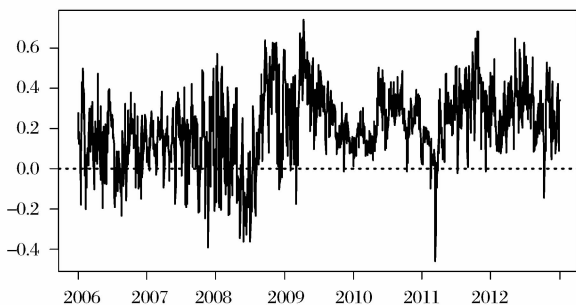
(5c) WTI 的波动率估计图



(5d) WTI 的波动率估计图



(5e) SSECI 与 WTI 的动态相关系数图



(5f) S&P500 与 WTI 的动态相关系数图

图 5 DC-W-MSV 模型的波动率及动态相关系数图

从图 5 中可以看出,DC-W-MSV 模型的波动率估计图能够很好地拟合的对数收益率时间图 1。

(1) SSECI 从 2005 年 6 月起开始上涨,并于 2007 年 10 月 16 日达到最高点 6124,随后一路下跌至 2008 年 10 月 28 日的最低 1664 点,之后触底反弹。

(2) 2007 年下半年美国次贷危机爆发,投资者开始对按揭证券的价值失去信心,引发流动性危机,直到 2008 年 9 月,这场金融危机开始失控,向全球蔓延,并导致多间相当大型的金融机构倒闭或被政府接管,从而引发了 2007 年至 2009 年的全球金融危机 S&P500 在此期间波动尤为剧烈。

(3) WTI 具有波动幅度大,起伏时间快的特征:国际原油价格自 2002 年开始进入单边爆发式上涨阶段,2006 年超过 60 美元/桶,2008 年 7 月更是达到 145 美元/桶的历史最高点;此后,受到美国“次贷危机”冲击,出现“断崖式”急跌,12 月份为 30.28 美元/桶,半年时间跌去 80%;紧接着,各国政府联合救市,全球经济缓慢复苏,原油价格又节节攀升,2011 年 2 月再次突破百元大关。

从动态相关系数图 5c 中看出,在世界金融危机期间,无论是 SSECI,还是 S&P500,与 WTI 的相关系数都比较大的(绝对值),说明在此期间原油市场与股票市场的相依性是比较强的,但是正负难以判断。金融危机后,SSECI 与 WTI 的相关系数较小,而 S&P500 与 WTI 在呈现明显的正相关性。从指

数(价格)的时间图 1 看出,在全球经济逐渐回暖,国内经济增长减缓的环境下,SSECI 一直表现低迷,而 S&P500 与 WTI 总体上表现上涨的趋势。

表 3 分析了 SSECI 与 WTI、S&P500 与 WTI 的动态相关系数的统计特征。从表中可知,SSECI 与 WTI 的相关性较小,而 S&P500 与 WTI 呈现正相关性。模型的动态相关系数分布图如下:

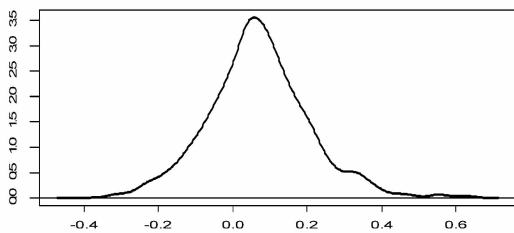
从图 8 可知,动态相关系数具有正态分布的性质。因此,可以利用正态分布的性质估计相关系数置信水平,进行风险管理。

4 结语

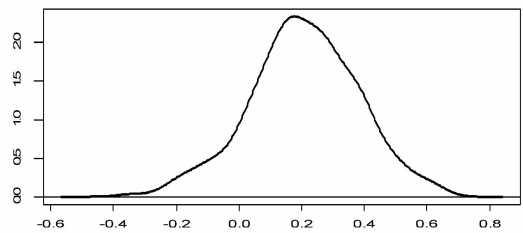
针对多变量随机波动模型中时变相关系数的估计问题,在 CC-MSV 模型的基础上,设置精度矩阵服从 Wishart 分布,构建了贝叶斯动态相关 Wishart 多变量随机波动(DC-W-MSV)模型,设计了 Gibbs-MTM-ARMS 混合抽样算法估计模型参数。利用国际原油价格(WTI)、上证综合指数(SSECI)和标普 500 指数(S&P500)进行原油市场与股票市场的动态相依性的实证分析。实证结果表明:模型能够有效刻画原油市场与股票市场的动态相依性。股票市场与原油市场的相关性在金融危机期间表现较强,并且难以判断正负方向;金融危机后,中国股票市场与原油市场相关性极为微弱,而美国股票市场与原油市场则表现较强的正相关性。

表 3 DC-W-MSV 模型的动态相关系数分析

	均值	标准差	最小值	Q _{0.25}	Q _{0.5}	Q _{0.75}	最大值	偏度	超额峰度
SSECI-WTI	0.0644	0.1381	-0.3994	-0.0146	0.0644	0.1453	0.6424	0.3514	0.1629
S&P500-WTI	0.2069	0.1780	-0.4623	0.0974	0.2072	0.3268	0.7376	-0.1777	0.1984



(6a)SSECI 与 WTI 动态相关系数分布图



(6b)S&P500 与 WTI 动态相关系数分布图

图 8 DC-W-MSV 模型中动态相关系数分布图

参考文献:

[1] Kilian L, Park C. The impact of oil price shocks on the US stock market [J]. International Economic Review, 2009, 50(4): 1267-1287.

[2] Wen Xiaoqian, Wei Yu, Huang Dengshi. Measuring

contagion between energy market and stock market during financial crisis: A copula approach [J]. Energy Economics, 2012, 34(5): 1435-1446.

[3] Masih R, Peters S, De Mello L. Oil price volatility and stock price fluctuations in an emerging market: Evidence from South Korea [J]. Energy Economics, 2011, 33

- (5): 975—986.
- [4] Arouri M E H, Rault C. Oil prices and stock markets in GCC countries: Empirical evidence from panel analysis [J]. *International Journal of Finance & Economics*, 2012, 17(3): 242—253.
- [5] Nguyen C C, Bhatti M I. Copula model dependency between oil prices and stock markets: Evidence from China and Vietnam [J]. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 2012, 22(4): 758—773.
- [6] Kilian L. Exogenous oil supply shocks: How big are they and how much do they matter for the US economy? [J]. *The Review of Economics and Statistics*, 2008, 90(2): 216—240.
- [7] 刘红忠,何文忠,李治平. A 股市场上得“中石油魔咒”现象及其解释 [J]. *财经研究*, 2012, 38(8): 109—121.
- [8] Park J, Ratti R A. Oil price shocks and stock markets in the US and 13 European countries [J]. *Energy Economics*, 2008, 30(5): 2587—2608.
- [9] Miller J I, Ratti R A. Crude oil and stock markets: Stability, instability, and bubbles [J]. *Energy Economics*, 2009, 31(4): 559—568.
- [10] 姬强,范英. 次贷危机前后国际原油市场与中美股票市场间的协动性研究 [J]. *中国管理科学*, 2010, 18(6): 42—50.
- [11] Vo M. Oil and stock market volatility: A multivariate stochastic volatility perspective [J]. *Energy Economics*, 2011, 33(5): 956—965.
- [12] Philipov A, Glickman M E. Multivariate stochastic volatility via Wishart processes [J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2006, 24(3): 313—328.
- [13] Asai M, McAleer M. The structure of dynamic correlations in multivariate stochastic volatility models [J]. *Journal of Econometrics*, 2009, 150(2): 182—192.
- [14] Bauwens L, Laurent S, Rombouts J V K. Multivariate GARCH models: A survey [J]. *Journal of applied econometrics*, 2006, 21(1): 79—109.
- [15] Asai M, McAleer M, Yu Jun. Multivariate stochastic volatility: A review [J]. *Econometric Reviews*, 2006, 25(2—3): 145—175.
- [16] Gouriéroux C, Jasiak J, Sufana R. The Wishart autoregressive process of multivariate stochastic volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 2009, 150(2): 167—181.
- [17] Golosnoy V, Gribisch B, Liesenfeld R. The conditional autoregressive Wishart model for multivariate stock market volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 2012, 167(1): 211—223.
- [18] Jin Xin, Maheu J M. Modeling realized covariances and returns [J]. *Journal of Financial Econometrics*, 2013, 11(2): 335—369.
- [19] Bauwens L, Laurent S, Rombouts J V K. Multivariate GARCH models: A survey [J]. *Journal of applied econometrics*, 2006, 21(1): 79—109.
- [20] Engle R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models [J]. *Journal of Business & Economic Statistics*, 2002, 20(3): 339—350.

The Dynamic Dependence Between Crude Oil Market and Stock Market Based on Bayesian Wishart Multivariate Stochastic Volatility model

ZHU Hui-ming, PENG Cheng, YOU Wan-hai, DENG Chao

(College of Business Administration, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: Bayesian dynamic correlation Wishart volatility model is established in this paper to address estimation problem of time-varying coefficient matrix in multivariate stochastic volatility. In order to make the correlation coefficient matrix incorporated time-varying characteristics, the precision matrices in CC-MSV models are set to following the Wishart distribution. Based on the analysis of statistic structure of model and the selection of parameters prior, the Gibbs-MTM-ARMS sampling algorithm method is utilized to estimate model parameters. The empirical research applies the data of Shanghai Composite Index, S&P500 and crude oil future price. The research results show that the correlation between crude oil market and stock market is strong during the financial crisis, but it is difficult to identify the direction. Further, after the financial crisis, the U. S. stock market is obviously positive correlated with crude oil market, while the correlation between China stock market and crude oil market is very weak. All those indicate that models used in this paper can effectively depict the dynamic dependency between crude oil market and stock market.

Key words: dynamic dependence; stochastic volatility; Bayesian analysis; Wishart distribution; Gibbs-MTM-ARMS algorithm