

第十一章 导引飞行的动态特性分析

目的要求：

- 1、掌握自动导引和遥控飞行的动态特性分析方法；
- 2、能够通过建立的自动导引和遥控飞行动态特性分析的数学模型，采用控制、数字和飞行力学的方法分别推导出自动导引和遥控的运动学传递函数；
- 3、明确自动导引扭角的概念，产生的机理和物理原因，掌握其计算和分析方法；
- 4、明确遥控空间扭角的概念，产生的机理和物理原因，掌握其计算和分析方法；
- 5、明确导引的重力影响和所造成的动态误差。

重点、难点：

- 1、运动学传递函数的推导；
- 2、导引扭角、遥控空间扭角的概念、产生机理及其计算和分析方法；
- 3、重力影响对导引飞行造成的动态误差分析方法。

教学方法：课堂教学。

教学时数：6学时。

§11.1 自动导引飞行

导弹采用自动导引系统必须在弹体内安装导引装置，利用目标的主动幅射或被动反射，确定目标相对于导弹的空间位置。

自动导引系统可以采用不同的导引规律，从而决定了导引装置的结构和导引头灵敏轴在空间稳定的方式。下面介绍一种常见的相对目标线进行稳定的导引头及其结构图。假设图 11.1 中的 MT 线是目标视线； MX_1 是弹体纵轴； MX_c 线是导引头灵敏轴； q 为视角，虚线为分析参考线。

导引头灵敏轴可以测出它对视线的误差角 ε_c 。如果要求实现比例导引法，导引头应输出与 \dot{q} 成比例的信号。

如果 ε_c 是导引头灵敏轴跟踪目标视线的纵向误差角，那么灵敏轴在空间的位置还有航向跟踪误差角 β_c ，即具有两个自由度。实现导引头灵敏轴跟踪视线并稳定在视线上的方法，其操作原理可以采用双自由度陀螺仪的进动性和定轴性。对于轴对称的导弹，航向与纵向是对称的，所以下面只讲纵向导引问题。

一种比例导引制导装置的纵向典型结构图如图 11.2 所示。 K_1 是光学调制盘和光敏元件的传递系数，它们的功用是产生仪表误差角 ε_c 和 β_c 幅值与相位的辐射热脉冲信号，并转换成电脉冲信号。

在图 11.2 中, H 为双自由度陀螺动量矩, $1/Hs$ 为陀螺传递特性; $K_2/(T_2s+1)$ 是操作系统的力矩传感器之传递函数; K_3 是变换放大器的传递系数, 它的作用是放大电脉冲信号, 并分解出纵向控制信号 u_θ 或航向控制信号。

由图 11.2, 可得制导装置的传递函数如下

$$W_c(s) = \frac{u_\theta}{\Delta q} = \frac{K_1 K_3}{1 + K_1 K_3 \frac{K_2}{T_2 s + 1} \frac{1}{Hs}} \quad (11-1)$$

u_θ 为导引头输出的电压。如果不计时间常数 T_2 , 上式变为

$$W_c(s) = \frac{u_\theta}{\Delta q} = \frac{\frac{Hs}{K_2}}{\frac{Hs}{K_1 K_2 K_3} + 1} \quad (11-2)$$

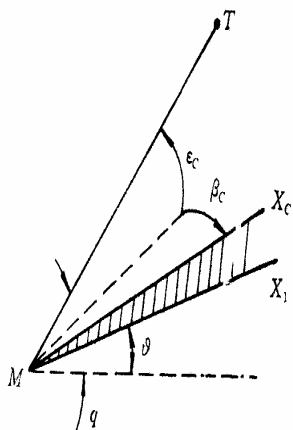


图 11.1 导引头灵敏轴的误差角

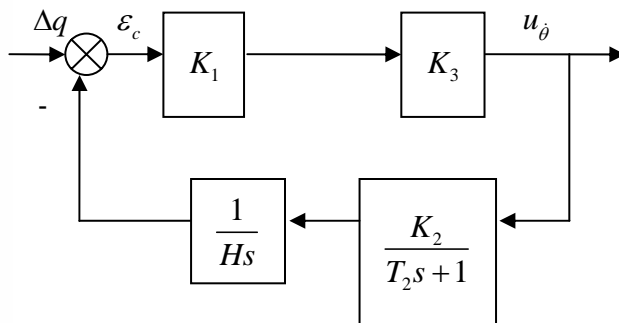


图 11.2 比例导引的制导装置

所以

$$u_\theta = \frac{\frac{H}{K_2}}{\frac{Hs}{K_1 K_2 K_3} + 1} \Delta \dot{q} = \frac{K_q}{T_q s + 1} \Delta \dot{q} \quad (11-3)$$

其结果表示纵向控制信号 u_θ 正比于 $\Delta \dot{q}$ 。将 u_θ 输入纵向姿态控制系统, 实现弹道倾

角速度 $\Delta\dot{\theta}$ 与目标视线角速度 $\Delta\dot{q}$ 成比例的导引方法。

实现比例导引方法，参照自动驾驶仪包括舵回路的稳定系统，基于比例导引的制导装置图 11.2，纵向比例导引的制导系统原理如图 11.3 所示。

由于有些空空导弹的飞行时间很短，为了提高信号 $u_{\dot{\theta}}$ 的效率，在飞行过程中不受俯仰角速度反馈信号的削弱，故不采用姿态稳定反馈支路。这就简化了自动导引系统的结构，而依靠导弹自身具有的良好气动阻尼。所以，图中俯仰角速度反馈支路专门用虚线表示，就说明了这个意思。

初步设计分析时，因放大器和舵机的时间常数 T_f, T_0 均很小，可以略而不计。同时，舵面的转动惯量是一个小值，也可略去与此有关的舵面时间常数 T_j 。当然，在这种情况下也可忽略导引头操纵系统的力矩传感器之时间常数 T_2 。如此简化的结果，就更加突出了各环节的主要传递特性，便于综合了解决定导弹自动导引特性的一些主要设计参数。

在图 11.3 中，右下两个环节分别是导弹和活动目标的运动学传递函数。

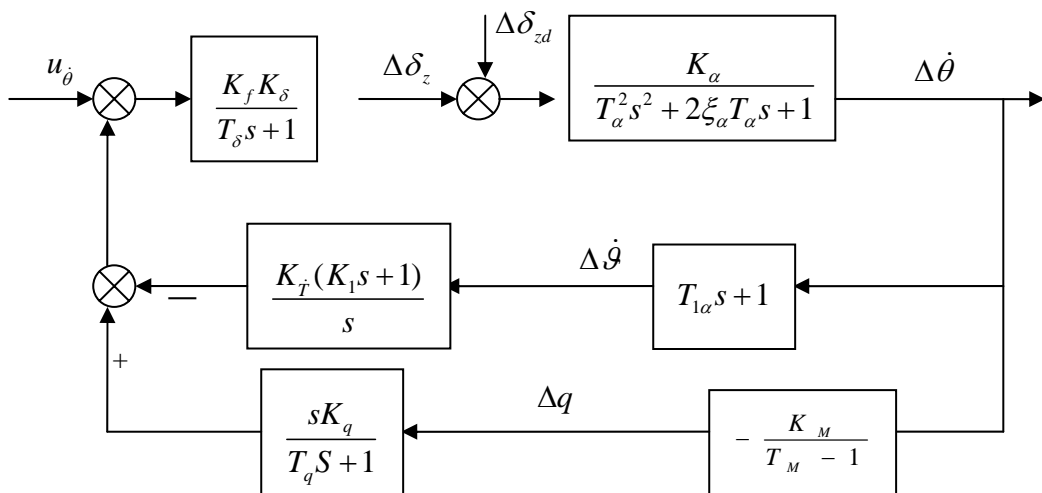


图 11.3 纵向自动比例导引

§11.2 自动导引的运动学传递函数

考虑到视线角 q 与弹道倾角 θ 之间的关系由导引相对运动学方程组表示，而纵向姿

态运动的自动控制又不包含视线角 q ，因此，为了形成自动导引控制回路的运动参数和控制信号之间的关系，还必须建立一个联系视线角 q 与弹道倾角 θ 的环节，即运动学环节，并由运动学传递函数来表示。

自动导引的运动学传递函数，要由相对运动学方程式来推导。根据图 11.4，导弹与目标相对运动的方程式在极坐标系内的形式如下

$$\frac{dR}{dt} = V_T \cos(q - \theta_T) - V \cos(q - \theta) \quad (11-4)$$

$$R \frac{dq}{dt} = -V_T \sin(q - \theta_T) + V \sin(q - \theta) \quad (11-5)$$

在小扰动范围内，可以认为导弹对理想弹道的偏离是个小量，允许不计导弹和目标的速度偏量，因此也可不计斜距偏量 ΔR 。于是，由相对运动方程，经线性化后获得视线角偏量 Δq 和弹道倾角偏量 $\Delta \theta$ 后，就可求得以 Δq 为输出量， $\Delta \theta$ 为输入量的运动学传递函数。

式(11-5)线性化的结果为

$$R \frac{d\Delta q}{dt} = -V_T \cos(q - \theta_T)(\Delta q - \Delta \theta_T) + V \cos(q - \theta)(\Delta q - \Delta \theta)$$

或写成

$$\begin{aligned} R \frac{d\Delta q}{dt} + (V_T \cos(q - \theta_T) - V \cos(q - \theta))\Delta q \\ = V_T \cos(q - \theta_T)\Delta \theta_T - V \cos(q - \theta)\Delta \theta \end{aligned} \quad (11-6)$$

此式经过拉氏变换后，得到以 $\Delta q(s)$ 为输出量， $\Delta \theta(s)$ 为输入量的导弹运动学传递函数为

$$\begin{aligned} G_M(s) &= \frac{\Delta q(s)}{\Delta \theta(s)} = \frac{q}{\theta} \\ &= \frac{-V \cos(q - \theta)}{R s + V_T \cos(q - \theta_T) - V \cos(q - \theta)} = -\frac{K_M}{T_M s - 1} \end{aligned} \quad (11-7)$$

式中

$$K_M = \frac{V \cos(q - \theta)}{-V_T \cos(q - \theta_T) + V \cos(q - \theta)} = \frac{V \cos(q - \theta)}{-\dot{R}} \quad (11-8)$$

$$T_M = \frac{R}{-V_T \cos(q - \theta_T) + V \cos(q - \theta)} = \frac{R}{-\dot{R}} \quad (11-9)$$

目标运动学传递函数也是一个不稳定的非周期环节，当目标飞行速度方向增量 $\Delta \theta_T > 0$ 时，视线角偏量 Δq 将不断地增大。

导弹运动学传递函数写成负值的意义在于：

(1) 弹道倾角偏量为负值 $\Delta\theta$ ，见图 11.5，导弹飞行速度在视线 MT 上的垂直分量增加从而加快了视线的旋转，其结果是视线角偏量 Δq 为正，即 $+\Delta q$ 对应 $-\Delta\theta$ ；

(2) 视线的距离是愈来愈短， R 的变化率为负值，由式(11-9)可获得正的时间常数 T_M 。运动学环节时间常数 T_M 的物理意义是从开始导引到停止导引的时间，它由某最大值单调地减小。

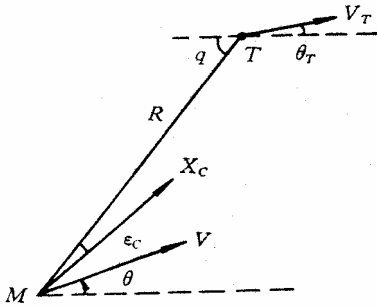
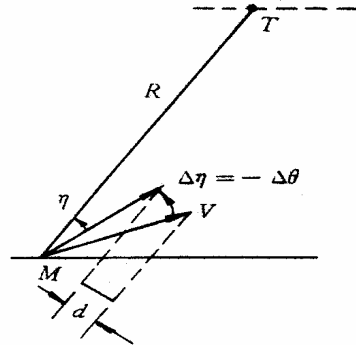


图 11.4 相对运动学关系图



11.5 θ 与 q 的偏差关系

当弹道倾角偏量 $\Delta\theta$ 为阶跃函数时，视线角偏量 Δq 始终是增加的。这一点，也可由图 11.5 给出解释。当导弹的飞行速度方向对理论弹道产生一个负值偏量 $\Delta\theta$ 时，实际的弹道倾角减为 $(\theta_0 - \Delta\theta)$ ，类似于前置角出现增量 $\Delta\eta$ 。于是，速度 V 在视线上的垂直分量得到增加。设这个分量的增值为 d ，根据图 11.5，其值等于

$$d = V[\sin(\eta + \Delta\eta) - \sin \eta] \quad (11-10)$$

因 $\Delta\eta$ 为小量，当前置角 η 也为小量时，上式近似为

$$d = V(\sin \eta \cos \Delta\eta + \cos \eta \sin \Delta\eta - \sin \eta) \approx V\Delta\eta \quad (11-11)$$

视线在垂直分速 $V\Delta\eta$ 作用下，使 Δq 值不断增大。又因 $\Delta\theta = -\Delta\eta$ ，所以减小弹道倾角， Δq 值始终是增加的，以致它们的偏差运动学关系成为一个非周期的不稳定环节。

以上基于“系数冻结法”的原理确定了运动学环节传递函数。一般地说，系数冻结法只是在过渡过程时间内，系数来不及发生显著变化的情况下，才能得到较好结果。若系统过渡过程时间为 t_p ，在此时间内斜距的相对变化量 $\dot{R}\Delta t / R$ 很小时，假定 R 为常数推导运动学传递函数是许可的。但是当导弹接近目标时，由于 R 值本身很小，相对变化量增大，再继续假定斜距 R 为常数，就与实际情况不符。这时必须改用变系数方程式(11-9)，在计算机上对自动导引回路进行变系数求解，或采用非常数系统广义传递函数的概念来分析运动学环节。

同理，由式(11-6)可得活动目标的运动学传递函数为

$$G_T(s) = \frac{q_T}{\theta_T} = \frac{V_T \cos(q - \theta_T)}{Rs + V_T \cos(q - \theta_T) - V \cos(q - \theta)} \quad (11 - 12)$$

$$= -\frac{K_T}{T_T s - 1}$$

$$K_T = \frac{V_T \cos(q - \theta_T)}{-V_T \cos(q - \theta_T) + V \cos(q - \theta)} = \frac{V_T \cos(q - \theta_T)}{-\dot{R}} \quad (11 - 13)$$

$$T_T = T_M \quad (11 - 14)$$

目标运动学传递函数也是一个不稳定的非周期环节，它的飞行速度方向出现增量 $\Delta\theta_T > 0$ ，视线角偏量 Δq 将不断地增大。

已知运动学传递函数 $G_M(s)$ 和 $G_T(s)$ ，由图 11.3 纵向自动比例导引原理图，可以分析导弹纵向比例导引的动态特性。某空空导弹不含俯仰角速度反馈，图中导引装置的传递函数 $G_c(s)$ 可以写成

$$W_c(s) = \frac{\frac{Hs}{K_2}}{\frac{Hs}{K_1 K_2 K_3} + 1} = \frac{K_q s}{T_q s + 1} \quad (11 - 15)$$

式中

$$K_q = \frac{H}{K_2} \quad (11 - 16)$$

$$T_q = \frac{H}{K_1 K_2 K_3} \quad (11 - 17)$$

若以控制信号 u_θ 为输入量，弹道倾角角速度 $\dot{\theta}$ 为输出量，不难求到局部闭环传递函数 $W_a(s)$

$$W_a(s) = K_f K_0 K_i \frac{\dot{\theta}(s)}{M_j(s)}$$

$$= \frac{K_f K_0 K_i K_j K_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) / a_{25}}{(s + K_j M_j^\delta)(T_\alpha^2 s^2 + 2\xi_\alpha T_\alpha s + 1) + K_j K_\alpha M_j^a W_{\alpha\theta}(s) \frac{1}{s} (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) a_{25}} \quad (11 - 18)$$

据此再以 \dot{q} 为输入量， $\dot{\theta}$ 为输出量，并用式(8-66)代替转换函数，可得自动导引开环传递函数如下

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\dot{\theta}(s)}{\dot{q}(s)} = \frac{K_q}{T_q s + 1} W_\alpha(s) \\
 &= \frac{K_q}{T_q s + 1} \left[\frac{K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) / a_{25}}{(s + K_j M_j^\delta)(T_\alpha^2 s^2 + 2\xi_\alpha T_\alpha s + 1) + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (1 + a_{35}(s + a_{22}) / a_{25})} \right]
 \end{aligned} \tag{11 - 19}$$

式中系传系数 $K'_\alpha = K_f K_0 K_i K_j$ 。由式(11 - 19)可得 $G(s)$ 开环传递函数的放大系数 K 为

$$K = \frac{K_q K_\alpha K'_\alpha}{K_j M_j^\delta + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (1 + a_{35} a_{22} / a_{25})} = \frac{H}{K_2} \frac{K_f K_0 K_i K_\alpha}{M_j^\delta + K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (1 + a_{35} a_{22} / a_{25})} \tag{11 - 20}$$

此放大系数反映了导弹在自动导引飞行时，弹道倾角角速度 $\dot{\theta}$ 与视角角速度 \dot{q} 之间的比例特性，也就是

$$\dot{\theta} = K \dot{q} \tag{11 - 21}$$

所以，比例导引系统的放大系数 K 与纯比例导引的比例系数是等值的。换句话说，比例导引系数就是系统的开环放大系数。

考虑到开环放大系数 K 与纵向传递系数 K_α ，气动力时间常数 $T_{1\alpha}$ 以及铰链力矩系数 M_j^δ ， M_j^α 等有关，而这些参数是随时间变化的，故比例导引时其比例系数实际上是一个时间函数。例如，所举空空导弹导引装置等的放大系数等于

$$\frac{H}{K_2} K_f K_0 K_i = 3.9 \text{ kgms}/(\circ)$$

于是自动导引系统的开环放大系数 K 值为

$$K = \frac{3.9 K_\alpha}{M_j^\delta + K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (1 + a_{35} a_{22} / a_{35})} \tag{11 - 22}$$

在自动导引系统图 11.3 中，除纵向自动角运动和导引装置外，还包括一个不稳定的非周期的运动学环节。因此，在自动导引系统中要克服这个环节的不稳定性。由式(11—19) 可得自动导引系统的开环传递函数 $G(s)$

$$G(s) = \frac{K_q K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) / a_{25}}{n_0 s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4} \tag{11 - 23}$$

式中

$$\begin{cases} n_0 = T_\alpha^2 T_q \\ n_1 = T_\alpha^2 (1 + T_q K_j M_j^\delta) + 2\xi_\alpha T_\alpha T_q \\ n_2 = T_\alpha^2 K_j M_j^\delta + 2\xi_\alpha T_\alpha (1 + T_q K_j M_j^\delta) + T_q (1 + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha a_{35} / a_{25}) \\ n_3 = 2\xi_\alpha T_\alpha K_j M_j^\delta + (1 + T_q K_j M_j^\delta) + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\delta \\ \quad \cdot (T_q a_{35} a_{22} / a_{25} + a_{35} / a_{25} + T_q) \\ n_4 = K_j M_j^\delta + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (a_{35} a_{22} / a_{25} + 1) \end{cases} \quad (11 - 24)$$

应用开环传递函数式(11 - 23)，不考虑俯仰角速度反馈支路，可以求出自动导引系统图 11.3 的闭环传递函数。以目标机动引起的视角角速度偏量 \dot{q}_T 为输入量，弹道倾角角速度 $\dot{\theta}$ 为输出量的闭环传递函数为

$$W_{\dot{\theta}\dot{q}_T}(s) = \frac{(T_M s - 1)G(s)}{(T_M s - 1) + G(s)K_M} \quad (11 - 25)$$

将式(11 - 23)代入上式，又得

$$W_{\dot{\theta}\dot{q}_T}(s) = \frac{(T_M s - 1)K_q K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) / a_{25}}{(T_M s - 1)(n_0 s^4 + n_1 s^3 + n_2 s^2 + n_3 s + n_4) + K_q K_\alpha K'_\alpha K_M (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22}) / a_{25}} \quad (11 - 26)$$

分母多项式的常数项为

$$-n_4 + K_q K_\alpha K'_\alpha K_M = -K_j M_j^\delta - K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (a_{35} a_{22} / a_{25} + 1) + K_q K_\alpha K'_\alpha K_M \quad (11 - 27)$$

因此，为了消除不稳定运动学环节的影响，要求闭环传递函数式(11 - 26)的所有特征根小于零，至少要求由式(11 - 27)表示的常数项必须大于零，即

$$K_q K_\alpha K'_\alpha K_M - K_j M_j^\delta - K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (a_{35} a_{22} / a_{25} + 1) > 0 \quad (11 - 28)$$

所以

$$K_q K_f K_0 K_i K_j K_\alpha K_M > K_j M_j^\delta + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (a_{35} a_{22} / a_{25} + 1) \quad (11 - 29)$$

或写成

$$K_q K_f K_0 K_i K_j K_\alpha K_M > M_j^\delta + K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha (a_{35} a_{22} / a_{25} + 1) \quad (11 - 30)$$

此不等式成立，有可能抵消不稳定运动学环节产生的不利影响。

如果导弹在接近目标之前出现发散现象，由于导弹一般都不是直接命中目标，而是要求脱靶量小于战斗部的杀伤半径，因此，选择系统参数时应尽可能推迟导引系统开始发散的时间。这就有可能使导引飞行刚趋于不稳定状态时，导弹与目标的相对距离已落入战斗部的杀伤范围内。

以上分析没有考虑图 11.3 中俯仰角速度的反馈支路，该支路的作用是补偿纵向姿态的“气动阻尼”，它对自动导引飞行的影响如何可作以下分析。具有俯仰角速度反馈的纵向姿态运动，按图 11.3 可由下列闭环传递函数表示

$$W_b(s) = \frac{W_\alpha(s)}{1 + W_\alpha(s) \frac{K_\alpha(T_{1\alpha}s + 1)}{(1 - T_{1\alpha}a_{35}s(s + a_{22}))/a_{25}}} \quad (11 - 31)$$

由式(11 - 18)，可将此式写成

$$W_b(s) = K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s(s + a_{22}) a_{25}) / \left\{ (s + K_j M_j^\delta)(T_\alpha^2 s^2 + 2\xi_\alpha T_\alpha s + 1) + K_j K_\alpha T_{1\alpha} M_j^\alpha [1 + a_{35}(s + a_{22})/a_{25}] + K_\alpha^2 K'_\alpha (T_{1\alpha} s + 1) \right\} \quad (11 - 32)$$

于是，引入俯仰角速度之后，在图 11.3 中，由输入量 \dot{q} 到输出量 $\dot{\theta}$ 的开环传递函数变成

$$G_b(s) = \frac{K_q}{T_q s + 1} W_b(s) = \frac{K_q K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22})/a_{25}}{n_0 s^4 + n_1 s^3 + (n_2 + f_2)s^2 + (n_3 + f_3)s + n_4 + f_4} \quad (11 - 33)$$

式中，系数 $n_0 \sim n_4$ 由式 (11 - 24) 表示。系数 $f_2 \sim f_4$ 由式(11 - 32)和式(11 - 33)求出它们的表达式，其结果如下

$$\left. \begin{aligned} f_2 &= K_\alpha^2 K'_\alpha T_{1\alpha} T_q \\ f_3 &= K_\alpha^2 K'_\alpha (T_q + T_{1\alpha}) \\ f_4 &= K_\alpha^2 K'_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (11 - 34)$$

考虑到系数 n_0 和 n_1 比较小，简化处理可认为自动导引开环传递函数 $G_b(s)$ 类似于一个二阶环节

$$G_b(s) \approx \frac{K_q K_\alpha K'_\alpha (1 - T_{1\alpha} a_{35} s)(s + a_{22})/a_{25}}{(n_2 + f_2)s^2 + (n_3 + f_3)s + n_4 + f_4} \quad (11 - 35)$$

它的放大系数 K_b 为

$$K_b = \frac{K_q K_\alpha K'_\alpha}{n_4 + f_4} \quad (11 - 36)$$

因为 $f_4 + n_4 > n_4$ ，所以俯仰角速度反馈的存在降低了自动导引的开环放大系数。换句话说，俯仰角速度信号可以补偿导弹的气动阻尼，但也同时降低了开环放大系数，

或者说增大了开环固有频率。因此，在导弹具有足够气动阻尼的情况下，为了不降低自动导引的快速性，故不采用俯仰角速度反馈支路。

§11.3 自动导引扭角计算和分析

自动导引时，如果导引头固连在弹体上，导引头坐标系 $Ox_c y_c z_c$ 与弹体坐标系 $Ox_1 y_1 z_1$ 始终重合在一起，两者之间无欧拉角，这是一种比较简单的坐标系相连的情况。实际上导引头搜索目标和跟踪目标时相对于弹体发生了运动，因此坐标系 $Ox_c y_c z_c$ 并不同 $Ox_1 y_1 z_1$ 相重合，两者之间存在着欧拉角，此现象称之为坐标系空间扭转。

计算和分析空间扭转的意义旨在提高制导精度和自动导引系统的稳定性。因为导弹的舵面设置无论是“+”型还是“X”型，都是相对弹体坐标系而言。而导引误差角 ε_c 和 β_c 由导引头坐标系 $Ox_c y_c z_c$ 来测量，两者经过换算之后才能提高舵面偏转的准确度。假设两坐标轴之间的欧拉角为 ξ ， η 和 γ_1 ，见图 11.6(a)。根据两坐标系统旋转欧拉角的三个基本转换矩阵，可以求出它们之间的关系。

假设在某飞行瞬时，导弹弹体体系的位置为 $Ox_{11} y_{11} z_{11}$ ，而导引头坐标系的位置为 $Ox_{c1} y_{c1} z_{c1}$ 。由前者到后者的转角次序是 γ_1 ， ξ ， η 。根据基本转换矩阵的排序相反的原则，可得转换方程如下：

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} = L_3(\eta)L_2(\xi)L_1(\gamma_1) \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \eta \cos \xi & \cos \eta \sin \xi \sin \gamma_1 - \sin \eta \cos \gamma_1 & -\cos \eta \sin \xi \cos \gamma_1 + \sin \eta \sin \gamma_1 \\ \sin \eta \cos \xi & \sin \eta \sin \xi \sin \gamma_1 + \cos \eta \cos \gamma_1 & \sin \eta \sin \xi \cos \gamma_1 - \cos \eta \sin \gamma_1 \\ -\sin \xi & \cos \xi \sin \gamma_1 & \cos \xi \cos \gamma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix} \quad (11 - 37)$$

转动角 γ_1 处于弹体坐标系某瞬时的 $Ox_{11} z_{11}$ 平面内，此角称为自动导引的空间扭角。因无法单独由式(11 - 37)求出空间扭角 γ_1 的表达式，故有下述推论：

假设导引头捕捉到活动目标后，它的坐标系与弹体坐标系的夹角为 σ_1 和 σ_2 ，见图 11.7。从导引头跟踪目标起，经过时间 Δt ，由于目标运动，导引头灵敏轴 Ox_c 发生了两个角自由度的变化，即角 φ_a 和 φ_b ，于是导引头坐标系处于 $Ox_{c1} y_{c1} z_{c1}$ 的位置上。在图 11.6 中由 $Ox_1 y_1 z_1$ 系变换到 $Ox_{c1} y_{c1} z_{c1}$ 系，根据欧拉角出现的先后次序，不难推得

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} = L_3(\varphi_b)L_2(\varphi_a)L_3(\sigma_2)L_2(\sigma_1) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (11-38)$$

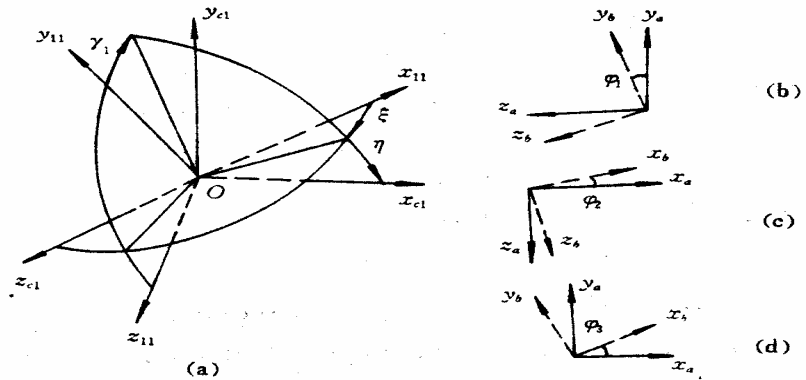


图 11.6 坐标轴系空间扭转

与此同时，弹体坐标系在时间 Δt 内也出现了转动，在图 11.7 $Ox_1y_1z_1$ 位置上新增加了俯仰角 ϑ ，航向角 ψ （即前述 ψ ）和滚转角 γ ，而处在新的位置 $Ox_{11}y_{11}z_{11}$ 上，图中没有标出。弹体坐标系在空间的这种转动，好似弹体坐标系相对于地面基准坐标系发生了转动。将坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 看成是地面基准坐标系，不难求出在时间 Δt 内弹体坐标系自身的转换关系。考虑到

$$L_2(\varphi_2)L_3(\varphi_3)L_1(\varphi_1) = L_2(\psi)L_3(\vartheta)L_1(\gamma) \quad (11-39)$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L_2(\psi)L_3(\vartheta)L_1(\gamma) \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix} \quad (11-40)$$

考虑弹体坐标系自身的变动，将式(11-40)代入到式(11-38)中，经过展开又可以得到

$$\begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_b \cos \varphi_a & \sin \varphi_b & -\cos \varphi_b \sin \varphi_a \\ -\sin \varphi_b \cos \varphi_a & \cos \varphi_b & \sin \varphi_b \sin \varphi_a \\ \sin \varphi_a & 0 & \cos \varphi_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \sigma_2 \cos \sigma_1 & \sin \sigma_2 & -\cos \sigma_2 \sin \sigma_1 \\ -\sin \sigma_2 \cos \sigma_1 & \cos \sigma_2 & \sin \sigma_2 \sin \sigma_1 \\ \sin \sigma_1 & 0 & \cos \sigma_1 \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\cos \vartheta \sin \psi & -\sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ y_{11} \\ z_{11} \end{bmatrix}$$

(11 - 41)

弹体坐标系和导引头坐标系在时间 Δt 内各自转动后,两坐标系之间的转换关系式(11 - 41)和式(11 - 37)是等价的。将式(11 - 41)各转换矩阵乘开之后,因各元素与式(11 - 37)对应的元素相等,由此使以下两个等式成立

$$\begin{aligned} \cos \xi \sin \gamma_1 = e_1(-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) + e_2(\cos \vartheta \cos \gamma) \\ + e_3(\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) \end{aligned} \quad (11 - 42)$$

$$\begin{aligned} \cos \xi \cos \gamma_1 = e_1(\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma) + e_2(-\cos \vartheta \sin \gamma) \\ + e_3(\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma) \end{aligned} \quad (11 - 43)$$

式中

$$e_1 = -\sin \varphi_a \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 + \cos \varphi_a \sin \sigma_1$$

$$e_2 = \sin \varphi_a \sin \sigma_2$$

$$e_3 = -\sin \varphi_a \sin \sigma_1 \cos \sigma_2 + \cos \varphi_a \cos \sigma_1$$

将式(11 - 43)除以式(11 - 42),可得自动导引空间扭角 γ_1 的表达式

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{e_1(-\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) + e_2(\cos \vartheta \cos \gamma) + e_3(\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma)}{e_1(\sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma) + e_2(-\cos \vartheta \sin \gamma) + e_3(\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma)}$$

(11 - 44)

可见,弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 在捕捉目标瞬时与地面基准坐标系重合时,空间扭角 γ_1 不仅与导弹俯仰角 ϑ , 航向角 ψ 和滚转角 γ 有关,而且与导引头坐标系本身的转动有关。所以,要准确计算出扭角 γ_1 ,还是相当复杂的,并且要采用许多技术措施测量有关角度。

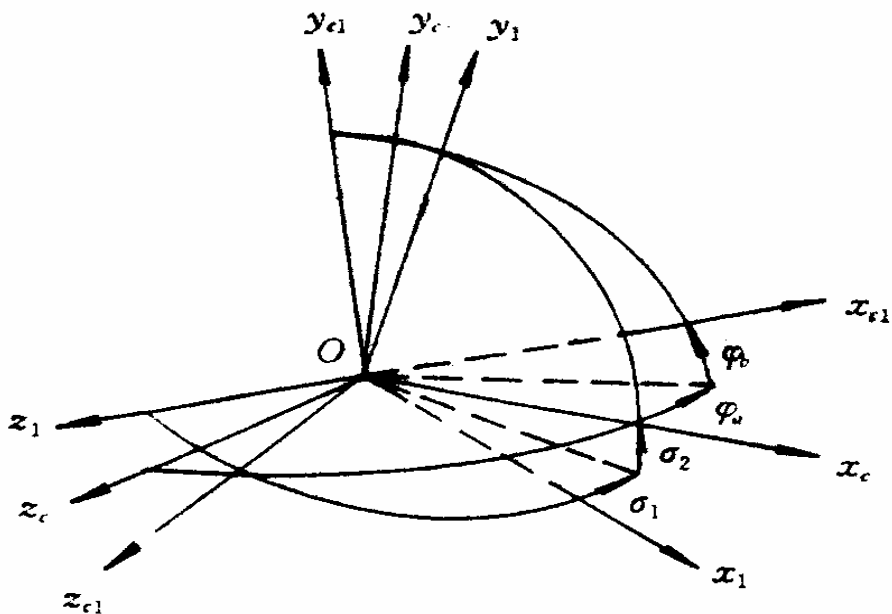


图 11.7 扭角的形成

§11.4 遥控飞行

前两节介绍飞行导引系统与飞行力学紧密相关的一些内容，从本节开始将在此基础上讨论遥控导弹的一些飞行力学问题。

一般讲，遥控系统的有效作用距离要比红外导引头或雷达导引头远得多。因此，地空导弹可采用遥控的导引方式。例如，某地空导弹的稳定回路采用微分陀螺和线加速度传感器，遥控装置采用波束导引的指令控制，略去校正环节和有关元件的小时间常数，则纵向控制（制导）系统如图 11.8 所示。

这是一个遥控系统的典型方块结构图。图中传递函数代表了舵回路的动态特性。

$$W_{\delta}(S) = \frac{K_f K_{\delta}}{T_{\delta} S + 1} \quad (11 - 45)$$

在图 11.8 中含有法向加速度的敏感元件，其传递函数 $W_n(S)$ 可用下式表示

$$W_n(S) = \frac{K_n}{T_n S + 1} \quad (11 - 46)$$

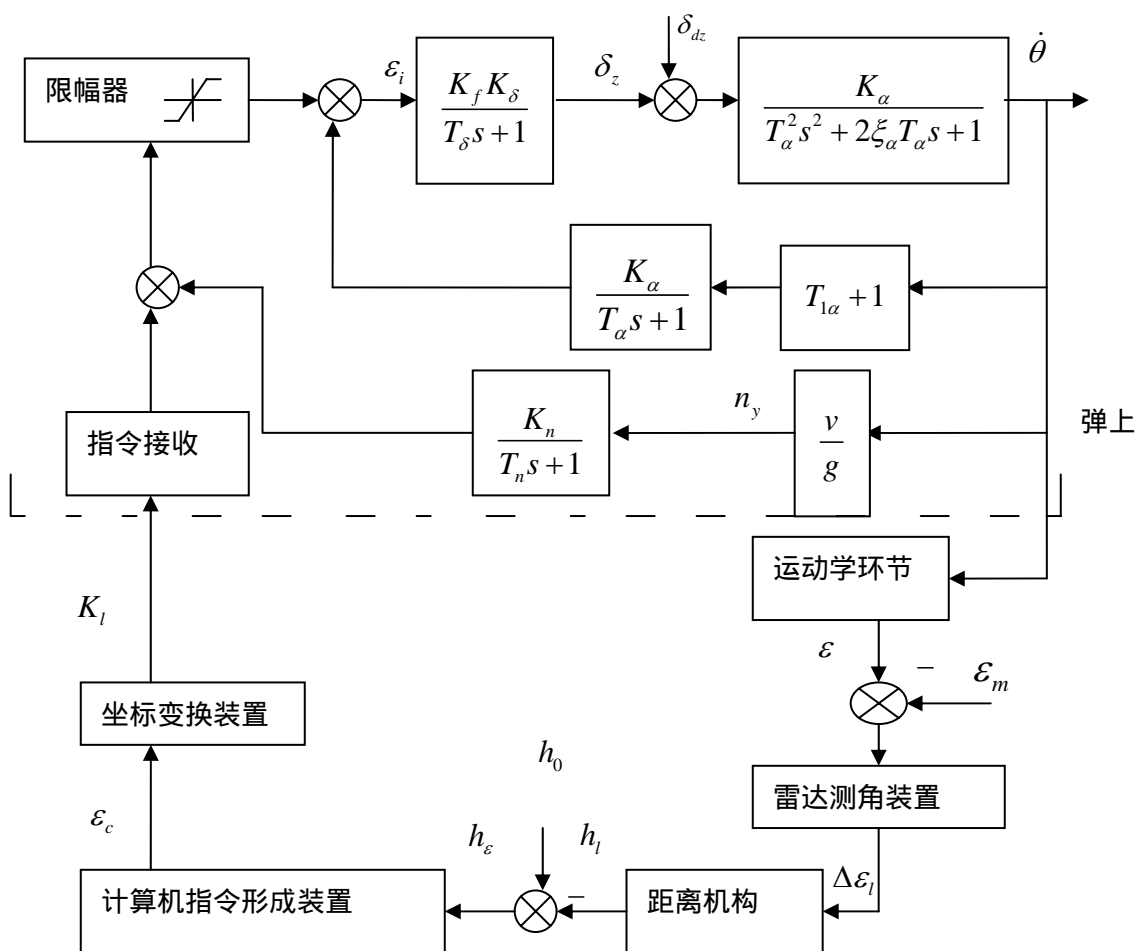


图 11.8 遥控遥测的纵向控制系统

图 11.8 中 ϵ_c 是导引误差， K_l 为纵向遥控指令

限幅放大器的作用是限制控制信号 u_θ 和过载传感器的输出信号不超过某一数值，使舵面转角达不到最大值，而留有适当的余量。这个余量的确定应考虑导弹受到干扰作用后，保证微分陀螺信号能通过舵机，使舵面偏转来补偿导弹的“气动阻尼”，减小干扰作用的影响。如取最大舵偏角 $\delta_{\max} = 20^\circ$ ，当限幅放大器输出电流达饱和值为 $1.4mA$ 时，相应的舵偏角为 $\delta = 18^\circ$ ，而留有 2° 余量来克服干扰作用。

地面制导站的雷达测角装置跟随目标一起运动。雷达的波束中心线就是目标与地面制导站的连线(简称目标线),如图 11.9 所示。图中 $Ox_4y_4z_4$ 为雷达坐标系。

雷达坐标系可以测出导弹与目标高低角之差。

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_T \quad (11 - 47)$$

式中 ε 为导弹的高低角， ε_T 为目标高低角，可以近似认为 ε ， ε_T 和 θ 在同一垂直平面内。同理，雷达坐标系也可测出方位角之差。

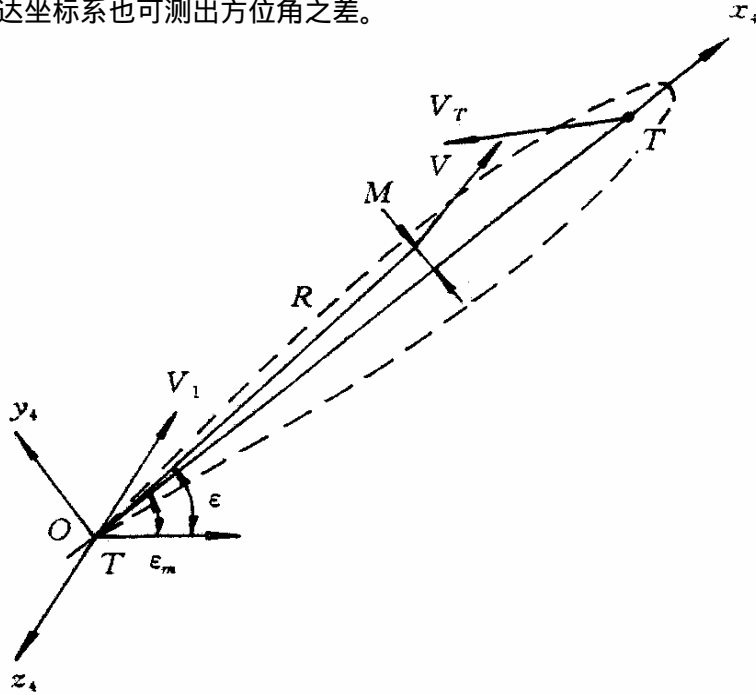


图 11.9 偏离目标线的垂直线偏差

距离机构可以实测导弹对制导站的距离 $R(t)$ ，也可测出导弹与目标距离之差 ΔR 。导弹相对制导站的距离可由以下函数给出

$$R(t) = a + bt \quad (11 - 48)$$

式中，参数 a 和 b 由大量弹道计算，按统计特性给定。

导弹偏离目标线的垂直线偏差 h_1 用公式 (11 - 48) 表示(见图 11.9)。

$$h_1 = \Delta\varepsilon_1 R(t) \quad (11 - 49)$$

当采用三点法导引时，要求高低角之差 $\Delta\varepsilon_1$ 或线偏差 h_1 等于零。

若用半前置量法，并减小目标机动对导弹的影响，前置角可取为

$$\Delta\varepsilon_0 = -\frac{\Delta R}{2\Delta R} \dot{\varepsilon}_T \quad (11 - 50)$$

式中 $\dot{\varepsilon}_T$ 为目标高低角速度，由雷达测角装置确定。

按半前置量法导引时，在实际系统中应把前置角 $\Delta\varepsilon_0$ 表示成导弹至目标线的前置线偏差 h_0 ，其值应为

$$h_0 = R(t)\Delta\varepsilon_0 \quad (11-51)$$

因此，按半前置量法导引，导弹实际偏离波束中心线的偏差 h_ε 为

$$h_\varepsilon = h_1 - h_0 \quad (11-52)$$

所以，在图 11.8 中输入计算机指令形成装置的信号为 h_ε 。当用三点法导引时，线偏差 $h_0 = 0$ ，则 $h_\varepsilon = h_1$ 。

如上所述，某地空导弹的控制系统是根据高低角偏差 $\Delta\varepsilon_1$ 或是按线偏差 h_ε 对导弹的飞行进行自动操纵。从物理意义上讲，如果仅由偏差 h_ε (或 $\Delta\varepsilon_1$) 本身作为舵面偏转信号，由于控制系统有惯性，导弹实际上执行转动舵面的信号，在时间上要迟后于偏差 h_ε 的出现。因此，为了提高舵面偏转的快速性，应该引入偏差 h_ε 的一次微分，甚至还要引入二次微分的信号，即引入产生位移偏差的速度和加速度信号。但是引入高于二次微分的信号，在测量高低角出现起伏误差时，信号本身就会出现较大的误差，因而一般只取二次导数。所以，计算机指令形成装置的传递函数可以采用以下表达式

$$W_c(S) = \frac{\varepsilon_c}{h_c} = \frac{k_k(T_1S+1)(T_3S+1)}{(T_2S+1)(T_4S+1)} \quad (11-53)$$

式中 ε_c 称为导引误差信号； k_k 为放大系数； T_1, T_2 和 T_3, T_4 为时间常数。这是一个串联微积分校正网络，它同时对大回路起着校正作用。因微分信号 h_ε 在回路中作用与小回路微分信号 \dot{g} 所起的物理作用是一样的，所以引入 \dot{h}_ε 信号可以增大导弹的“阻尼”，减小导弹为消除线偏差 h_ε 围绕理想弹道产生的振荡，从而提高系统的稳定裕量，并使开环截止频率增大到适当的数值。为满足这些要求，所列举的地空导弹选择 $T_1 \ll T_2$ ，而 $T_4 > T_3$ 。

坐标变换机构是将误差信号 ε_c 经过坐标变换后，变成纵向通道指令 K_1 ，经天线传送到导弹，弹上指令接收装置接收指令 K_1 ，并形成控制信号 u_θ ，通过自动驾驶仪使舵面作相应的偏转，从而改变导弹的运动状态，消除线偏差 h_c 。

在遥控控制系统中，将弹道倾角 θ 变换为高低角 ε ，也需要运动学环节，并建立运动学传递函数，见图 11.8。

§11.5 遥控的运动学传递函数

一、制导站固定时导弹运动学传递函数

运动学传递函数要由运动学方程式来推导。下面首先介绍导弹在垂直平面内的运动

学方程。由图 11.9 可得出以下运动学方程：

$$\frac{dR}{dt} = V \cos(\theta - \varepsilon) \quad (11 - 54)$$

$$R \frac{d\varepsilon}{dt} = V \sin(\theta - \varepsilon) \quad (11 - 55)$$

导弹的传递函数是由运动方程线性化后，对运动参数的偏量建立的。因此，在制导系统中，运动学环节的传递函数也是以参数偏量作为输入值和输出值。

为了寻求运动学参数偏量 $\Delta\varepsilon$ 和 $\Delta\theta$ 间的关系，对式(11 - 54)进行线性化，其结果为

$$R\Delta\dot{\varepsilon} = V \cos(\theta - \varepsilon)(\Delta\theta - \Delta\varepsilon) \quad (11 - 56)$$

或者写成

$$R\Delta\dot{\varepsilon} + \dot{R}\Delta\varepsilon = \dot{R}\Delta\theta \quad (11 - 57)$$

此式进行拉氏变换后，以弹道倾角偏量 $\Delta\theta$ 为输入量，以高低角偏量 $\Delta\varepsilon$ 为输出量，可得运动学传递函数为

$$W_{\theta\varepsilon}(s) = \frac{\Delta\varepsilon(s)}{\Delta\theta(s)} = \frac{\dot{R}}{Rs + \dot{R}} \quad (11 - 58)$$

由式 (11 - 57)还可推出其它形式的运动学传递函数。将此式写成

$$\frac{d(R\Delta\varepsilon)}{dt} = \dot{R}\Delta\theta \quad (11 - 59)$$

再对它进行一次微分，得到

$$\frac{d^2(R\Delta\varepsilon)}{dt^2} = \ddot{R}\Delta\theta + \dot{R}\Delta\dot{\theta} \quad (11 - 60)$$

因为弧长 $\Delta\lambda = R\Delta\varepsilon$ ，法向加速度 $\Delta a_{y4} = V\Delta\dot{\theta}$ ，又因 $\Delta\theta = \Delta\dot{\lambda} / \dot{R}$ ，于是上式可以写成

$$\Delta\ddot{\lambda} - \frac{\ddot{R}}{\dot{R}}\Delta\dot{\lambda} = \frac{\dot{R}}{V}a_{y4} \quad (11 - 61)$$

经拉氏变换后，以弧长 $\Delta\lambda$ 为输出量，法向加速度为输入量的运动学传递函数的一种形式为

$$W_{\varepsilon}(s) = \frac{\Delta\lambda(s)}{\Delta a_{y4}(s)} = \frac{\dot{R}/V}{s(s - \ddot{R}/\dot{R})} \quad (11 - 62)$$

因为视线的变化率 \dot{R} 为正值，如果 \ddot{R} 也大于零，则有 $\ddot{R}/\dot{R} > 0$ 。在这种情况下，式 (11 - 62)表示的运动学传递函数由一个积分环节和一个不稳定的非周期环节组成。

如果视线变化率 $\dot{R} \approx V$ ，并且飞行速度 V 远大于自身的变化率 \dot{V} ，又因 $\dot{V} \approx \ddot{R}$ ，则有 $\ddot{R}/\dot{R} \approx \dot{V}/V \approx 0$ ，式 (11 - 62)可进一步简化成

$$W_{\varepsilon}(s) = \frac{\Delta\lambda(s)}{\Delta a_{y4}(s)} = \frac{1}{s^2} \quad (11 - 63)$$

这时导弹的运动学环节相当于双积分环节。

严格地讲，运动学传递函数中的加速度是对雷达坐标系而言的，它与沿弹道坐标系的加速度 a_y 和 a_z 并不完全一样，但两者的联系可以通过两坐标系竖轴之间的夹角 γ_2 ，由图 11.10 和图 11.11 得出其变换关系式为

$$\left. \begin{aligned} a_{y4} &= a_y \cos \gamma_2 - a_z \sin \gamma_2 \\ a_{z4} &= a_y \sin \gamma_2 + a_z \cos \gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (11 - 64)$$

对于轴对称导弹，因为由偏转偏航舵 δ_y 到产生侧向加速度 a_z 的航向扰动运动，其形式与纵向短周期扰动运动基本一致，所以，航向与纵向的运动学传递函数也具有相同的形式，即

$$\begin{aligned} W_{\theta\varepsilon}(s) &= W_{\psi\beta}(s) = \frac{\Delta\beta(s)}{\Delta\psi(s)} \\ W_{\varepsilon}(s) &= W_{\beta}(s) \end{aligned} \quad (11 - 65)$$

式中，下标“ ψ ”代表弹道偏角 ψ 。

加速度变换关系式(11 - 64)反映了一种运动交联现象，在图 11.9 中相对于雷达坐标系，由运动学传递函数式(11 - 63)和式(11 - 64)可得

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R} W_{\varepsilon}(s) a_{y4} = \frac{1}{R} W_{\varepsilon}(s) (a_y \cos \gamma_2 - a_z \sin \gamma_2) \\ \beta &= \frac{1}{R} W_{\beta}(s) a_{z4} = \frac{1}{R} W_{\beta}(s) (a_y \sin \gamma_2 + a_z \cos \gamma_2) \end{aligned} \quad (11 - 66)$$

由式(7 - 66)中，可写出以下两式（升降舵和方向舵均为阶跃偏转）

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R} W_{\varepsilon}(s) (-V \cos \gamma_2 W_{\delta\theta}(s) \delta_z - V \cos \theta \sin \gamma_2 W_{\delta\psi}(s) \delta_y) \\ \beta &= \frac{1}{R} W_{\beta}(s) (-V \sin \gamma_2 W_{\delta\theta}(s) \delta_z + V \cos \theta \cos \gamma_2 W_{\delta\psi}(s) \delta_y) \end{aligned} \quad (11 - 67)$$

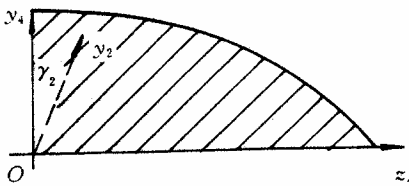


图 11.10 偏斜角 γ_2 示意图

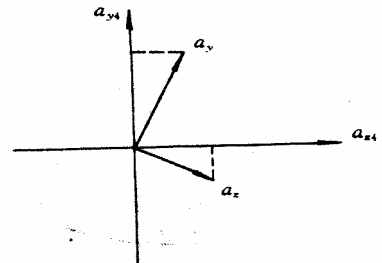


图 11.11 加速度变换图

由此可以得出结论，当偏斜角 γ_2 存在时，为消除高低角偏差 ε （或线偏差 h_1 ），或者方位角偏差 β ，必须同时偏转升降舵 δ_z 和方向舵 δ_y ，即俯仰和偏航两个通道的运动是相互交联的。

二、制导站运动时导弹运动学传递函数

当导弹在飞机、舰艇和车辆上发射，并采用遥控系统时，制导站是运动的。即使假定目标、导弹和制导站的运动处于同一个平面内，相互间的运动学关系也是相当复杂的。在图 11.9 中 V_1 为制导站的运动速度，为具有普遍性假定速度 V_1 与水平面成 θ_1 角，由图 11.9 可以得出如下运动学方程组

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -V_1 \cos(\theta_1 - \varepsilon) + V \cos(\theta - \varepsilon) \\ R \frac{d\varepsilon}{dt} &= -V_1 \sin(\theta_1 - \varepsilon) + V \sin(\theta - \varepsilon) \end{aligned} \quad (11 - 68)$$

同样认为 V, V_1 和 R 均为已知时间函数，线性化后可得下列运动学传递函数：

$$\begin{aligned} W_{\theta\varepsilon}(S) &= \frac{V \cos(\theta - \varepsilon)}{Rs + \dot{R}} \\ W_{\theta_1\varepsilon}(S) &= \frac{-V_1 \cos(\theta_1 - \varepsilon)}{Rs + \dot{R}} \end{aligned} \quad (11 - 69)$$

如果制导站作水平直线运动，则上式中 $\theta_1 = 0$ 。

导弹采用遥控系统，更为复杂的运动学状态如图 11.12 所示，图中地面坐标系 $oxyz$ 为参考系，假设制导站作水平面运动，速度为 V_1 ，航向角为 Ψ_1 ；制导站雷达高低角为 ε_1 ，方位角为 β_1 。

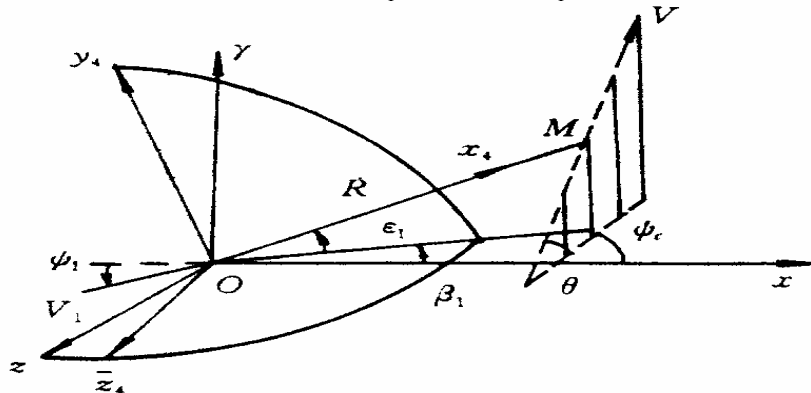


图 11.12 制导站运动的飞行状态

由图 11.12 可得导弹向径 R 的变化率为

$$\dot{R} = V \cos \eta - V_1 \cos \varepsilon_1 \cos(\psi_1 - \beta_1) \quad (11-70)$$

式中 η 向量 V 和 R 的夹角

因向量 V 和 R 在 $Oxyz$ 上的方向余弦分别为

$$\left. \begin{aligned} & \cos \theta \cos \psi_c, \sin \varepsilon_1, -\cos \theta \sin \psi_c \\ & \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1, \sin \varepsilon_1, -\cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 \end{aligned} \right\} \quad (11-71)$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \eta &= \cos \theta \cos \psi_c \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 + \sin \theta \sin \varepsilon_1 - \cos \theta \sin \psi_c \cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ &= \cos \theta \cos \varepsilon_1 \cos(\psi_1 - \beta_1) + \sin \theta \sin \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (11-72)$$

由速度 V 和 V_1 在 $R \cos \varepsilon_1$ 上的垂直分量, 可得到下列方程式

$$(R \cos \varepsilon_1) \dot{\beta}_1 = V \cos \theta \sin(\psi_c - \beta_1) - V_1 \sin(\psi_1 - \beta_1) \quad (11-73)$$

下面再来求高低角 ε_1 变化的微分方程。因为雷达坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 与地面坐标系 $Oxyz$ 的转换矩阵式(11-37)~(11-39), 可以写成

$$[x_4 \quad y_4 \quad z_4]^T = L_3(\varepsilon_1)L_2(\beta_1)[x \quad y \quad z]^T \quad (7-74)$$

此式展形后变为

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 & \sin \varepsilon_1 & -\cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ -\sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 & \cos \varepsilon_1 & \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (11-75)$$

导弹相对制导站的合成速度为 $\Delta V = (V - V_1)$, 它在坐标系 $Oxyz$ 三个轴上的分量为

$$(\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z)^T = (V \cos \theta \cos \psi_c - V_1 \cos \psi_1, V \sin \theta, -V \cos \theta \sin \psi_c + V_1 \sin \psi_1)^T \quad (11-76)$$

所以由矩阵方程式(11-76), 得速度 V 和 V_1 在 oy_4 轴上的分量为

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -V \cos \theta \cos \psi_c \sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 + V \sin \theta \cos \varepsilon_1 \\ &\quad - V \cos \theta \sin \psi_c \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 + V_1 \cos \psi_1 \sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 + V_1 \sin \psi_1 \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ &= V \sin \theta \cos \varepsilon_1 - V \cos \theta \sin \varepsilon_1 (\cos \psi_1 \cos \beta_1 + \sin \psi_1 \sin \beta_1) + V_1 \sin \varepsilon_1 (\cos \psi_1 \cos \beta_1 + \sin \psi_1 \sin \beta_1) \end{aligned} \quad (11-77)$$

由此可得

$$R \dot{\varepsilon}_1 = V \sin \theta \cos \varepsilon_1 - V \cos \theta \sin \varepsilon_1 \cos(\psi_c - \beta_1) + V_1 \sin \varepsilon_1 \cos(\psi_1 - \beta_1) \quad (11-78)$$

式(11-70), 式(11-73)和式(11-78)是导弹对于活动制导站的一般运动学方程组, 可归纳如下

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &= V \cos \eta - V_1 \cos \varepsilon_1 \cos(\psi_1 - \beta_1) \\ (R \cos \varepsilon_1) \dot{\beta}_1 &= V \cos \theta \sin(\psi_c - \beta_1) - V_1 \sin(\psi_1 - \beta_1) \\ R \dot{\varepsilon}_1 &= V \sin \theta \cos \varepsilon_1 - V \cos \theta \sin \varepsilon_1 \cos(\psi_c - \beta_1) \\ &\quad + V_1 \sin \varepsilon_1 \cos(\psi_1 - \beta_1) \end{aligned} \right\} \quad (11-79)$$

这一组运动学方程式是比较复杂的，但是根据线性化方法可求出运动学传递函数，这里就不再进行繁琐的推导。

如果制导站是固定的，移动速度 $V_1 = 0$ ，同时不以地面坐标系为基准，而是采用倾斜坐标来测量角度 ε_1 和 β_1 等，即以倾斜平面作为度量的基准；此外，还认为导弹的 ox_1 轴大体上指向导弹飞行的平均方向，则可以简化运动学方程组(11-79)。实际上选择导引方法，为了减小动态误差，无论是 ε_1 和 β_1 ，还是 ψ_c 和 θ 都是较小的量，因此式(11-79)可以简化成

$$\left. \begin{aligned} \dot{R} &\approx V \cos \theta \approx V \\ R \dot{\beta}_1 &\approx V(\psi_c - \beta_1) \\ R \dot{\varepsilon}_1 &\approx V \sin \theta - V \sin \varepsilon_1 \approx V(\theta - \varepsilon_1) \end{aligned} \right\} \quad (11-80)$$

式中所用角度符号虽同式(11-79)一样，但它们是在倾斜坐标系内测量的。这里只是为了书写方便，而没有改用新的符号。

当取 θ 和 ψ_c 作为运动学环节的输入量，取 ε_1 和 β_1 为输出量时，由方程组(11-80)线性化很易求出相应的运动学传递函数。线性化方程组(11-80)第3式，设 ε_1 之偏量为 $\Delta\varepsilon_1$ ，其结果为

$$\begin{aligned} R \Delta \dot{\varepsilon}_1 &= V(\Delta\theta - \Delta\varepsilon_1) \\ R \Delta \dot{\varepsilon}_1 + \dot{R} \Delta \varepsilon_1 &= \dot{R} \Delta\theta \end{aligned} \quad (11-81)$$

于是运动学传递函数为

$$W_{\theta\varepsilon}(s) = \frac{\Delta\varepsilon_1(s)}{\Delta\theta(s)} = \frac{\dot{R}}{Rs + \dot{R}} = \frac{1}{\frac{R}{\dot{R}}s + 1} \quad (11-82)$$

同理可得

$$W_{\psi_c\beta}(s) = \frac{\Delta\beta_1(s)}{\Delta\psi_c(s)} = \frac{1}{\frac{R}{\dot{R}}s + 1} \quad (11-83)$$

所得运动学传递函数也是一个非周期的环节。

§11.6 遥控空间扭角的计算和动态分析

一、遥控空间扭角

弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 与雷达坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 不重合时，在 Oy_4z_4 平面内形成角 γ_3 ，称之为遥控空间扭角，见图 11.13。其方向的确定： Oy_1 的投影转向 Oy_4 ，符合右手规则的扭角为正。

由于弹体坐标系和雷达坐标系之间存在着扭角 γ_3 ，在图 11.13 中由雷达测出高低角之差，形成导引误差信号 ε_c 后，还必须计算空间扭角 γ_3 。如果雷达坐标系还给出方位角之差，形成导引误差信号 β_c 后，同样也要考虑空间扭角的影响，因为它关系着导弹的控制精度和系统的稳定性。

考虑空间扭角的情况下，由导引误差信号 ε_c 和 β_c 变换成纵向遥控指令 K_1 及航向遥控指令 K_2 时，参照图 11.14 可得以下变换公式

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \varepsilon_c \cos \gamma_3 + \beta_c \sin \gamma_3 \\ K_2 &= \varepsilon_c \sin \gamma_3 + \beta_c \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (11 - 84)$$

值得提出的是，遥控空间扭角 γ_3 不同于式(11-64)中的偏斜角 γ_2 ，后者是弹道坐标系 oy_2 轴投影与雷达坐标系 oy_4 轴之间在 oy_4z_4 平面内的夹角。

为计算遥控空间扭角 γ_3 可作以下坐标变换。假定弹体坐标系与雷达坐标系在发射 Δt 时间后，相互关系如图 7.13 所示。因此，

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = L_3(\eta_1)L_2(\xi_1)L_1(\gamma_3) \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (11 - 85)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \eta_1 \cos \xi_1 & \sin \eta_1 \cos \xi_1 & -\sin \xi_1 \\ \cos \eta_1 \sin \xi_1 \sin \gamma_3 - \sin \eta_1 \cos \gamma_3 & \cos \eta_1 \cos \gamma_3 + \sin \eta_1 \sin \xi_1 \sin \gamma_3 & \cos \xi_1 \sin \gamma_3 \\ \cos \eta_1 \sin \xi_1 \cos \gamma_3 + \sin \eta_1 \sin \gamma_3 & \sin \eta_1 \sin \xi_1 \cos \gamma_3 - \cos \eta_1 \sin \gamma_3 & \cos \xi_1 \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (11 - 86)$$

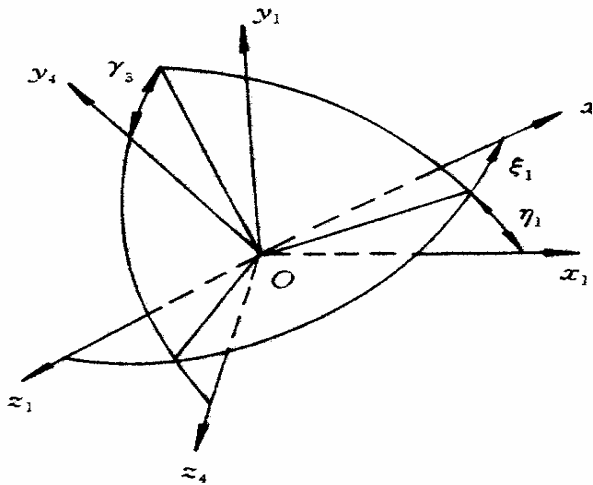


图 11.13 雷达坐标系与弹体坐标系

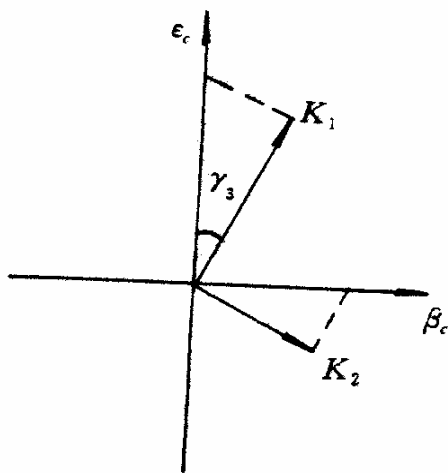


图 11.14 空间扭角

在飞行中，实际上 η_1, ξ_1, γ_3 都很小，可近似认为 $\sin \eta_1 \approx \eta_1, \sin \xi_1 \approx \xi_1, \sin \gamma_3 \approx \gamma_3, \cos \eta_1 \approx 1, \cos \xi_1 \approx 1, \cos \gamma_3 \approx 1$ ，并略去二阶小量，于是式(11-86)简化成：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & -\xi_1 \\ -\eta_1 & 1 & \gamma_3 \\ \xi_1 & -\gamma_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (11-87)$$

假设导弹在时间 t_1 受控，这时弹体坐标系 $Ox_1y_1z_1$ 、雷达坐标系 $Ox_4y_4z_4$ 和发射坐标系 $Ox_5y_5z_5$ 相重合。导弹发射后，发射坐标系 $Ox_5y_5z_5$ 的位置不变， ϵ_f 为常值，见图 11.15。飞行到时间 t_2 ， $\Delta t = t_2 - t_1$ ，弹体坐标系相对于发射坐标系形成了 σ_3 和 σ_4 角，坐标转换矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \sigma_3 \cos \sigma_4 & \sin \sigma_3 & -\sin \sigma_3 \cos \sigma_4 \\ -\cos \sigma_3 \sin \sigma_4 & \cos \sigma_4 & \sin \sigma_3 \sin \sigma_4 \\ \sin \sigma_3 & 0 & \cos \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (11-88)$$

若将式(11-87)的坐标向量 $[x_4 \ y_4 \ z_4]^T$ 也变换成由坐标向量 $[x_5 \ y_5 \ z_5]^T$ 表示，按照已定义的几种坐标系，必须先将发射坐标系变换到地面坐标系，再转换到雷达坐标系，其关系如下

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \epsilon_1 \cos \beta_1 & \sin \epsilon_1 & -\cos \epsilon_1 \sin \beta_1 \\ -\sin \epsilon_1 \cos \beta_1 & \cos \epsilon_1 & \sin \epsilon_1 \sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \epsilon_f & -\sin \epsilon_f & 0 \\ \sin \epsilon_f & \cos \epsilon_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (11-89)$$

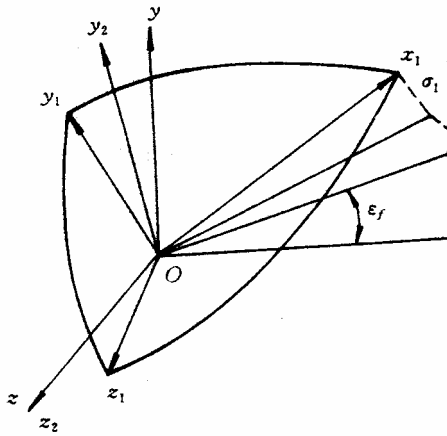


图 7.15 弹体坐标系与发射坐标系

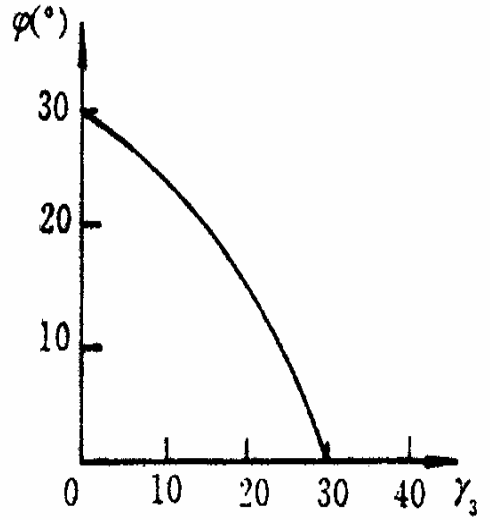


图 7.16 相稳定余量

将上列结果代入式(11 - 87)，得到

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \eta_1 & -\xi_1 \\ -\eta_1 & 1 & \gamma_3 \\ \xi_1 & -\gamma_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 & \sin \varepsilon_1 & -\cos \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ -\sin \varepsilon_1 \cos \beta_1 & \cos \varepsilon_1 & \sin \varepsilon_1 \sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon_f & -\sin \varepsilon_f & 0 \\ \sin \varepsilon_f & \cos \varepsilon_f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5 \\ y_5 \\ z_5 \end{bmatrix} \quad (11 - 90)$$

所以，在坐标转换中下列等式成立

$$L_3(\sigma_4)L_2(\sigma_3) = L_3(\eta_1)L_2(\xi_1)L_1(\gamma_3)L_3(\varepsilon_1)L_2(\beta_1)L_3(\varepsilon_f)$$

解矩阵方程并令等式两端对应元素项相等，可以写出以下关系式

$$\left. \begin{aligned} \sin \sigma_3 &= e_{11} + e_{12}\xi_1 + e_{13}\gamma_3 \\ \sin \sigma_4 &= e_{21} + e_{22}\eta_1 + e_{23}\xi_1 \\ \cos \sigma_3 &= e_{31} + e_{32}\xi_1 + e_{33}\gamma_3 \\ \cos \sigma_4 &= e_{41} + e_{42}\eta_1 + e_{43}\gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (11 - 91)$$

$$\left. \begin{aligned} -\sin \sigma_3 \cos \sigma_4 &= e_{51} + e_{52}\eta_1 + e_{53}\xi_1 \\ -\sin \sigma_4 \cos \sigma_3 &= e_{61} + e_{62}\eta_1 + e_{63}\gamma_3 \\ 0 &= e_{71} + e_{72}\xi_1 + e_{73}\gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (11 - 92)$$

其中各系数

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \cos \varepsilon_f \sin \beta_1 \\
e_{12} &= \cos \varepsilon_f \cos \beta_1 \cos \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_f \sin \varepsilon_1 \\
e_{13} &= \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_f \cos \varepsilon_1 \\
e_{21} &= \cos \varepsilon_f \sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_f \cos \beta_1 \cos \varepsilon_1 \\
e_{22} &= \sin \varepsilon_f \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_f \cos \varepsilon_1 \\
e_{23} &= \sin \varepsilon_f \sin \beta_1 \\
e_{31} &= \cos \beta_1 \\
e_{32} &= -\sin \beta_1 \cos \varepsilon_1 \\
e_{33} &= -\sin \beta_1 \sin \varepsilon_1 \\
e_{41} &= \sin \varepsilon_f \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 + \cos \varepsilon_f \cos \varepsilon_1 \\
e_{42} &= \sin \varepsilon_f \cos \beta_1 \cos \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_f \sin \varepsilon_1 \\
e_{43} &= -\sin \varepsilon_f \sin \beta_1 \\
e_{51} &= -\sin \beta_1 \cos \varepsilon_1 \\
e_{52} &= \sin \beta_1 \sin \varepsilon_1 \\
e_{53} &= -\cos \beta_1 \\
e_{61} &= -\cos \varepsilon_f \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 + \sin \varepsilon_f \cos \varepsilon_1 \\
e_{62} &= -\cos \varepsilon_f \cos \beta_1 \cos \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_f \sin \varepsilon_1 \\
e_{63} &= \cos \varepsilon_f \sin \beta_1 \\
e_{71} &= -\sin \varepsilon_f \sin \beta_1 \\
e_{72} &= \cos \varepsilon_f \sin \varepsilon_1 - \sin \varepsilon_f \cos \varepsilon_1 \cos \beta_1 \\
e_{73} &= -\sin \varepsilon_f \cos \beta_1 \sin \varepsilon_1 - \cos \varepsilon_f \cos \varepsilon_1
\end{aligned}$$

导弹飞行时发射高低角 ε_f 为常数，在雷达测出高低角 ε_1 和方位角 β_1 后，上列各系数为已知值。因此，由式(11 - 92)的三个代数方程可以计算出扭角 γ_3 。

按此方法求得的扭角 γ_3 ，其数值比较精确，但是计算过程比较复杂，必须设置专用的计算机程序。

为了简化控制(制导)系统的结构，若不采用专门计算机程序计算扭角时，可以采用以下近似方法。如果导弹的飞行时间很短，不考虑弹体坐标系的变动，同时认为雷达天线跟随目标一起运动，并绕地面基准坐标系的 oy_0 轴旋转，角速度为方位角导数 $\dot{\beta}_1$ ，它在 ox_1 轴上的角速度分量 $-\dot{\beta}_1 \sin \varepsilon_f$ ，从而产生扭角 γ_3 ，由时间 t_1 到时间 t_2 ，其值为

$$\gamma_3 = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_1 \sin \varepsilon_f dt \quad (11 - 93)$$

但是，这种计算扭角的方法是近似的，因为雷达坐标系的位置由目标状态来决定，而弹体坐标系的位置由力矩作用来决定。由于坐标系转动的原因不一样，计算空间扭角 γ_3 时就应考虑这些因素，按上述坐标转换方法确定遥控空间扭角。

二、遥控空间扭角对动态性能的影响

设计实践说明：给坐标变换机构输送扭角 γ_3 值，可以减小导引误差，提高控制精度。因此，考虑空间扭角 γ_3 ，可以起到补偿控制精度的作用。此外，当导弹有偏斜角 γ_2 、且纵向运动和航向运动有交联时，采用空间扭角补偿在一定程度上还可提高系统的稳定性。为此，在遥控的纵向控制系统中(见图 11.8)，先定义几个开环传递函数。

以导弹在雷达坐标系内的高低角 $\Delta\varepsilon_1$ 为输入量，导引误差 $\Delta\varepsilon_c$ 为输出量，则有传递函数 $W_1(s) = \Delta\varepsilon_c / \Delta\varepsilon_1$ 。

首先，讨论偏斜角 γ_2 等于零的情况。这里有运动交联现象，根据式(11 - 64)，加速度 $a_{y4} = a_y$ 。作为近似处理，也无需计算空间扭角 γ_3 ，于是遥控指令 $K_1 = \varepsilon_c$ ，见式(11 - 84)。因此，以加速度 a_{y4} 为输入量，导弹的高低角偏量 ε 为输出量，又可获得一个开环传递函数 $W_{at}(s) = \varepsilon / a_{y4}$ 。

综上所述，在图 11.8 中由 $\Delta\varepsilon_1$ 到 ε 的象函数之比，也就是遥控的纵向开环传递函数为

$$W(s) = W_{a\varepsilon}(s)W_{ka}(s)W_1(s) \quad (11 - 94)$$

问题是偏斜角 γ_2 不可能恒等于零，运动交联现象是必然存在的。由于加速度 $a_{y4} \neq a_y$ ，导弹遥控的纵向开环传递函数也就不同于式(11 - 94)。在偏斜角 $\gamma_2 \neq 0$ ，且存在空间扭角 γ_3 的情况下，为了与上述高低角偏量 ε 相区别，此时由加速度 a_{y4} 产生的高低角偏量用 ε_d 表示。导弹的 ε_d 角为

$$\varepsilon_d = W_{a\varepsilon}(s)a_{y4} = W_{a\varepsilon}(s)(a_y \cos \gamma_2 - a_z \sin \gamma_2) \quad (11 - 95)$$

根据式(11 - 84)纵向加速度 a_y 又可写成

$$a_y = W_{ka}(s)K_1 = W_{ka}(s)(\varepsilon_c \cos \gamma_3 + \beta_c \sin \gamma_3)$$

同理

$$a_z = W_{ka}(s)K_2 = W_{ka}(s)(-\varepsilon_c \sin \gamma_3 + \beta_c \cos \gamma_3)$$

由于纵向扰动运动和航向扰动运动具有相同模式，不仅两者 $W_{ka}(s)$ 相同，传递函数 $W_1(s)$ 也是一样的，因此纵向和航向加速度又可写成

$$a_y = W_{ka}(s)W_1(s)(\Delta\varepsilon_1 \cos \gamma_3 + \beta_c \sin \gamma_3) \quad (11 - 96)$$

$$a_z = W_{ka}(s)W_1(s)(-\Delta\varepsilon_1 \sin \gamma_3 + \beta_1 \cos \gamma_3) \quad (11 - 97)$$

将式(11—96)和(11 - 97)式代入式(11 - 95), 得到

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= W_{ae}(s)W_{ka}(s)W_1(s)(\Delta\varepsilon_1 \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 + \Delta\beta_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_3 + \Delta\varepsilon_1 \sin \gamma_2 \sin \gamma_3 - \Delta\beta_1 \sin \gamma_2 \cos \gamma_3) \\ &= W(s)(\Delta\varepsilon_1 \cos(\gamma_2 - \gamma_3) - \Delta\beta_1 \sin(\gamma_2 - \gamma_3)) \end{aligned} \quad (11 - 98)$$

式中 $W(s)$ 由式(11 - 94)表示。同理, 可以推得方位偏角 β_d 为

$$\beta_d = -W(s)(\Delta\varepsilon_1 \sin(\gamma_2 - \gamma_3) + \Delta\beta_1 \cos(\gamma_2 - \gamma_3)) \quad (11 - 99)$$

实际上两偏量 β_d 和 $\Delta\beta_1$ 可以相同, 因此, 由式(11 - 99)可将 β_d 表示成

$$\beta_d = -\frac{W(s) \sin(\gamma_2 - \gamma_3) \Delta\varepsilon_1}{1 + W(s) \cos(\gamma_2 - \gamma_3)} \quad (11 - 100)$$

将式(11 - 100)代入式(11 - 98), 求得高低角偏量如下

$$\begin{aligned} \varepsilon_d &= W(s)(\cos(\gamma_2 - \gamma_3) + \frac{W(s) \sin^2(\gamma_2 - \gamma_3)}{1 + W(s) \cos(\gamma_2 - \gamma_3)}) \Delta\varepsilon_1 \\ &= W(s) \left[\frac{\cos(\gamma_2 - \gamma_3) + W(s)}{1 + \cos(\gamma_2 - \gamma_3)W(s)} \right] \Delta\varepsilon_1 \end{aligned} \quad (11 - 101)$$

此式说明, 存在空间扭角 γ_3 , 既发生运动交联现象后, 一个新的导弹遥控的纵向开环传递函数 $W_\gamma(s)$ 应为

$$W_\gamma(s) = \frac{\varepsilon_d}{\Delta\varepsilon_1} = W(s) \left[\frac{\cos(\gamma_2 - \gamma_3) + W(s)}{1 + \cos(\gamma_2 - \gamma_3)W(s)} \right] \quad (11 - 102)$$

由此可以看出 $W_\gamma(s)$ 与 $W(s)$ 的区别。借助开环传递函数 $W_\gamma(s)$ 说明闭环情况下导弹纵向扰动运动的动态性质, 就可显示遥控空间扭角 γ_3 所产生的影响。这里按三种情况分别简述如下

(1) 如果导弹无偏斜角, $\gamma_2 = 0$, 可以不进行空间扭角补偿, $\gamma_3 = 0$, 于是,

$$W_\gamma(s) = W(s), \text{ 证明导弹没有运动交联现象。}$$

(2) 如果导弹有偏斜角 γ_2 , 但不进行扭角补偿, $\gamma_3 = 0$, 因而式(11 - 102)变为

$$W_\gamma(s) = W(s) \left[\frac{\cos \gamma_2 + W(s)}{1 + \cos \gamma_2 W(s)} \right] \quad (11 - 103)$$

假设 $W_\gamma(s)$ 的幅频等于 1, 截止频率为 ω_1 , 相稳定余量为 φ_1 , 于是可得

$$W_\gamma(j\omega_1) = e^{-j(\pi-\varphi_1)} = He^{j\varphi} \left[\frac{\cos\gamma_2 + He^{j\varphi}}{1 + \cos\gamma_2 He^{j\varphi}} \right] \quad (11-104)$$

式中 $He^{j\varphi} = W(j\omega_1)$ ，即 $W(s)$ 在 ω_1 下的幅相特性。将上式分解为虚部和实部。因等号两边虚数部分等于虚数部分，实部等于实部，可得以下两式

$$\begin{aligned} & -\cos\varphi_1(1 + H\cos\gamma_2\cos\varphi) + H\sin\varphi_1\cos\gamma_2\sin\varphi \\ & = H\cos\varphi(\cos\gamma_2 + H\cos\varphi) - H^2\sin^2\varphi - H\cos\gamma_2\sin\varphi\cos\varphi_1 \\ & \quad - \sin\varphi_1(1 + H\cos\gamma_2\cos\varphi) \end{aligned} \quad (11-105)$$

$$= H\sin\varphi(\cos\gamma_2 + H\cos\varphi) + H^2\sin\varphi\cos\varphi$$

取平方后相加，则有

$$(1 + H^2 + 2H\cos\gamma_2\cos\varphi)(1 - H^2) = 0 \quad (11-106)$$

由于

$$(1 + H^2 + 2H\cos\gamma_2\cos\varphi) \neq 0 \quad (11-107)$$

所以

$$1 - H^2 = 0; \quad H = 1 \quad (11-108)$$

所得结果说明， $W_\gamma(j\omega_1)$ 的幅频为 1 时， $W(j\omega_1)$ 的幅频 H 也等于 1，运动交联时截止频率不变。

在式(11—105)中消去 $\cos\varphi_1$ ，取 $\varphi = -(\pi - \varphi_2)$ ，可得

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \frac{2(\cos\gamma_2 + \cos\varphi_2)}{1 + \cos^2\gamma_2 - 2\cos\gamma_2\cos\varphi_2} \quad (11-109)$$

式中， φ_1 为无运动交联时 $W(j\omega_1)$ 相稳定余量。

若取无通道联系的相稳定余量 $\varphi_2 = 30^\circ$ ，按式(11-109)可以找到 φ_1 与 γ_3 的关系，见图 11.16。从图中可以看出 φ_1 始终小于 30° 。空间扭角 γ_3 愈大，相稳定余量 φ_1 愈小。因此，交联现象减小了系统的相稳定余量，甚至使系统不稳定。

(3) 由于导弹在飞行中将不可避免地出现偏角 γ_2 ，为了提高控制精度和相稳定余量，必须进行扭角 γ_3 补偿。

因为导弹的迎角和侧滑角不大，近似分析可以认为偏角 γ_2 即为扭角 γ_3 。因此，采用补偿扭角 γ_3 后，在(11-102)式中就有可能使 $W_\gamma(s) = W(s)$ 。但是，通常扭角补偿只是在一定范围内进行，例如式(11-93)近似计算，补偿不足之量对系统将有一定的影响。如果影响很小，导弹虽有偏斜角，其动态性能与无偏斜情况相似。

§11.7 遥控导引的重力影响和动态误差

没有控制时导弹沿着自由弹道飞行。为了使导弹从自由弹道转向理想弹道飞行，必须对导弹进行控制。以某地空导弹为例，如图 11.17，只有在出现高低角偏差 $\Delta\varepsilon_1$ ，或线偏差 h_ε 之后，导弹才能通过舵面偏转来改变它的飞行弹道。

为了便于计算重力影响和动态误差，略去控制系统的惯性，由线偏差 h_ε 到舵偏角 δ_z 可由简单关系式表示为

$$\delta_z = K_y h_\varepsilon \quad (11 - 110)$$

式中 K_y 为控制系统有关部分的放大系数。

控制的目的是要在导弹上产生一定的法向加速度，使导弹转向沿着有控情况下的实际弹道飞行。在稳定的情况下，所需法向加速度为

$$W_y = V \frac{d\theta}{dt} = (P + Y^\alpha) \frac{\alpha}{m} - g \cos \theta \quad (11 - 111)$$

因为

$$\alpha = -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} \delta_z = -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} K_y h_\varepsilon \quad (11 - 112)$$

所以

$$W_y = -(P + Y^\alpha) \frac{1}{m} \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} K_y h_\varepsilon - g \cos \theta \quad (11 - 113)$$

可见，在有控的情况下，为了产生法向加速度而必须存在线偏差。因此，导弹飞行的实际弹道将偏离于理想弹道。

再令

$$h_\varepsilon = h_{\varepsilon_1} + h_{\varepsilon_2} \quad (11 - 114)$$

并代入式(11 - 113)中，得到

$$W_y = \left[-(P + Y^\alpha) \frac{1}{m} \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} K_y h_{\varepsilon_2} \right] + \left[-(P + Y^\alpha) \frac{1}{m} \frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} K_y h_{\varepsilon_1} - g \cos \theta \right] \quad (11 - 115)$$

若上式右端第二项为零，则有

$$h_{\varepsilon_1} \left[-\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} \frac{P + Y^\alpha}{mV} VK_y \right] = g \cos \theta \quad (11 - 116)$$

所以

$$h_{\varepsilon_1} = \frac{1}{K_\alpha K_y V} g \cos \theta \quad (11 - 117)$$

式中 h_{ε_1} 重力影响误差，它说明由于重力法向分量的存在，使实际弹道偏离了理想弹道。由于该误差的存在，就迫使舵面偏转，力图克服重力法向分量的影响。

如果能够按照式(11 - 117)预先给控制系统送入一个相当于 h_{ε_1} 的信号，见图 11.17，图中 $W_1(s)$ 为所有控制部分与导弹动力学、运动学环节串联后的开环传递函数，那么，这就有可能使舵面转动 δ_{ε_1} 角，而不出现上述误差，并使导弹沿理想弹道飞行。换句话说，信号 h_{ε_1} 起到了补偿重力影响误差的作用，并称 h_{ε_1} 为重力影响补偿信号。

对于地空导弹来讲，要对所有飞行情况进行准确补偿是有困难的，一般只能在目标遭遇区进行比较足够的补偿。

由式(11 - 116)右端第一项可得

$$h_{\varepsilon_2} = \frac{1}{K_\alpha K_y V} W_y \quad (11 - 118)$$

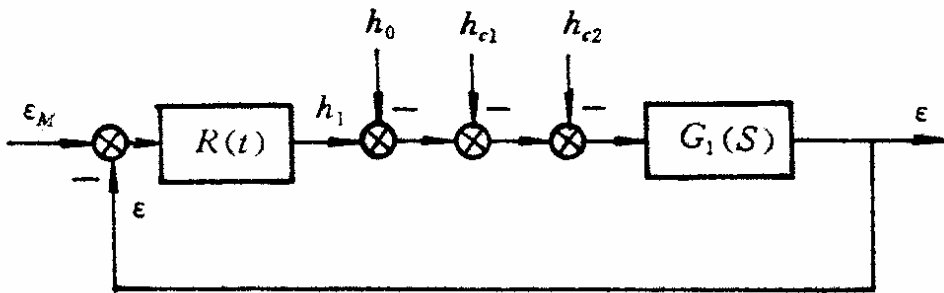


图 11.17 误差及补偿

对于三点导引法，当目标作直线飞行时，法向加速度 W_y 为

$$W_y = \left[2V - 2V \frac{R\dot{R}_m}{\dot{R}R_m} - \frac{R\dot{V}}{\dot{R}V} \right] \dot{\varepsilon}_m \quad (11 - 119)$$

式中 R_T 为目标斜距； ε_T 为目标高低角。命中目标时， $R = R_T$

于是

$$W_y = \left[2V - 2V \frac{\dot{R}_T}{\dot{R}} - \frac{R\dot{V}}{\dot{R}V} \right] \dot{\varepsilon}_T \quad (11 - 120)$$

半前置点法命中目标时的法向加速度为

$$W_y = \left[V - \frac{R\dot{V}}{2\dot{R}} + \frac{R\Delta R_V}{2\dot{R}\Delta\dot{R}} \right] \dot{\varepsilon}_T \quad (11 - 121)$$

可见动态误差 h_{ε_2} 与 $\dot{\varepsilon}_T$ 成正比，其比例系数是一个与时间 t 有关的函数，即

$$h_{\varepsilon_2} = X(t)\dot{\varepsilon}_T \quad (11 - 122)$$

如果在控制系统图 11.17 上事先附加动态误差补偿信号 h_{ε_2} ，就有可能消除动态误差。当补偿信号完全等于动态误差 h_{ε_2} 时，导弹就有可能沿着理想弹道飞行。由于 $X(t)$ 是一个任意的时间函数，而工程设计只能确定 $X(t)$ 的一个近似表达式，所以补偿动态误差也是有限的。