

第二章 导弹运动方程组的建立

目的要求：

- 1、掌握建立导弹运动方程常用的坐标系定义及其引用目的，坐标系之间的转换方法、坐标系之间的描述关系；
- 2、掌握作为刚体的导弹六自由度运动方程的建立方法；
- 3、能够根据实际情况对方程进行必要的简化处理；
- 4、掌握过载的概念，过载与弹道设计、导弹结构和总体设计的关系。

重点、难点：

- 1、描述坐标系之间关系的角度定义；
- 2、相对导数和绝对导数的关系；
- 3、绕质心转动的动力学方程；
- 4、可用过载、需用过载的概念，计算方法与弹道设计和结构、总体设计的关系。

教学方法：

- 1、板书推导结合多媒体演示教学；
- 2、配合弹道设计大练习；
- 3、上机进行弹道编程实践。

教学时数：

- 课堂：8 学时；
上机：8 学时；
大练习：4 学时。

本章重点介绍的内容包括：导弹运动方程组的建模方法、常用坐标系及其变换关系、完整的导弹运动方程组、简化的导弹运动方程(平面运动和质心运动)、过载、四元数在飞行力学中的应用等。

§ 2-1 导弹运动的建模基础

一、基本定理

对于刚体，可以应用牛顿定律来研究质心的移动，用动量矩定理研究刚体绕质心的转动。

$$m \frac{dV}{dt} = F$$
$$\frac{dH}{dt} = M$$

式中 F ——作用于刚体上的合外力；
 M ——外力对刚体质心的合力矩。

值得注意的是，上述定理的应用是有条件的：第一，运动物体是常质量的刚体；第二，运动是在惯性坐标系中考察的，即描述刚体运动应采用绝对运动参数，而不是相对运动参数。

二、导弹运动建模的简化处理

一般在研究导弹运动规律时，为使问题简化，可以把导弹质量与喷射出的燃气质量合在

一起考虑，转换为一个常质量系，即采用所谓的“固化原理(或刚化原理)”：在任意研究瞬时，将变质量系的导弹视为虚拟刚体，把该瞬时导弹所包含的所有物质固化在虚拟的刚体上。同时，忽略一些影响导弹运动的次要因素，如：弹体结构的弹性变形、哥氏惯性力(液体发动机内流动液体因导弹的转动而产生的惯性力)、变分力(由液体发动机内流体的非定常运动引起的力)。

采用“固化原理”后，某一研究瞬时的变质量导弹运动方程可简化成常质量刚体的方程形式，用该瞬时的导弹质量 $m(t)$ 取代原来的常质量 m 。关于导弹绕质心转动的研究也可以用类似的方法处理。这样，导弹运动方程的矢量表达式可写成

$$m(t) \frac{dV}{dt} = F$$

$$\frac{dH}{dt} = M$$

大量实践表明，采用上述简化方法，具有较高的精度，能满足大多数情况下研究问题的需要。

另外，对于近程有翼导弹而言，在建立导弹运动方程时，通常将大地当作静止的平面，也就是不考虑地球的曲率和旋转。这样的处理大大简化了导弹的运动方程形式。

§ 2-2 常用坐标系及其变换

一、坐标系定义

导弹飞行力学中经常用到的坐标系有弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 、速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 、地面坐标系 $Axyz$ 和弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ ，它们都是右手直角坐标系。

(一) 地面坐标系

地面坐标系 $Axyz$ 与地球固联，原点 A 通常取导弹质心在地面(水平面)上的投影点， Ax 轴在水平面内，指向目标(或目标在地面的投影)为正； Ay 轴与地面垂直，向上为正； Az 轴按右手定则确定，如图 2.1 所示。为了便于进行坐标变换，通常将地面坐标系平移，即：原点 A 移至导弹质心 o 处，各坐标轴平行移动。

对于近程战术导弹而言，地面坐标系就是惯性坐标系。主要是用来作为确定导弹质心位置和空间姿态的基准的。

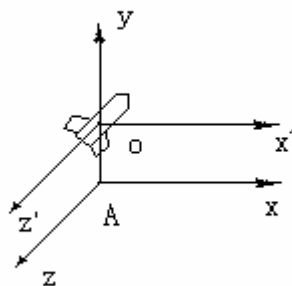


图 2.1 地面坐标系 $Axyz$

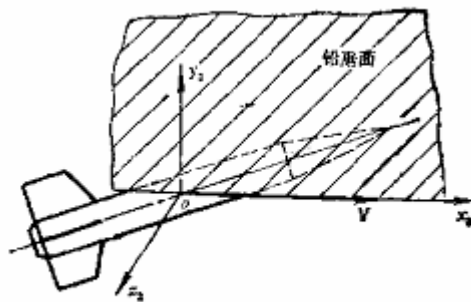


图 2.2 弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 的定义

(二) 弹道坐标系

弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 原点 o 取在导弹的质心上； ox_2 轴同导弹质心的速度矢量 V 重合（即与速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 的 ox_3 轴完全一致）； oy_2 轴位于包含速度矢量 V 的铅垂平面内，且垂直 ox_2 轴，向上为正； oz_2 轴按照右手定则确定，如图 2.2 所示。

显然，弹道坐标系与导弹的速度矢量 V 固联，是一个动坐标系。该坐标系主要用于研究导弹质心的运动特性，在以后的研究中将会发现，利用该坐标系建立的导弹质心运动的动力学方程，在分析、研究弹道特性时比较简单清晰。

(三) 速度坐标系 $ox_3y_3z_3$

原点 O 取在导弹的质心上； ox_3 轴与速度矢量 V 重合； oy_3 轴位于弹体纵向对称面内与 ox_3 轴垂直，向上为正； oz_3 轴垂直于 x_3oy_3 平面，其方向按右手定则确定(如图 1.1 所示)。此坐标系与导弹速度矢量固联，是一个动坐标系。

速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 是动坐标系，常用来研究作用于导弹上的空气动力 R 。该力在速度坐标系各轴上的投影分量就是所谓的阻力 X 、升力 Y 和侧向力 Z 。

(四) 弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$

原点 O 取在导弹的质心上； ox_1 轴与弹体纵轴重合，指向头部为正； oy_1 轴在弹体纵向对称平面内，垂直于 ox_1 轴，向上为正； oz_1 轴垂直于 x_1oy_1 平面，方向按右手定则确定(如图 1.1 所示)。此坐标系与弹体固联，也是动坐标系。

弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与弹体固连，随导弹在空间运动。它与地面坐标系配合，可以确定弹体的姿态。另外，研究作用在导弹上的推力、推力偏心形成的力矩以及气动力矩时，利用该坐标系也比较方便。

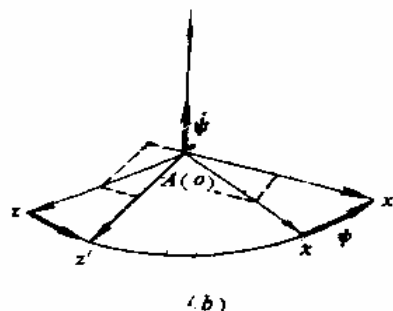
二、坐标系变换

以地面坐标系与弹体坐标系为例，分析一下坐标变换的过程以及相应的坐标变换矩阵。

(一) 地面坐标系与弹体坐标系之间的变换矩阵

将地面坐标系 $Axyz$ 平移，使原点 A 与弹体坐标系的原点 o 重合。弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 相对地面坐标系 $Axyz$ 的方位，可用三个姿态角来确定，它们分别为偏航角 ψ 、俯仰角 ϑ 、滚转角（又称倾斜角） γ ，如图 2.3(a)所示。其定义如下：

偏航角 ψ : 导弹的纵轴 ox_1 在水平面上的投影与地面坐标系 Ax 轴之间的夹角, 由 Ax 轴逆时针方向转至导弹纵轴的投影线时, 偏航角 ψ 为正 (转动角速度方向与 Ay 轴的正向一致), 反之为负。



俯仰角 ϑ : 导弹的纵轴 ox_1 与水平面之间的夹角, 若导弹纵轴在水平面之上, 则俯仰角 ϑ 为正 (转动角速度方向与 Az' 轴的正向一致), 反之为负。

滚转角 γ : 导弹的 oy_1 轴与包含弹体纵轴 ox_1 的铅垂平面之间的夹角, 从弹体尾部顺 ox_1 轴往前看, 若 oy_1 轴位于铅垂平面的右侧, 形成的夹角 γ 为正 (转动角速度方向与 Ox_1 轴的正

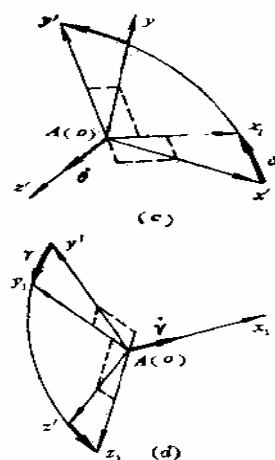
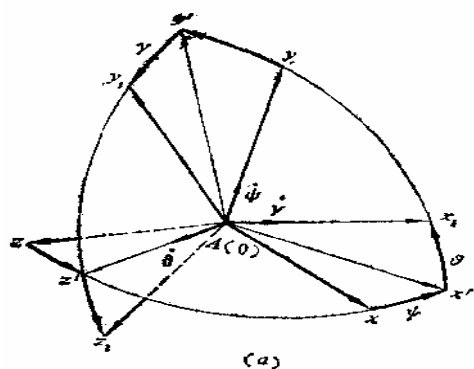


图2.3 坐标系 $Axyz$ 与 $ox_1y_1z_1$ 相对关系

向一致), 反之为负。

以上定义三个角度, 通常称为欧拉角, 又称为弹体的姿态角。借助于它们可以推导出地面坐标系 $Axyz$ 到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 的变换矩阵 $L(\psi, \vartheta, \gamma)$ 。具体过程如下:

先将地面坐标系 $Axyz$ 绕 Ay 轴旋转 ψ 角, 形成过渡坐标系 $Ax'y'z'$ (图 2.3b)。

若某矢量在地面坐标系 $Axyz$ 中的分量为 x, y, z , 分量列阵为 $(x \ y \ z)^T$, 则转换到坐标系 $Ax'y'z'$ 后的分量列阵为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y \\ z' \end{pmatrix} = L_y(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

式中,

$$L_y(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

称为绕 Ay 轴转过 ψ 角的基元变换矩阵。

再将坐标系 $Ax'y'z'$ 绕 Az' 轴旋转 ϑ 角，组成新的坐标系 $Ax_1y_1z_1'$ (图 2.3c)。同样，得到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = L_z(\vartheta) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (2-3)$$

其中，基元变换矩阵

$$L_z(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

最后将坐标系 $Ax_1y_1z_1'$ 绕 Ax_1 轴转过 γ 角，即得到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ (图 2.3d)。相应的分量列阵存在如下关系：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L_x(\gamma) \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} \quad (2-5)$$

式中的基元变换矩阵

$$L_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2-6)$$

由以上推导可知，要将某矢量在地面坐标系 $Axyz$ 中的分量 x, y, z 转换到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 中，只需将式(2-1)和(2-3)代入(2-5)即可得到：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L_x(\gamma) L_z(\vartheta) L_y(\psi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

令

$$L(\psi, \vartheta, \gamma) = L_x(\gamma) L_z(\vartheta) L_y(\psi) \quad (2-8)$$

则式(2-7)又可写成

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L(\psi, \vartheta, \gamma) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

$L(\psi, \vartheta, \gamma)$ 称为地面坐标系到弹体坐标系的坐标变换矩阵。将式(2-2)、(2-4)、(2-6)代入(2-8)式中，则有

$$L(\psi, \vartheta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\sin \vartheta \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \vartheta \cos \gamma & \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \\ \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma & -\sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

由上述过程可以看出，两个坐标系之间的坐标变换矩阵就是各基元变换矩阵的乘积，且基元变换矩阵相乘的顺序与坐标系旋转的顺序相反（左乘）。根据这一规律，我们可以直接写出任何两个坐标系之间的变换矩阵。关于基元变换矩阵的写法也是有规律可循的，请读者自行总结。

如果已知某矢量在弹体坐标系中的分量为 x_1, y_1, z_1 ，那么，在地面坐标系中的分量可按下列式计算：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L^{-1}(\psi, \vartheta, \gamma) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

而且， $L^{-1}(\psi, \vartheta, \gamma) = L^T(\psi, \vartheta, \gamma)$ ，因此，坐标变换矩阵是规范化正交矩阵，它的元素满足如下条件：

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 l_{ik} l_{jk} &= \delta_{ij} \\ \sum_{k=1}^3 l_{ki} l_{kj} &= \delta_{ij} \\ \delta_{ij} &= 1, i = j \\ \delta_{ij} &= 0, i \neq j \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

另外，坐标变换矩阵还具有传递性：设想有三个坐标系 A、B、C，若 A 到 B、B 到 C 的变换矩阵分别为 L_{AB} 、 L_{BC} ，则 A 到 C 的变换矩阵

$$L_{AC} = L_{AB} L_{BC} \quad (2-13)$$

(二) 地面坐标系与弹道坐标系之间的变换矩阵

地面坐标系 $Axyz$ 与弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 的变换，

可通过两次旋转得到，如图 2.4 所示。它们之间的相互方位可由两个角度确定，分别定义如下：

弹道倾角 θ ：导弹的速度矢量 V （即 ox_2 轴）与水平面 xAz 之间的夹角，若速度矢量 V 在水平面之上，则 θ 为正，反之为负。

弹道偏角 ψ_v ：导弹的速度矢量 V 在水平面 xAz

上的投影 ox' 与 Ax 轴之间的夹角，沿 Ay 轴向下

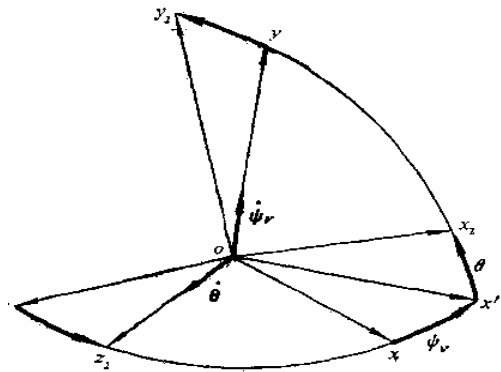


图2.4 坐标系 $Axyz$ 与 $ox_2y_2z_2$ 的相对关系

看，当 Ax 轴逆时针方向转到投影线 ox' 上时，弹道偏角 ψ_v 为正，反之为负。

显然地面坐标系到弹道坐标系的变换矩阵可通过两次旋转求得。首先将地面坐标系绕 Ay 轴旋转一个 ψ_v 角，组成过渡坐标系 $Ax'y_2z_2$ ，得到基元旋转矩阵

$$L_y(\psi_v) = \begin{pmatrix} \cos \psi_v & 0 & -\sin \psi_v \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi_v & 0 & \cos \psi_v \end{pmatrix} \quad (2-14)$$

然后，使过渡坐标系 $Ax'y_2z_2$ 绕 Az_2 轴旋转一个 θ 角，基元旋转矩阵为

$$L_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-15)$$

因此，地面坐标系与弹道坐标系之间的变换矩阵为

$$\begin{aligned} L(\psi_v, \theta) &= L_z(\theta)L_y(\psi_v) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi_v & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi_v \\ -\sin \theta \cos \psi_v & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi_v \\ \sin \psi_v & 0 & \cos \psi_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

若已知地面坐标系 $Axyz$ 中的列矢量 x, y, z ，求在弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 各轴上的分量

x_2, y_2, z_2 ，则利用上式可得

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = L(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

(三) 速度坐标系与弹体坐标系之间的变换矩阵

根据这两个坐标系的定义，速度坐标系与弹体坐标系之间的相对关系可由两个角度确定，分别定义如下：

攻角 ——速度矢量 V 在纵向对称平面上的投影与纵轴 ox_1 的夹角，当纵轴位于投影线的上方时，攻角为正；反之为负。

侧滑角 ——速度矢量 V 与纵向对称平面之间的夹角，若来流从右侧(沿飞行方向观察)流向弹体，则所对应的侧滑角为正；反之为负。

弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 相对于速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 的方位，完全由由攻角 α 和侧滑角 β 来确定。

根据攻角 α 和侧滑角 β 的定义，首先将速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 绕 oy_3 轴旋转一个 β 角，得

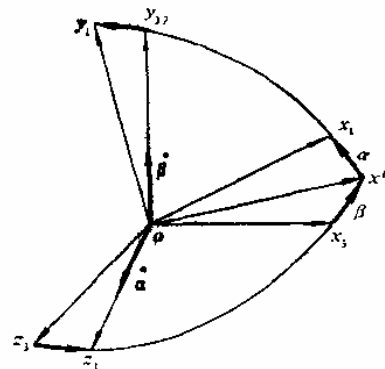


图2.5 弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 与速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 的相对关系

到过渡坐标系 $ox'y_3z_1$ (图 2.5), 其基元旋转矩阵为

$$L_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

然后, 再将坐标系 $ox'y_3z_1$ 绕 oz_1 轴旋转一个 α 角, 即得到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$, 对应的基元旋转矩阵为

$$L_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此, 速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 到弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 的变换矩阵可写成

$$L(\beta, \alpha) = L_z(\alpha)L_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

利用上式, 可将速度坐标系中的分量 x_3, y_3, z_3 转换到弹体坐标系中, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L(\beta, \alpha) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

(四) 弹道坐标系与速度坐标系之间的变换矩阵

由这两个坐标系的定义可知, ox_2 轴和 ox_3 轴都与速度矢量 \mathbf{V} 重合, 因此, 它们之间的

相互方位只用一个角参数 γ_v 即可确定。 γ_v 称为速度滚转角, 定义成位于导弹纵向对称平面 x_1oy_1 内的 oy_3 轴与包含速度矢量 \mathbf{V} 的铅垂面之间的夹角 (oy_2 轴与 oy_3 轴的夹角), 沿着速度方向 (从导弹尾部) 看, oy_2 轴顺时针方向转到 oy_3 轴时, γ_v 为正, 反之为负 (见图 2.6)。

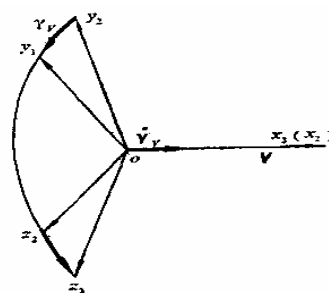


图 2.6 坐标系 $ox_2y_2z_2$ 与 $ox_3y_3z_3$ 的相对关系

这两个坐标系之间的变换矩阵就是绕 ox_2 轴旋转 γ_v 角所得的基元旋转矩阵

$$L(\gamma_v) = L_x(\gamma_v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_v & \sin \gamma_v \\ 0 & -\sin \gamma_v & \cos \gamma_v \end{pmatrix}$$

应用上式，可将弹道坐标系中的坐标分量变换到速度坐标系中去，即

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = L(\gamma_v) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2-18)$$

(五) 地面坐标系与速度坐标系之间的变换矩阵

以弹道坐标系作为过渡坐标系，将(2-16)式代入(2-18)式，即可得到地面坐标系与速度坐标系之间的变换关系

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = L(\gamma_v) L(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2-19)$$

因此，地面坐标系到速度坐标系的变换矩阵为

$$L(\psi_v, \theta, \gamma_v) = L(\gamma_v) L(\psi_v, \theta)$$

(六) 弹道坐标系与弹体坐标系之间的变换矩阵

以速度坐标系作为过渡坐标系，将(2-18)式代入(2-17)式，即可得到弹道坐标系与弹体坐标系之间的变换关系

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = L(\beta, \alpha) L(\gamma_v) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

因此，弹道坐标系到弹体坐标系的变换矩阵为

$$L(\gamma_v, \beta, \alpha) = L(\beta, \alpha) L(\gamma_v)$$

§ 2-3 导弹运动方程组

导弹运动方程组是描述作用在导弹上的力、力矩与导弹运动参数之间关系的一组方程。它由描述导弹质心运动和弹体姿态变化的动力学方程、运动学方程、导弹质量变化方程、角度几何关系方程和描述控制系统工作的方程所组成。

一、 动力学方程

前面已经提到，导弹的空间运动可看成变质量物体的六自由度运动，由两个矢量方程描述。为研究方便起见，通常将矢量方程投影到坐标系上，写成三个描述导弹质心运动的动力学标量方程和三个导弹绕质心转动的动力学标量方程。

(一) 导弹质心运动的动力学方程

在动坐标系中建立动力学方程，需要引用矢量的绝对导数和相对导数之间的关系，即

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\delta V}{\delta t} + \Omega \times V$$

式中 dV/dt ——在惯性坐标系（地面坐标系）中矢量 V 的绝对导数；

$\delta V/\delta t$ ——在动坐标系（弹道坐标系）中矢量 V 的相对导数。

导弹质心运动方程可写成

$$m\left(\frac{\delta V}{\delta t} + \Omega \times V\right) = F \quad (2-21)$$

将(2-21)式展开，得到

$$m \begin{pmatrix} \frac{dV_{x2}}{dt} + \Omega_{y2}V_{z2} - \Omega_{z2}V_{y2} \\ \frac{dV_{y2}}{dt} + \Omega_{z2}V_{x2} - \Omega_{x2}V_{z2} \\ \frac{dV_{z2}}{dt} + \Omega_{x2}V_{y2} - \Omega_{y2}V_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{pmatrix} \quad (2-22)$$

根据弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 的定义，速度矢量 V 与 ox_2 轴重合，故 V 在弹道坐标系各轴上的投影分量为

$$\begin{pmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-23)$$

由 § 2-2 知，地面坐标系经过两次旋转后与弹道坐标系重合，两次旋转的角速度大小分别为 $\dot{\psi}_v, \dot{\theta}$ ，则弹道坐标系相对地面坐标系的旋转角速度为两次旋转的角速度合成。它在 $ox_2y_2z_2$ 各轴上的投影可利用变换矩阵得到

$$\begin{pmatrix} \Omega_{x2} \\ \Omega_{y2} \\ \Omega_{z2} \end{pmatrix} = L(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_v \sin \theta \\ \dot{\psi}_v \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (2-24)$$

将(2-23)和(2-24)式代入(2-22)式中，得

$$\begin{pmatrix} m \frac{dV}{dt} \\ mV \frac{d\theta}{dt} \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{pmatrix} \quad (2-25)$$

式中 dV/dt ——加速度矢量在弹道切线(ox_2)上的投影，又称为切向加速度；

$V d\theta/dt$ ——加速度矢量在弹道法线(oy_2)上的投影，又称法向加速度；

$-V \cos \theta (d\psi_v/dt)$ ——加速度矢量在 oz_2 轴上的投影分量，也称为法向加速度。

如图 2.7 所示，法向加速度 $V d\theta/dt$ 使导弹质心在铅垂平面内作曲线运动。若在 t 瞬时，导弹位于 A 点，经 dt 时间间隔，导弹飞过弧长 ds 到达 B 点，弹道倾角的变化量为 $d\theta$ ，那么，这时的法向加速度为 $a_{y_2} = V^2/\rho$ ，其中，曲率半径又可写成

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{V}{\dot{\theta}} = \frac{V}{\dot{\theta}}$$

故

$$a_{y_2} = \frac{V^2}{\rho} = V \frac{d\theta}{dt} = V \dot{\theta}$$

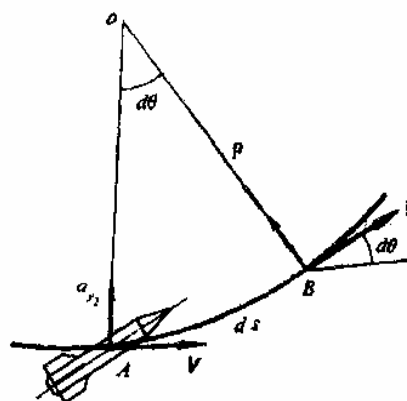


图 2.7 导弹在铅垂平面内作曲线运动

法向加速度 $a_{z_2} = -V \cos \theta (d\psi_v/dt)$ 的“负”号表明，根据弹道偏角 ψ_v 所采用的正负号定义，当 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ 时，正的侧向力将产生负的角速度 $d\psi_v/dt$ 。

下面将讨论(2-25)式右端项，即合外力在弹道坐标系各轴上的投影分量。第一章中已经指出，作用于导弹上的力一般包括空气动力、推力和重力等。它们在弹道坐标系各轴上的投影分量可利用有关变换矩阵得到。

1. 空气动力在弹道坐标系上的投影

由第一章的介绍可知，作用在导弹上的空气动力 \mathbf{R} 在速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 的分量形式最为简单，分别与阻力 X 、升力 Y 和侧向力 Z 相对应。根据弹道坐标系和速度坐标系之间的坐标变换矩阵(2-20)式或方向余弦表 2-4，空气动力在弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 各轴上的投影分量为

$$\begin{pmatrix} R_{x_2} \\ R_{y_2} \\ R_{z_2} \end{pmatrix} = L^{-1}(\gamma_v) \begin{pmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = L^T(\gamma_v) \begin{pmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v \\ Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

2. 推力在弹道坐标系上的投影

假设发动机的推力 \mathbf{P} 与弹体纵轴 ox_1 重合，那么，推力 \mathbf{P} 在弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 各轴上的投影表达式只要作两次坐标变换即可得到。首先，利用速度坐标系与弹体坐标系之间的变换矩阵(2-17)式，将推力 \mathbf{P} 投影到速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 各轴上；然后利用弹道坐标系与速度坐标系之间的变换关系(2-18)式，即可得到推力 \mathbf{P} 在弹道坐标系各轴上的投影。若推力 \mathbf{P} 在 $ox_1y_1z_1$ 系中的分量用 P_{x_1} 、 P_{y_1} 、 P_{z_1} 表示，则有

$$\begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

利用 $L^T(\beta, \alpha)$ ，得到推力 \mathbf{P} 在速度坐标系各轴上的投影分量

$$\begin{pmatrix} P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{z3} \end{pmatrix} = L^T(\beta, \alpha) \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix}$$

再利用弹道坐标系与速度坐标系之间的变换关系，得到推力在弹道坐标系上的投影分量

$$\begin{pmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{pmatrix} = L^T(\gamma_v) \begin{pmatrix} P_{x3} \\ P_{y3} \\ P_{z3} \end{pmatrix} = L^T(\gamma_v) L^T(\beta, \alpha) \begin{pmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{z1} \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

将相应坐标变换矩阵的转置代入(2-28)式，并考虑到(2-27)式，则有

$$\begin{pmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ P_{z2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cos \alpha \cos \beta \\ P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) \end{pmatrix} \quad (2-29)$$

3. 重力在弹道坐标系上的投影

对于近程战术导弹，常把重力矢量 G 视为平行力场，即重力与地面坐标系的 A_y 轴平行，且其大小为 mg （见(1-43)式），故有

$$\begin{pmatrix} G_{Ax} \\ G_{Ay} \\ G_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

显然，重力 G 在弹道坐标系各轴的投影只要利用变换矩阵(2-16)式或方向余弦表 2-2 即可得到

$$\begin{pmatrix} G_{x2} \\ G_{y2} \\ G_{z2} \end{pmatrix} = L(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} G_{Ax} \\ G_{Ay} \\ G_{Az} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2-30)$$

将(2-26)、(2-29)和(2-30)式代入(2-25)式，即可得到描述导弹质心运动的动力学方程

$$\begin{pmatrix} m \frac{dV}{dt} \\ mV \frac{d\theta}{dt} \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\ P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \end{pmatrix} \quad (2-31)$$

(二) 导弹绕质心转动的动力学方程

导弹绕质心转动的动力学矢量方程投影到弹体坐标系上的标量形式最为简单。

弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 是动坐标系，假设弹体坐标系相对地面坐标系的转动角速度为 ω ，在弹体坐标系中，导弹绕质心转动的动力学方程为

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\delta H}{\delta t} + \omega \times H = M \quad (2-32)$$

式中 dH/dt 、 $\delta H/dt$ ——分别为动量矩的绝对、相对导数。

设 i_1 、 j_1 、 k_1 分别为沿弹体坐标系各轴的单位矢量； ω_{x1} 、 ω_{y1} 、 ω_{z1} 为弹体坐标系转动角速度 ω 沿弹体坐标系各轴的分量。动量矩可表示成

$$H = J \cdot \omega$$

式中 J ——惯性张量，其矩阵表示形式为

$$J = \begin{bmatrix} J_{x1} & -J_{x1y1} & -J_{z1x1} \\ -J_{x1y1} & J_{y1} & -J_{y1z1} \\ -J_{z1x1} & -J_{y1z1} & J_{z1} \end{bmatrix}$$

式中 J_{x1} 、 J_{y1} 、 J_{z1} ——导弹对弹体坐标系各轴的转动惯量；

J_{x1y1} 、 J_{y1z1} 、 J_{z1x1} ——导弹对弹体坐标系各轴的惯性积。

若导弹为轴对称型，则弹体坐标系的轴 ox_1 、 oy_1 与 oz_1 就是导弹的惯性主轴。此时，导弹对弹体坐标系各轴的惯性积为零。于是，动量矩 H 沿弹体坐标系各轴的分量为

$$\begin{pmatrix} H_{x1} \\ H_{y1} \\ H_{z1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x1} \\ \omega_{y1} \\ \omega_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{x1}\omega_{x1} \\ J_{y1}\omega_{y1} \\ J_{z1}\omega_{z1} \end{pmatrix}$$

导弹绕质心转动的动力学方程就可化成(为了书写方便，将注脚“1”省略)

$$\begin{pmatrix} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_z\omega_y \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (2-35)$$

式中 M_x 、 M_y 、 M_z ——分别为作用于弹上的所有外力对质心之力矩在弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 各轴上的分量。若推力矢量 P 与 ox_1 轴完全重合，则只考虑气动力矩就可以了。

如果导弹是面对称型的(关于导弹纵向平面 x_1oy_1 对称)，即 $J_{yz} = J_{zx} = 0$ ，那么，导弹绕质心转动的动力学方程可写成

$$\begin{pmatrix} J_x \frac{d\omega_x}{dt} - J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + (J_z - J_y)\omega_z\omega_y + J_{xy}\omega_x\omega_z \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} - J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z - J_{xy}\omega_z\omega_y \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_y\omega_x + J_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

二、运动学方程

研究导弹质心运动的运动学方程和绕质心转动的运动学方程,其目的是确定质心每一瞬时的坐标位置以及导弹相对地面坐标系的瞬时姿态。

(一) 导弹质心运动的运动学方程

在地面坐标系中,导弹速度分量为

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

根据弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 的定义可知,速度矢量 V 与 ox_2 轴重合,利用弹道坐标系和地面坐标系之间的变换矩阵又可得到

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = L^T(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} V_{x_2} \\ V_{y_2} \\ V_{z_2} \end{pmatrix} = L^T(\psi_v, \theta) \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \theta \\ V \sin \theta \\ -V \cos \theta \sin \psi_v \end{pmatrix}$$

比较上述两式,得到导弹质心的运动学方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \theta \\ V \sin \theta \\ -V \cos \theta \sin \psi_v \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

通过积分,可以求得导弹质心相对于地面坐标系 $Axyz$ 的位置坐标 x, y, z 。

(二) 导弹绕质心转动的运动学方程

要确定导弹在空间的姿态,就需要建立描述导弹相对地面坐标系姿态变化的运动学方程,即建立导弹姿态角 ψ 、 ϑ 、 γ 对时间的导数与转动角速度分量 ω_{x1} 、 ω_{y1} 、 ω_{z1} 之间的关系式。

根据弹体坐标系与地面坐标系之间的变换关系,我们知道,导弹相对地面坐标系的旋转角速度 ω 实际上是三次旋转的转动角速度的矢量合成(见图 2.3)。这三次转动的角速度在弹体坐标系中的分量分别为 $L_x(\gamma)L_z(\theta)(0 \ \dot{\psi} \ 0)^T$ 、 $L_x(\gamma)(0 \ 0 \ \dot{\vartheta})^T$ 、 $(\dot{\gamma} \ 0 \ 0)^T$,因此,导弹转动角速度在弹体坐标系中的分量为

$$\begin{pmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{pmatrix} = L_x(\gamma)L_z(\vartheta) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} + L_x(\gamma) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma \\ -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \vartheta & 0 \\ 0 & \cos \vartheta \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix}$$

经变换后得

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -tg \vartheta \cos \gamma & tg \vartheta \sin \gamma \\ 0 & \frac{\cos \gamma}{\cos \vartheta} & -\frac{\sin \gamma}{\cos \vartheta} \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{x_1} \\ \omega_{y_1} \\ \omega_{z_1} \end{pmatrix}$$

将上式展开，就得到了导弹绕质心转动的运动学方程(同样将注脚“1”省略)

$$\begin{pmatrix} \frac{d\vartheta}{dt} \\ \frac{d\psi}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\ \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\ \omega_x - tg \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

要注意：上述方程在某些情况下是不能应用的。例如：当俯仰角 $\vartheta = 90^\circ$ 时，方程是奇异的，偏航角 ψ 是不确定的。此时，可采用四元数来表示导弹的姿态，并用四元数建立导弹绕质心转动的运动学方程；也可用双欧法克服运动学方程的奇异性，但较复杂。四元数法被经常用来研究导弹或航天器的大角度姿态运动^[29]，以及导航计算等。

三、导弹的质量方程

导弹在飞行过程中，由于发动机不断地消耗燃料，导弹的质量不断减小。所以，在描述导弹运动的方程组中，还需有描述导弹质量变化的微分方程，即

$$\frac{dm}{dt} = -m_s(t) \quad (2-38)$$

式中 dm/dt —— 导弹质量变化率，其值总为负；

$m_s(t)$ —— 导弹在单位时间内的质量消耗量(燃料秒流量)。 $m_s(t)$ 的大小主要取决于

发动机的性能，通常认为 m_s 是已知的时间函数，可能是常量，也可能是变量。这样，方程(2-38)可独立于导弹运动方程组之外单独求解，即

$$m = m_0 - \int_{t_0}^{t_f} m_s(t) dt$$

式中 m_0 —— 导弹的初始质量；

t_0 —— 发动机开始工作时间；

t_f —— 发动机工作结束时间。

四、角度几何关系方程

在 §2-2 节中，定义了四个常用的坐标系。从研究它们之间的变换矩阵可知，这四个坐标系之间

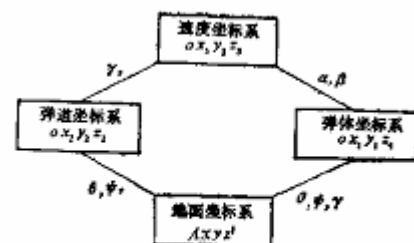


图2.8 四个坐标系之间的关系

的关系是由八个角度参数 θ 、 ψ_v 、 γ_v 、 ϑ 、 ψ 、 γ 、 α 、 β 联系起来的(见图 2.8)。但是，这八个角度并不是完全独立的。

由于在(2-31)式和(2-37)式中，对 θ 、 ψ_v 和 ϑ 、 ψ 、 γ 角已有相应的方程来描述，因此，就可用这五个角参量分别求 α 、 β 、 γ_v ，从而建立三个相应的几何关系方程。

建立角度几何关系方程，可采用球面三角、四元数和方向余弦等方法。下面介绍利用方向余弦和有关矢量运算的知识来建立三个角度几何关系方程。

我们知道，过参考坐标系原点的任意两个单位矢量夹角 φ 的余弦，等于它们各自与坐标系对应轴的方向余弦乘积之和(见图 2.9)。即

$$\cos \varphi = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \quad (2-39)$$

设 i 、 j 、 k 分别为参考坐标系 $Axyz$ 各对应轴的单位矢量，过原点 A 的两个单位矢量夹角的余弦记作 $\langle l_1 \cdot l_2 \rangle$ ，则(2-39)式又可写成

$$\langle l_1 \cdot l_2 \rangle = \langle l_1 \cdot i \rangle \langle l_2 \cdot i \rangle + \langle l_1 \cdot j \rangle \langle l_2 \cdot j \rangle + \langle l_1 \cdot k \rangle \langle l_2 \cdot k \rangle \quad (2-40)$$

若把弹体坐标系的 oz_1 轴和弹道坐标系的 ox_2 轴的单位矢量分别视为 l_1 和 l_2 ，以地面坐标系 $Axyz$ 为参考坐标系，将 $ox_2y_2z_2$ 和 $ox_1y_1z_1$ 两坐标系平移至参考系，使其原点 O 与原点 A 重合，查方向余弦表 2-1、2-2 和 2-6，可得(2-40)式的各单位矢量夹角的余弦项，经整理得

$$\sin \beta = \cos \theta \left[\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v) \right] - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma \quad (2-41)$$

若把弹体坐标系的 ox_1 轴和弹道坐标系的 ox_2 轴的单位矢量分别视为 l_1 和 l_2 ，则可得

$$\cos \alpha = \left[\cos \vartheta \cos \theta \cos(\psi - \psi_v) + \sin \vartheta \sin \theta \right] / \cos \beta \quad (2-42)$$

若把弹体坐标系的 oz_1 轴和弹道坐标系的 oz_2 轴的单位矢量分别视为 l_1 和 l_2 ，同样可得

$$\cos \gamma_v = \left[\cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \sin \vartheta \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v) \right] / \cos \beta \quad (2-43)$$

式(2-41)~(2-43)即为三个角度几何关系方程。

有时几何关系方程显得很简单，例如，当导弹作无侧滑、无滚转飞行时，存在 $\alpha = \vartheta - \theta$ ；当导弹作无侧滑、零攻角飞行时，存在 $\gamma = \gamma_v$ ；当导弹在水平面内作无滚转、小攻角($\alpha \approx 0$)飞行时，则有 $\beta = \psi - \psi_v$ 。

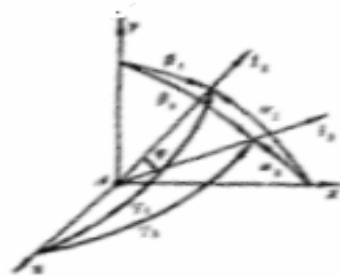


图 2.9 过坐标系原点两矢量的夹角

五、操纵关系方程

导弹制导系统和其他自动控制系统一样也是误差控制系统。当导弹的实际运动参数与导引关系所要求的运动参数不一致时,就会产生控制信号。例如,导弹飞行中的俯仰角 ϑ 与要求的俯仰角 ϑ_* 不相等,即存在偏差角 $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta_*$ 时,控制系统将根据 $\Delta\vartheta$ 的大小使升降舵偏转相应的角度 δ_z , 即

$$\Delta\delta_z = K_g(\vartheta_* - \vartheta) = K_g\Delta\vartheta$$

式中 K_g ——由控制系统决定的比例系数,或称增益系数。

假设制导系统的误差用 ε_i 表示, x_{i*} 为导引关系要求的运动参数值, x_i 为实际运动参数值,则有

$$\varepsilon_i = x_i - x_{i*} \quad (i=1,2,3,4)$$

在一般情况下, ε_i 不可能为零。此时控制系统将偏转相应的舵面和发动机调节机构,以求消除误差。舵面偏转角的大小和方向取决于误差 ε_i 的数值和正负号,通常情况下,操纵关系方程可写成

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= f(\varepsilon_1) \\ \delta_y &= f(\varepsilon_2) \\ \delta_z &= f(\varepsilon_3) \\ \delta_p &= f(\varepsilon_4) \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

在导弹初步设计时,可作近似处理:假设控制系统是按“无误差工作”的理想控制系统,运动参数始终能保持导引关系所要求的变化规律,则有

$$\varepsilon_i = x_i - x_{i*} = 0 \quad (i=1,2,3,4) \quad (2-46)$$

上式称为理想操纵关系方程。在某些特殊情况下,理想操纵关系方程的形式非常简单,例如,当轴对称导弹作直线等速飞行时,理想操纵关系方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \theta - \theta_* = 0 \\ \varepsilon_2 &= \psi - \psi_* = 0 \\ \varepsilon_3 &= \gamma = 0 \\ \varepsilon_4 &= V - V_* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-47)$$

再如,面对称导弹作正常盘旋时,理想操纵关系方程为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \theta = 0 \\ \varepsilon_2 &= \gamma - \gamma_* = 0 \\ \varepsilon_3 &= \beta = 0 \\ \varepsilon_4 &= V - V_* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-48)$$

式(2-47)和(2-48)中的 θ_* 、 ψ_* 、 γ_* 、 V_* 、 β_* 为导引关系要求的运动参数值, θ 、 ψ 、

γ 、 V 、 β 为导弹飞行过程中的实际运动参数值。

六、 导弹运动方程组

综上所述，前面所得到的方程(2-31)、(2-35)~(2-38)、(2-41)~(2-43)和(2-46)式，即构成了描述导弹飞行的运动方程组

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\
 -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P(\sin \alpha \sin \gamma_v - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_y \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_v \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \\
 \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\psi}{dt} \frac{1}{\cos \mathcal{G}} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) & \\
 \frac{d\gamma}{dt} \omega_x - tg \mathcal{G} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) & \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \sin \beta &= \cos \theta [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \sin \mathcal{G} \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \mathcal{G} \sin \gamma \\
 \cos \alpha &= [\cos \mathcal{G} \cos \theta \cos(\psi - \psi_v) + \sin \mathcal{G} \sin \theta] / \cos \beta \\
 \cos \gamma_v &= [\cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \sin \mathcal{G} \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v)] / \cos \beta \\
 \varepsilon_1 &= 0 \\
 \varepsilon_2 &= 0 \\
 \varepsilon_3 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{2-49}$$

式(2-49)以标量的形式给出了导弹的空间运动方程组，它是一组非线性常微分方程。

在这 20 个方程中，除了根据第一章介绍的方法计算出推力 P 、气动力 X 、 Y 、 Z 和力矩 M_x 、

M_y 、 M_z 以外，还包含有 20 个未知参数： $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $\psi_v(t)$ 、 $\omega_x(t)$ 、 $\omega_y(t)$ 、 $\omega_z(t)$ 、 $\mathcal{G}(t)$ 、

$\psi(t)$ 、 $\gamma(t)$ 、 $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$ 、 $\alpha(t)$ 、 $\beta(t)$ 、 $\gamma_v(t)$ 、 $m(t)$ 、 $\delta_x(t)$ 、 $\delta_y(t)$ 、 $\delta_z(t)$ 、 $\delta_p(t)$ 。

因此，方程组(2-49)是可以封闭求解的。在给定各参数的初始条件之后，即可用数值积分法求解方程组(2-49)，从而获得可控弹道及其相应参数的变化规律。

§ 2-4 导弹运动方程组的简化与分解

在上一节里，用了 20 个方程来描述导弹的空间运动。在工程上，实际用于弹道计算的导弹运动方程个数远不止这些。一般而言，运动方程组的方程数目越多，导弹运动就描述得越完整、越准确，但研究和解算也就越麻烦。在导弹设计的某些阶段，特别是在导弹和制导系统的初步设计阶段，通常在求解精度允许范围内，应用一些近似方法对导弹运动方程组进行简化求解。实践证明，在一定的假设条件下，把导弹运动方程组(2-49)分解为纵向运动和侧向运动方程组 或简化为在铅垂平面和水平面内的运动方程组 都具有一定的实用价值。

一、 导弹的纵向运动和侧向运动

所谓纵向运动，是指导弹运动参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ψ 、 ψ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 z 恒为零的运动。

导弹的纵向运动，是由导弹质心在飞行平面或对称平面 x_1oy_1 内的平移运动和绕 oz_1 轴的旋转运动所组成。在纵向运动中，参数 V 、 θ 、 ϑ 、 ω_z 、 α 、 x 、 y 是随时间变化的，通常称为纵向运动参数。

在纵向运动中等于零的参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ψ 、 ψ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 z 等称为侧向运动参数。

所谓侧向运动，是指侧向运动参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 ψ 、 ψ_v 、 z 随时间变化的运动。

它由导弹质心沿 oz_1 轴的平移运动和绕弹体 ox_1 轴与 oy_1 轴的旋转运动所组成。

由方程组(2-49)不难看出，导弹的飞行过程是由纵向运动和侧向运动所组成，它们之间相互关联、相互影响。但当导弹在给定的铅垂面内运动时，只要不破坏运动的对称性(不进行偏航、滚转操纵，且无干扰)，纵向运动是可以独立存在的。这时，描述侧向运动参数的方程可以去掉，只剩下 10 个描述纵向运动参数的方程，其中包含 V 、 θ 、 ϑ 、 ω_z 、 α 、 x 、 y 、 m 、 δ_z 、 δ_p 等 10 个参数。然而，描述侧向运动参数的方程则不能离开纵向运动而单独存在。

(一) 纵向运动方程

要把纵向运动和侧向运动分开，应满足下述假设条件：

侧向运动参数 β 、 γ 、 γ_v 、 ψ 、 ψ_v 、 ω_x 、 ω_y 、 z 及舵偏角 δ_x 、 δ_y 都是小量，这样可以令 $\cos \beta = \cos \gamma = \cos \gamma_v \approx 1$ ，并略去各小量的乘积如 $\sin \beta \sin \gamma$ 、 $\omega_y \sin \gamma$ 、 $\omega_y \omega_x$ 、 $z \sin \gamma_v$ 等，以及 β 、 δ_x 、 δ_y 对空气阻力的影响。

导弹基本上在某个铅垂面内飞行，即其飞行弹道与铅垂面内的弹道差别不大。

俯仰操纵机构的偏转仅取决于纵向运动参数；而偏航、滚转操纵机构的偏转仅取决

于侧向运动参数。

利用上述假设,就能将导弹运动方程组分为描述纵向运动的方程组和描述侧向运动的方程组。

描述导弹纵向运动的方程组为

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y - mg \cos \theta \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \alpha &= \vartheta - \theta \\
 \varepsilon_1 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} (2-50)$$

纵向运动方程组(2-50),就是描述导弹在铅垂平面内运动的方程组。它共有 10 个方程, 包含有 10 个未知参数: V 、 θ 、 ϑ 、 ω_z 、 α 、 x 、 y 、 m 、 δ_z 、 δ_p 。因此,方程组(2-50)是封闭的,可以独立求解。

(二) 侧向运动方程组

描述导弹侧向运动的方程组为

$$\left. \begin{aligned}
 -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P(\sin \alpha + Y) \sin \gamma_v - (P \cos \alpha \sin \beta - Z) \cos \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x - (J_z - J_y) \omega_z \omega_y \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y - (J_x - J_z) \omega_z \omega_x \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - tg \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \\
 \sin \beta &= \cos \theta [\cos \gamma \sin(\psi - \psi_v) + \sin \vartheta \sin \gamma \cos(\psi - \psi_v)] - \sin \theta \cos \vartheta \sin \gamma \\
 \cos \gamma_v &= [\cos \gamma \cos(\psi - \psi_v) - \sin \vartheta \sin \gamma \sin(\psi - \psi_v)] / \cos \beta \\
 \varepsilon_2 &= 0 \\
 \varepsilon_3 &= 0
 \end{aligned} \right\} (2-51)$$

侧向运动方程组(2-51)共有 10 个方程,除了含有 ψ_v 、 ψ 、 γ 、 γ_v 、 β 、 ω_x 、 ω_y 、 z 、 δ_x 、 δ_y 等 10 个侧向运动参数之外,还包括除坐标 x 以外的纵向运动参数 V 、 θ 、 ϑ 、 ω_z 、 α 、 y 等。无论怎样简化(2-51)式,也不能从中消去这些纵向参数。因此,若要由方程组(2-51)求得侧向运动参数,就必须首先求解纵向运动方程组(2-50),然后,将解出的纵向运动参数代入侧向运动方程组(2-51)中,才可解出侧向运动参数的变化规律。

将导弹运动分解为纵向运动和侧向运动,能使联立求解的方程组的数目降低一半,同时,也能获得比较准确的计算结果。但是,当侧向运动参数不满足上述假设条件时,即侧向运动参数变化较大时,就不能再将导弹的运动分为纵向运动和侧向运动来研究。而应该直接研究完整的运动方程组(2-49)。

二、 导弹的平面运动

通常情况下,导弹是在三维空间内运动的,平面运动只是导弹运动的一种特殊情况。

(一) 导弹在铅垂平面内的运动

导弹在铅垂平面内运动时,导弹的速度矢量 V 始终处于该平面内,弹道偏角 ψ_v 为常值(若选地面坐标系的 Ax 轴位于该铅垂平面内,则 $\psi_v = 0$)。设弹体纵向对称平面 x_1Oy_1 与飞行平面重合,推力矢量 P 与弹体纵轴重合。若要保证导弹在铅垂平面内飞行,那么在水平方向的侧向力应恒等于零。此时,导弹只有在铅垂面内的质心平移运动和绕 Oz_1 轴的转动。导弹在铅垂平面内的运动方程组与式(2-50)完全相同。

(二) 导弹在水平面内的运动

导弹在水平面内运动时,它的速度矢量 V 始终处于该平面之内,即弹道倾角 θ 恒等于零。此时,作用于导弹上在铅垂方向的法向控制力应与导弹的重力相平衡,因此,要保持导弹在水平面内飞行,导弹应具有一定的攻角,以产生所需的法向控制力。导弹在主动段飞行过程中,质量不断减小,要想保持法向力平衡,就必须不断改变攻角的大小,也就是说,导弹要偏转升降舵 δ_z ,使弹体绕 Oz_1 轴转动。

若要使导弹在水平面内作机动飞行,则要求在水平方向上产生一定的侧向力,该力通常是借助于侧滑(轴对称型)或倾斜(面对称型)运动形成的。若导弹飞行既有侧滑又有倾斜,则将使控制复杂化,因此,轴对称导弹通常是采用有侧滑、无倾斜的控制飞行,而面对称导弹则是采用有倾斜、无侧滑的控制飞行。

1. 有侧滑无倾斜的导弹水平运动方程组

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha \cos \beta - X \\
 mg &= P \sin \alpha + Y \\
 -mV \frac{d\psi_v}{dt} &= -P \cos \alpha \sin \beta + Z \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_y \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z
 \end{aligned} \right\} \quad (2-53)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \psi_v \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \sin \psi_v \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \\
 \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_y}{\cos \vartheta} \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \beta &= \psi - \psi_v \\
 \alpha &= \vartheta \\
 \varepsilon_2 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{续 } 2-53)$$

方程组(2-53)共 14 个方程, 其中包含 14 个未知参数: V 、 ψ_v 、 ω_y 、 ω_z 、 x 、 z 、 ϑ 、 ψ 、 m 、 α 、 β 、 δ_z 、 δ_y 、 δ_p , 方程组是封闭的。

2. 有倾斜无侧滑的导弹水平运动方程组

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P - X \\
 mg &= (P\alpha + Y) \cos \gamma_v \\
 -mV \frac{d\psi_v}{dt} &= (P\alpha + Y) \sin \gamma_v \\
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \psi_v \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \sin \psi_v \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \cos \gamma \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \alpha &= \vartheta / \cos \gamma \\
 \gamma &= \gamma_v \\
 \varepsilon_3 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2-54)$$

该方程组共有 14 个方程，含有 14 个未知参数： V 、 ψ_v 、 ω_x 、 ω_z 、 x 、 z 、 ϑ 、 γ 、 m 、 α 、 γ_v 、 δ_z 、 δ_x 、 δ_p ，方程组(2-54)是封闭的。

§ 2-5 导弹的质心运动

一、“瞬时平衡”假设

假设内容：

(1) 导弹绕弹体轴的转动是无惯性的，即

$$J_x = J_y = J_z = 0 \quad (2-55)$$

(2) 导弹控制系统理想地工作，即无误差，也无时间延迟；

(3) 不考虑各种干扰因素对导弹的影响。

前两点假设的实质，就是认为导弹在整个飞行期间的任一瞬时都处于平衡状态，即导弹操纵机构偏转时，作用在导弹上的力矩在每一瞬时都处于平衡状态，这就是所谓的“瞬时平衡”假设。

对于轴对称导弹，根据第一章纵向静平衡关系式(1-13)和对偏航运动的类似处理，可得俯仰和偏航力矩的平衡关系式：

$$\left. \begin{aligned} m_z^\alpha \alpha_b + m_z^{\delta_z} \delta_{zb} &= 0 \\ m_y^\beta \beta_b + m_y^{\delta_y} \delta_{yb} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-56)$$

式中 α_b 、 β_b 、 δ_{zb} 、 δ_{yb} 分别为相应参数的平衡值。上式也可写成

$$\left. \begin{aligned} \delta_{zb} &= -\frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_z}} \alpha_b \\ \delta_{yb} &= -\frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_y}} \beta_b \end{aligned} \right\} \quad (2-57)$$

或

$$\left. \begin{aligned} \alpha_b &= -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^\alpha} \delta_{zb} \\ \beta_b &= -\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y^\beta} \delta_{yb} \end{aligned} \right\} \quad (2-58)$$

由此可见，关于导弹转动无惯性的假设意味着：当操纵机构偏转时，参数 α 、 β 都瞬时达到其平衡值。

利用“瞬时平衡”假设，即控制系统无误差地工作，操纵关系方程可写成：

$$\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varepsilon_4 = 0 \quad (2-59)$$

二、 导弹质心运动方程组

基于“瞬时平衡”假设，将导弹的质心运动和绕质心的转动运动分别加以研究，利用导弹运动方程组(2-49)，可以得到如下描述导弹质心运动的方程组

$$\left.
\begin{aligned}
m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha_b \cos \beta_b - X_b - mg \sin \theta \\
mV \frac{d\theta}{dt} &= P (\sin \alpha_b \cos \gamma_v + \cos \alpha_b \sin \beta_b \sin \gamma_v) + Y_b \cos \gamma_v - Z_b \sin \gamma_v - mg \cos \theta \\
-mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= P (\sin \alpha_b \sin \gamma_v - \cos \alpha_b \sin \beta_b \cos \gamma_v) + Y_b \sin \gamma_v + Z_b \cos \gamma_v \\
\frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \cos \psi_v \\
\frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
\frac{dz}{dt} &= -V \cos \theta \sin \psi_v \\
\frac{dm}{dt} &= -m_s \\
\alpha_b &= -\frac{m_z^{\delta_z}}{m_z^{\alpha}} \delta_z \\
\beta_b &= -\frac{m_y^{\delta_y}}{m_y^{\beta}} \delta_y \\
\varepsilon_1 &= 0 \\
\varepsilon_2 &= 0 \\
\varepsilon_3 &= 0 \\
\varepsilon_4 &= 0
\end{aligned}
\right\} (2-60)$$

式中 α_b 、 β_b ——分别为平衡攻角、平衡侧滑角；

X_b 、 Y_b 、 Z_b ——分别为与 α_b 、 β_b 对应的平衡阻力、平衡升力、平衡侧向力。

方程组(2-60)共有 13 个方程,其中含有 13 个未知参数: V 、 θ 、 ψ_v 、 x 、 y 、 z 、 m 、 α_b 、 β_b 、 γ_v 、 δ_z 、 δ_y 、 δ_p ,故方程组是封闭的。对于固体火箭发动机,其推力一般是不可调节的, m_s 可以认为是时间的已知函数,那么,方程组(2-60)中的第七个方程可以独立求解,且 $\varepsilon_4 = 0$ 也就不存在了。这样,方程的个数就减少为 11 个,未知参数也去掉 2 个: m 、 δ_p ,方程组仍是可封闭求解的。

利用控制系统理想工作情况下的运动方程组(2-60),计算导弹飞行弹道,所得结果就是导弹运动参数的“稳态值”,它对导弹总体和导引系统设计都具有重要意义。

值得指出的是:对于操纵性能比较好,绕质心旋转运动不太剧烈的导弹,利用质心运动方程(2-60)进行弹道计算,可以得到令人满意的结果。但当导弹的操纵性能较差,并且绕质心的旋转运动比较剧烈时,必须考虑导弹旋转运动对质心运动的影响。

三、 导弹在铅垂平面内的质心运动

基于“瞬时平衡”假设,忽略随机干扰影响,可以得到描述导弹在铅垂平面内运动的质心运动方程组

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha_b - X_b - mg \sin \theta \\
 mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha_b + Y_b - mg \cos \theta \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \\
 \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \delta_z &= -\frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_z}} \alpha_b \\
 \varepsilon_1 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2-61)$$

方程组(2-61)共有 8 个方程，包含 8 个未知参数： V 、 θ 、 x 、 y 、 m 、 α_b 、 δ_z 、 δ_p ，故方程组是封闭的。

四、 导弹在水平面内的质心运动方程组

基于“瞬时平衡”假设，忽略随机干扰影响，导弹在水平面内的质心运动方程组为

$$\left. \begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P - X_b \\
 mg &= P \alpha_b + Y_b \\
 -mV \frac{d\psi_v}{dt} &= -P \beta_b + Z_b \\
 \frac{dx}{dt} &= V \cos \psi_v \\
 \frac{dz}{dt} &= -V \sin \psi_v \\
 \frac{dm}{dt} &= -m_s \\
 \psi &= \psi_v + \beta_b \\
 \vartheta &= \alpha_b \\
 \delta_z &= -\frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_z}} \alpha_b \\
 \delta_y &= -\frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_y}} \beta_b \\
 \varepsilon_2 &= 0 \\
 \varepsilon_4 &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (2-62)$$

方程组(2-62)共有 12 个方程，其中含有 12 个未知参数： V 、 ψ_v 、 x 、 z 、 m 、 α_b 、 β_b 、

δ_z 、 δ_y 、 ϑ 、 δ_p ，故方程组是封闭的。

五、理想弹道、理论弹道和实际弹道

所谓“理想弹道”，就是将导弹视为一个可操纵的质点，认为控制系统理想地工作，且不考虑弹体绕质心的转动以及外界的各种干扰，求解质心运动方程组得到的飞行弹道。

所谓“理论弹道”，是指将导弹视为某一力学模型(可操纵质点、刚体、弹性体)，作为控制系统的一个环节(控制对象)，将动力学方程、运动学方程、控制系统方程以及其它方程(质量变化方程、角度几何关系方程等)综合在一起，通过数值积分而求得的弹道，而且方程中所用的弹体结构参数、外形几何参数、发动机的特性参数均取设计值；大气参数取标准大气值；控制系统的参数取额定值；方程组的初值符合规定条件。

由此可知，理想弹道是理论弹道的一种简化情况。

导弹在真实情况下的飞行弹道称为“实际弹道”，它与理想弹道和理论弹道的最大区别在于，导弹在飞行过程中会受到各种随机干扰和误差的影响，因此，每发导弹的实际弹道是不可能完全相同的。

§ 2-6 过载

一、机动性与过载的概念

所谓机动性，是指导弹在单位时间内改变飞行速度大小和方向的能力。

所谓过载 n ，是指作用在导弹上除重力之外的所有外力的合力 N (即控制力) 与导弹重量 G 的比值

$$n = \frac{N}{G} \quad (2-63)$$

由过载定义可知，过载是个矢量，它的方向与控制力 N 的方向一致，其模值表示控制力大小为重量的多少倍。这就是说，过载矢量表征了控制力 N 的大小和方向。

二、过载的投影

过载矢量的大小和方向，通常是由它在某坐标系上的投影来确定的。研究导弹运动的机动性时，需要给出过载矢量在弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 中的标量表达式；而在研究弹体或部件受

力情况和进行强度分析时，又需要知道过载矢量在弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 中的投影。

根据过载的定义，将推力投影到速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ ，得到过载矢量 n 在速度坐标系 $ox_3y_3z_3$ 各轴上的投影为

$$\begin{bmatrix} n_{x_3} \\ n_{y_3} \\ n_{z_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta - X \\ P \sin \alpha + Y \\ - P \cos \alpha \sin \beta + Z \end{bmatrix} \quad (2-64)$$

过载矢量 n 在弹道坐标系 $ox_2y_2z_2$ 各轴上的投影为

$$\begin{bmatrix} n_{x_2} \\ n_{y_2} \\ n_{z_2} \end{bmatrix} = L^T(\gamma_v) \begin{bmatrix} n_{x_3} \\ n_{y_3} \\ n_{z_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{G} \begin{bmatrix} P \cos \alpha \cos \beta - X \\ P(\sin \alpha \cos \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_v) + Y \cos \gamma_v - Z \sin \gamma_v \\ P(\sin \alpha \sin \gamma_v + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_v) + Y \sin \gamma_v + Z \cos \gamma_v \end{bmatrix} \quad (2-65)$$

过载矢量在速度方向上的投影 n_{x_2} 、 n_{z_2} 称为切向过载；过载矢量在垂直于速度方向上的投影 n_{y_2} 、 n_{z_2} 和 n_{y_3} 、 n_{z_3} ，称为法向过载。

导弹的机动性能可以用导弹的切向和法向过载来评定。切向过载越大，导弹产生的切向加速度就越大，说明导弹改变速度大小的能力越强；法向过载越大，导弹产生的法向加速度就越大，在同一速度下，导弹改变飞行方向的能力就越大，即导弹越能沿较弯曲的弹道飞行。因此，导弹过载越大，机动性能就越好。

对弹体强度进行分析计算时，需要知道过载 n 在弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 各轴上的投影分量。

利用变换矩阵(2-17)式和(2-64)式即可求得过载 n 在弹体坐标系 $ox_1y_1z_1$ 各轴上的投影

$$\begin{bmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \end{bmatrix} = L(\beta, \alpha) \begin{bmatrix} n_{x_3} \\ n_{y_3} \\ n_{z_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x_3} \cos \alpha \cos \beta + n_{y_3} \sin \alpha - n_{z_3} \cos \alpha \sin \beta \\ -n_{x_3} \sin \alpha \cos \beta + n_{y_3} \cos \alpha + n_{z_3} \sin \alpha \sin \beta \\ n_{x_3} \sin \beta + n_{z_3} \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-66)$$

式中，过载 n 在弹体纵轴 ox_1 上的投影分量 n_{x_1} 称为纵向过载；在垂直于弹体纵轴方向上的投影分量 n_{y_1} 、 n_{z_1} 称为横向过载。

三、运动与过载

过载不仅是评定导弹机动性能的指标，而且和导弹的运动之间存在密切的联系。

根据过载的定义，描述导弹质心运动的动力学方程可以写成

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= N_{x_2} + G_{x_2} \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= N_{y_2} + G_{y_2} \\ -mV \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= N_{z_2} + G_{z_2} \end{aligned} \right\}$$

将(2-30)式代入上式，方程两端同除以 mg ，得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} &= n_{x_2} - \sin \theta \\ \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} &= n_{y_2} - \cos \theta \\ -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} &= n_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-67)$$

上式左端表示导弹质心的无量纲加速度在弹道坐标系上的三个分量，式(2-67)描述了导弹质心运动与过载之间的关系。由此可见，用过载表示导弹质心运动的动力学方程，形式很简单。

同样，过载也可以用运动参数 V 、 θ 、 ψ_v 来表示：

$$\left. \begin{aligned} n_{x_2} &= \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \sin \theta \\ n_{y_2} &= \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta \\ n_{z_2} &= -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\psi_v}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2-68)$$

上式中，参数 V 、 θ 、 ψ_v 表示飞行速度的大小和方向，方程的右边含有这些参数对时间的导数。由此看出，过载矢量在弹道坐标系上的投影表征着导弹改变飞行速度大小和方向的能力。

由(2-68)式可以得到导弹在某些特殊飞行情况下所对应的过载，例如：

导弹在铅垂平面内飞行时： $n_{z_2} = 0$ ；

导弹在水平面内飞行时： $n_{y_2} = 1$ ；

导弹作直线飞行时： $n_{y_2} = \cos \theta = \text{常数}$ ， $n_{z_2} = 0$ ；

导弹作等速直线飞行时： $n_{x_2} = \sin \theta = \text{常数}$ ， $n_{y_2} = \cos \theta = \text{常数}$ ， $n_{z_2} = 0$ ；

导弹作水平直线飞行时： $n_{y_2} = 1$ ， $n_{z_2} = 0$ ；

导弹作水平等速直线飞行时： $n_{x_2} = 0$ ， $n_{y_2} = 1$ ， $n_{z_2} = 0$ 。

利用过载矢量在弹道坐标系上的投影还能定性地表示弹道上各点的切向加速度和弹道的形状。由式(2-67)可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= g(n_{x_2} - \sin \theta) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{g}{V}(n_{y_2} - \cos \theta) \\ \frac{d\psi_v}{dt} &= -\frac{g}{V \cos \theta} n_{z_2} \end{aligned} \right\} \quad (2-69)$$

根据上式，可以建立过载在弹道坐标系中的投影与导弹切向加速度之间的关系：

当 n_{x_2} $\begin{cases} = \sin \theta \text{ 时，导弹作等速飞行；} \\ > \sin \theta \text{ 时，导弹作加速飞行；} \\ < \sin \theta \text{ 时，导弹作减速飞行。} \end{cases}$

在铅垂平面 $x_2o_2y_2$ 内 (图 2.13)，若：

$$n_{y_2} \begin{cases} > \cos \theta, \text{ 则 } \frac{d\theta}{dt} > 0, \text{ 此时弹道向上弯曲;} \\ = 0, \text{ 则 } \frac{d\theta}{dt} = 0, \text{ 弹道在该点处曲率为零;} \\ < \cos \theta, \text{ 则 } \frac{d\theta}{dt} < 0, \text{ 此时弹道向下弯曲。} \end{cases}$$

同样，在水平面 x_2oz_2 内 (图 2.14)，当

$$n_{z_2} \begin{cases} > 0 \text{ 时 } \frac{d\psi_v}{dt} < 0, \text{ 弹道向右弯曲;} \\ = 0 \text{ 时 } \frac{d\psi_v}{dt} = 0, \text{ 弹道在该点处曲率为零;} \\ < 0 \text{ 时 } \frac{d\psi_v}{dt} > 0, \text{ 弹道向左弯曲。} \end{cases}$$

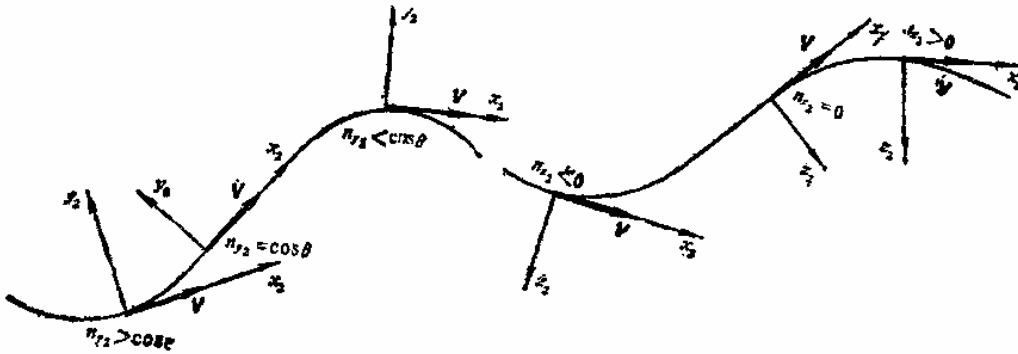


图2.13 过载 n_{y_2} 与弹道特性之间的关系

图2.14 过载 n_{z_2} 与弹道特性之间的关系

四、弹道曲率半径与法向过载的关系

建立弹道曲率半径与法向过载之间的关系，对研究弹道特性也是必要的。如果导弹是在铅垂平面 x_2oy_2 内运动，那么，弹道上某点的曲率就是该点处的弹道倾角 θ 对弧长 S 的导数，即

$$K = \frac{d\theta}{dS}$$

而该点的曲率半径 ρ_{y_2} 则为曲率的倒数，所以有

$$\rho_{y_2} = \frac{dS}{d\theta} = \frac{dS}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{V}{d\theta/dt}$$

将式(2-69)的第二个方程代入上式，可得到

$$\rho_{y_2} = \frac{V^2}{g(n_{y_2} - \cos \theta)} \quad (2-70)$$

上式表明：在给定速度 V 的情况下，法向过载越大，曲率半径越小，导弹转弯速率

$$d\theta/dt = \frac{V}{\rho_{y_2}}$$

就越大；若 n_{y_2} 值不变，随着飞行速度 V 的增加，弹道曲率半径就增加，这说明速度越大，导弹越不容易转弯。

同理，如果导弹在水平面 x_2Oz_2 内飞行，那么曲率半径 ρ_{z_2} 可写成

$$\rho_{z_2} = -\frac{dS}{d\psi_v} = -\frac{V}{d\psi_v/dt}$$

将式(2-69)的第三个方程代入上式，则有

$$\rho_{z_2} = \frac{V^2 \cos \theta}{gn_{z_2}} \quad (2-71)$$

五、需用过载、极限过载和可用过载

在弹体结构和控制系统设计中，常需要考虑导弹在飞行过程中可能承受的过载。根据战技术要求的規定，飞行过程中过载不得超过某一数值。这个数值决定了弹体结构和弹上各部件可能承受的最大载荷。为保证导弹能正常飞行，飞行中的过载也必须小于这个数值。

在导弹设计过程中，经常用到需用过载、极限过载和可用过载的概念，下面分别加以叙述。

(一) 需用过载

所谓需用过载是指导弹按给定的弹道飞行时所需要的法向过载，用 n_R 表示。导弹的需用过载是飞行弹道的一个重要特性。

(二) 极限过载

攻角或侧滑角达到临界值时的法向过载称为极限过载 n_L 。

以纵向运动的 n_{y_2} 为例，相应的极限过载可写成

$$n_L = \frac{1}{G} (P \sin \alpha_L + qS C_{y_{\max}})$$

(三) 可用过载

当操纵面的偏转角为最大时，导弹所能产生的法向过载称为可用过载 n_p 。它表征着导弹产生法向控制力的实际能力。若要使导弹沿着导引规律所确定的弹道飞行，那么，在这条弹道的任一点上，导弹所能产生的可用过载都应大于需用过载。

在实际飞行过程中，各种干扰因素总是存在的，导弹不可能完全沿着理论弹道飞行，因此，在导弹设计时，必须留有一定的过载余量，用以克服各种扰动因素导致的附加过载。

然而，考虑到弹体结构、弹上仪器设备的承载能力，可用过载也不是越大越好。实际上，导弹的舵面偏转总是会受到一定的限制，如操纵机构的输出限幅和舵面的机械限制等。

通过分析，不难发现：极限过载 $n_L >$ 可用过载 $n_p >$ 需用过载 n_R 。