

基于摄动法的不确定性有限元模型修正方法研究

姜东^{1,2}, 费庆国^{*1,2}, 吴邵庆^{1,2}

(1. 东南大学工程力学系, 南京 210096; 2. 江苏省工程力学分析重点实验室, 南京 210096)

摘要:开展了考虑不确定性的有限元模型修正方法的研究。基于摄动法推导了待修正参数均值和协方差矩阵的迭代格式, 其中协方差的迭代格式包括是否考虑试验数据与修正参数之间相关性的两种形式。在理论研究基础上开展数值仿真研究, 实现了不确定性有限元模型修正的摄动法, 并研究了试验数据样本数量对修正误差的影响。仿真结果表明, 该方法适用于解决系统参数与试验数据存在不确定性的模型修正问题, 试验样本数量对待修正参数标准差的修正精度影响较大; 忽略试验模态参数与待修正参数不确定性之间的相关性, 能够避免计算二阶灵敏度矩阵, 在保证修正结果准确性的前提下减少计算量。

关键词:有限元模型; 模型修正; 不确定性; 摄动法

中图分类号: O242. 21; O313

文献标志码: A

doi: 10. 7511/jslx201404004

1 引言

准确的结构动力学模型是动响应预测、力学环境预示、损伤检测以及动态优化设计的前提。近几十年来, 模型修正技术^[1-3]作为建立精确动力学模型的有效方法得到迅速发展。

传统的有限元模型修正仅采用某次试验的数据修正初始有限元模型, 目前已经有较多的方法。然而, 实际问题中一般存在两类不确定性: (1) 结构参数的不确定性, 例如新型复合材料的弹性参数、螺栓和铆钉等连接方式以及边界条件难以准确模拟; 工程结构在试验或运行过程中动力学特性发生变化等; (2) 试验数据的不确定性, 由于试验噪声、试验设备及试验条件影响所产生的不确定性。例如, 热模态试验目前在试验方法和试验手段上并不成熟, 条件难以控制; 在试验过程中存在较多不确定性, 导致试验结果离散性较大。由于不确定性的存在, 针对某次试验数据的模型修正结果只能模拟结构特定情况下的动力学特性, 而无法对结构的动力学特性进行完整的描述; 因此, 在获得多次试验数据样本情况下, 考虑不确定性的模型修正方法能够

得到具有统计特征的动力学模型。

不确定性是工程结构分析领域面临的主要挑战之一^[4]。求解不确定性问题主要有概率的或非概率的分析方法^[5-8], 陈塑寰^[5]针对随机材料特性和几何特性的振动特征值问题开展研究, 提供了随机特征值和特征向量统计特性的一般分析方法; 宋大同等^[6]将设计参数处理为随机变量, 利用随机优化技术得到了设计参数的均值和标准差; Adhikari 等^[7]基于特征值的摄动展开和渐进积分提出了两种特征值概率分布的计算方法; Moens 等^[8]评述了描述不确定性的非概率的方法(如区间分析方法等)及其在不确定性有限元分析中的应用。考虑不确定性的有限元模型修正方法在此基础上发展起来。最初 Collins 等^[9]仅考虑噪声引起的试验结果的随机性, 采用灵敏度方法不考虑试验模态参数与待修正参数之间的相关性确定待修正参数的均值和方差; Mares 等^[10]采用多元多次回归模型计算不确定参数的灵敏度矩阵, 采用梯度回归方法计算得到参数的均值和协方差。其他方法也已应用于随机有限元模型修正中, 包括摄动法^[11,12]、区间分析法^[13,14]等。采用摄动法进行模型修正时, 若待修正参数不确定性较小并且服从高斯分布, 能高效地得到修正结果^[11,12]。比较可知, 采用区间分析方法, 待修正参数的区间在迭代的过程中容易发散, 在数值计算方面存在困难, 每次迭代都需要采用优化方法计算参数的区间, 对于实际结构计算量太大^[13,14], 在工程中难以实现。本文针对基于摄

收稿日期: 2013-01-22; 修改稿收到日期: 2013-04-16.

基金项目: 国家自然科学基金(10902024); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-11-0086); 江苏省自然科学基金(BK2010397); 航空科学基金(20090869009)资助项目.

作者简介: 姜东(1985-), 男, 博士生;
费庆国*(1977-), 男, 教授, 博士生导师
(E-mail: qgFei@seu.edu.cn).

动法的不确定性有限元模型修正技术研究。

本文针对参数不确定性较小的模型修正问题,考虑试验模态数据以及结构参数的不确定性,推导了待修正参数均值和协方差的迭代格式,其中协方差的迭代格式包括考虑试验数据与待修正参数之间相关性与否的两种形式。介绍了修正方法实现的详细流程,以及待修正参数的不确定性变化范围较小时的协方差矩阵处理方法。最后,采用三自由度弹簧-质量模型针对试验模态参数样本数不同的情况开展仿真研究,分析了仿真试验模态参数样本数量对修正后参数误差的影响,并将本文的结果与其他研究者的结果进行了比较。

2 不确定性有限元模型修正的摄动法

确定性的有限元模型修正可归结为优化问题:

$$\begin{cases} \min J(\mathbf{p}) = \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} = \|\mathbf{W}^{1/2}[\mathbf{z}^m - \mathbf{z}^a(\mathbf{p})]\|_2^2 \\ \text{s.t. } \mathbf{p}_1 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_2 \end{cases} \quad (1)$$

目标函数 $J(\mathbf{p})$ 定义为在结构待修正参数 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^N$ 的合理取值范围 $\mathbf{p}_1 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_2$ 内,试验与计算模态参数的加权残差取极小值, N 为待修正参数数目。 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为模态参数的残差, \mathbf{z}^m 和 $\mathbf{z}^a(\mathbf{p}) \in \mathbb{R}^n$ 分别为试验和计算的模态参数,加权矩阵 \mathbf{W} 是反映各模态参数残差相对权重的对角阵。设定待修正参数的初值,采用灵敏度分析的方法迭代求解优化问题(1),第 j 个迭代步的问题描述为

$$\mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{z}^m - \mathbf{z}_j^a) = \mathbf{S}_j(\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j) \quad (2)$$

式中 $\mathbf{S}_j = \mathbf{W}^{1/2} \partial \mathbf{z}_j / \partial \mathbf{p}_j$ 表示模态参数对待修正参数的加权灵敏度矩阵。

为了考虑试验模态参数 \mathbf{z}^m 和待修正参数 \mathbf{p} 的不确定性,将方程(2)中的参数均表示为

$$\begin{cases} \mathbf{p}_j = \bar{\mathbf{p}}_j + \delta \mathbf{p}_j \\ \mathbf{z}^m = \bar{\mathbf{z}}^m + \delta \mathbf{z}^m \\ \mathbf{z}_j^a = \bar{\mathbf{z}}_j^a + \delta \mathbf{z}_j^a \\ \mathbf{S}_j = \bar{\mathbf{S}}_j + \delta \mathbf{S}_j \end{cases} \quad (3)$$

即将方程(2)中的每一项都表示为一个均值与随机变量之和,分别用 $\bar{*}$ 和 δ^* 表示。其中 δ^* 为一均值是 0 的随机变量, $\bar{\mathbf{z}}_j^a = \mathbf{z}^a(\bar{\mathbf{p}}_j)$, $\bar{\mathbf{S}}_j = \mathbf{S}(\bar{\mathbf{p}}_j)$ 分别为待修正参数取均值的模态参数计算值与灵敏度矩阵。将式(3)代入式(2)可得不确定性有限元模型修正问题的迭代方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{1/2}[\bar{\mathbf{z}}^m + \delta \mathbf{z}^m - (\bar{\mathbf{z}}_j^a + \delta \mathbf{z}_j^a)] = \\ (\bar{\mathbf{S}}_j + \delta \mathbf{S}_j)[\bar{\mathbf{p}}_{j+1} + \delta \mathbf{p}_{j+1} - (\bar{\mathbf{p}}_j + \delta \mathbf{p}_j)] \end{aligned} \quad (4)$$

采用摄动法,将式(4)中的关于 δ 的零阶项与一阶项分离,可得

$$\mathbf{O}(\delta^0): \mathbf{W}^{1/2}(\bar{\mathbf{z}}^m - \bar{\mathbf{z}}_j^a) = \bar{\mathbf{S}}_j(\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{O}(\delta^1): \mathbf{W}^{1/2}(\delta \mathbf{z}^m - \delta \mathbf{z}_j^a) - \delta \mathbf{S}_j(\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) = \\ \bar{\mathbf{S}}_j(\delta \mathbf{p}_{j+1} - \delta \mathbf{p}_j) \end{aligned} \quad (6)$$

求解式(5),得到待修正参数均值的迭代格式为

$$\bar{\mathbf{p}}_{j+1} = \bar{\mathbf{p}}_j + (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j)^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \mathbf{W}^{1/2}(\bar{\mathbf{z}}^m - \bar{\mathbf{z}}_j^a) \quad (7)$$

$$\text{或} \quad \bar{\mathbf{p}}_{j+1} = \bar{\mathbf{p}}_j + \bar{\mathbf{G}}_j(\bar{\mathbf{z}}^m - \bar{\mathbf{z}}_j^a) \quad (8)$$

式中 $\bar{\mathbf{G}}_j = (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j)^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \mathbf{W}^{1/2}$ 为转换矩阵。若计算模态参数对待修正参数的加权灵敏度矩阵病态,采用求解不适定问题的正则化方法求解方程(5),转换矩阵变为

$$\bar{\mathbf{G}}_j = (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \mathbf{W}^{1/2} \quad (9)$$

式中 λ 为正则化参数,通过以 $\|\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j\|$ 为横坐标, $\|\bar{\mathbf{S}}_j(\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) - \mathbf{W}^{1/2}(\bar{\mathbf{z}}^m - \bar{\mathbf{z}}_j^a)\|$ 为纵坐标作 L-curve 图求得 λ 的值^[15]。

为了考虑试验模态参数的不确定性对灵敏度矩阵的影响,将灵敏度矩阵的不确定项表示为

$$\delta \mathbf{S}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(k)} \delta \mathbf{z}^m(k) \quad (10)$$

式中

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(k)} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j(i)} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_j(i)}{\partial \mathbf{z}^m(k)} \Big|_{\mathbf{z}^m(k) = \bar{\mathbf{z}}^m(k)} \quad (11)$$

式(11)中需要计算模态参数对待修正参数的二阶灵敏度 $\partial \bar{\mathbf{S}}_j / \partial \bar{\mathbf{p}}_j$, 将式(8)两边同时对 $\mathbf{z}^m(k)$ 求偏导可得 $\partial \bar{\mathbf{p}}_j(i) / \partial \mathbf{z}^m(k)$ 的递归格式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_{j+1}}{\partial \mathbf{z}^m(k)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(k)} + \bar{\mathbf{G}}_j \left[\frac{\partial \mathbf{z}^m}{\partial \mathbf{z}^m(k)} - \frac{\partial \mathbf{z}_j^a}{\partial \mathbf{z}^m(k)} \right] + \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(k)} (\bar{\mathbf{z}}^m - \bar{\mathbf{z}}_j^a) \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^m(j)}{\partial \mathbf{z}^m(k)} \Big|_{\mathbf{z}^m(k) = \bar{\mathbf{z}}^m(k)} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = k \\ 0 & \text{if } j \neq k \end{cases} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{z}}_j^a}{\partial \mathbf{z}^m(k)} = \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}_j^a}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(k)} \quad (14)$$

高斯分布随机变量的统计特性可以由参数的均值和协方差矩阵完整描述。由式(6)得到待修正参数不确定性项的迭代格式为

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}_{j+1} = \delta \mathbf{p}_j + \bar{\mathbf{G}}_j(\delta \mathbf{z}^m - \delta \mathbf{z}_j^a) - \\ (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \delta \bar{\mathbf{S}}_j(\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$\mathbf{A}_j = (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(1)} (\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) \right. \\ \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(2)} (\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) \cdots \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}_j}{\partial \mathbf{z}^m(n)} (\bar{\mathbf{p}}_{j+1} - \bar{\mathbf{p}}_j) \right] \quad (16)$$

式中 $\partial \bar{\mathbf{S}}_j / \partial \mathbf{z}^m(n)$ 在试验模态参数的均值点 $\mathbf{z}^m(n) = \mathbf{z}^m(n)$ 计算得到,因此, \mathbf{A}_j 为一确定性的矩阵,则式(15)改写为

$$\delta \mathbf{p}_{j+1} = \delta \mathbf{p}_j + \bar{\mathbf{G}}_j (\delta \mathbf{z}^m - \delta \mathbf{z}_j^a) - \mathbf{A}_j \delta \mathbf{z}^m \quad (17)$$

Khodaparast^[10]提出的方法与式(16)中 $\partial \bar{\mathbf{S}}_j / \partial \mathbf{z}^m(k)$ 相对应的表达式为 $\partial \bar{\mathbf{T}}_j / \partial \mathbf{z}^m(k)$, 其中 $\bar{\mathbf{T}}_j$ 与转换矩阵式(9)形式相同,即 $\bar{\mathbf{T}}_j = (\bar{\mathbf{S}}_j^T \bar{\mathbf{S}}_j + \lambda \mathbf{I})^{-1} \bar{\mathbf{S}}_j^T \mathbf{W}^{1/2}$ 。采用与式(11)类似的求导链式法则来计算 $\partial \bar{\mathbf{T}}_j / \partial \mathbf{z}^m(k)$ 时,需先计算 $\partial \bar{\mathbf{T}}_j / \partial \mathbf{p}_j$, 由于 $\bar{\mathbf{T}}_j$ 表达式较为复杂,将导致 \mathbf{A}_j 的计算更为繁琐。

按式(3)的描述,用 $\delta \nu$ 表示参数 ν 的不确定性,由协方差的定义可得

$$\text{Cov}(\nu, \nu) = \text{Cov}(\bar{\nu} + \delta \nu, \bar{\nu} + \delta \nu) = \text{Cov}(\delta \nu, \delta \nu) \quad (18)$$

因此,可由式(17)计算待修正参数协方差矩阵的迭代格式为

$$\text{Cov}(\delta \mathbf{p}_{j+1}, \delta \mathbf{p}_{j+1}) = \text{Cov}[\delta \mathbf{p}_j + \bar{\mathbf{G}}_j (\delta \mathbf{z}^m - \delta \mathbf{z}_j^a) - \mathbf{A}_j \delta \mathbf{z}^m, \\ \delta \mathbf{p}_j + \bar{\mathbf{G}}_j (\delta \mathbf{z}^m - \delta \mathbf{z}_j^a) - \mathbf{A}_j \delta \mathbf{z}^m] = \\ \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{p}_j) + \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}^m) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \\ \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}_j^a) \mathbf{A}_j^T + \\ \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{p}_j) + \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}^m) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \\ \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}^m) \mathbf{A}_j^T - \\ \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{p}_j) - \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}^m) \bar{\mathbf{G}}_j^T + \\ \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T + \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}^m) \mathbf{A}_j^T - \\ \mathbf{A}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{p}_j) - \mathbf{A}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}^m) \bar{\mathbf{G}}_j^T + \\ \mathbf{A}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T + \mathbf{A}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}^m) \mathbf{A}_j^T \quad (19)$$

若不考虑试验模态参数的不确定性对待修正参数不确定性的影响,即假定试验与参数之间不相关,则 $\text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{p}_j) = 0$, $\text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}_j^a) = 0$; 由 \mathbf{A}_j 的式(16)可知,此假定下式(19)中的 \mathbf{A}_j 也可忽略不计。则式(19)可简化为

$$\text{Cov}(\delta \mathbf{p}_{j+1}, \delta \mathbf{p}_{j+1}) = \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{p}_j) + \\ \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}^m, \delta \mathbf{z}^m) \bar{\mathbf{G}}_j^T + \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \\ \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}_j^a) \bar{\mathbf{G}}_j^T - \bar{\mathbf{G}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{p}_j) \quad (20)$$

采用式(20)计算待修正参数的协方差矩阵,将避免计算模态参数对待修正参数的二阶灵敏度矩阵 $\partial \bar{\mathbf{S}}_j / \partial \bar{\mathbf{p}}_j$ 而大大减少计算量。

通过上述推导,得到待修正参数均值的迭代格式(8)和协方差矩阵的迭代式(19)或式(20),可用于求解不确定性有限元模型修正问题。与 Hua^[12]和 Khodaparast^[11]提出的方法比较而言,反映待修正参数不确定性的协方差矩阵迭代式(19)或式(20)与 Hua^[11]的表达式有较大的差别。Hua^[12]在采用摄动法之前,将待修正参数的不确定性表示为试验模态参数不确定性的偏导数,考虑了试验数据的不确定性;然而实际结构中,待修正参数可能本身就具有不确定性,本文中的表达能够将各参数的不确定性隐式表达,待修正参数的不确定性通过迭代能得到更准确的体现,更为重要的是文献[12]的方法必须计算模态参数对待修正参数的二阶灵敏度,会耗费较大的计算量。待修正参数的协方差矩阵迭代式(19)与 Khodaparast^[11]的结果相比,由于迭代格式推导出出发点不同,待修正参数协方差矩阵迭代格式存在较大区别,特别是考虑试验模态参数对迭代过程中待修正参数影响情况。本文中,矩阵 \mathbf{A}_j 的计算更加简洁,能够减少计算量。如不考虑试验模态参数与待修正参数的相关性,得到的协方差迭代格式与文献[10]相同。

3 实现流程

采用商用有限元软件 NASTRAN 和数值计算软件 MATLAB 联合编程实现了本文的方法。若假设试验模态参数与待修正参数之间不相关,基于摄动法的不确定性有限元模型修正方法实现步骤如下。

(1) 模型修正迭代过程的第一步 ($j=0$), 根据一系列的试验结果确定试验模态参数的均值向量 $\bar{\mathbf{z}}^m$ 和协方差矩阵 $\text{Cov}(\mathbf{z}^m, \mathbf{z}^m)$ 。

(2) 估计待修正参数的初值,包括初始均值 $\bar{\mathbf{p}}_0$ 和初始标准差 $\text{std}(\bar{\mathbf{p}}_0)$, 计算得到待修正参数协方差矩阵的初值 $\text{Cov}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0)$ 。

(3) 根据待修正参数的初值,采用一阶截断的 Taylor 展开或蒙特卡洛方法确定计算模态参数的均值 $\bar{\mathbf{z}}_j^a$ 和协方差 $\text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}_j^a)$ 以及反映待修正参数与计算模态参数之间相关性的协方差矩阵 $\text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}_j^a)$ 。

(4) 在待修正参数的均值点计算灵敏度矩阵 $\partial \mathbf{z}_j / \partial \mathbf{p}_j$, 并选取合适的加权矩阵 $\mathbf{W}^{1/2}$ 以及正则化参数 λ 按照式(9)确定转换矩阵 $\bar{\mathbf{S}}_j$ 。

(5) 分别根据式(8)和式(20)计算有限元模型

修正第 j 次迭代步,待修正参数的均值 $\bar{\mathbf{p}}_{j+1}$ 和协方差矩阵 $\text{Cov}(\delta \mathbf{p}_{j+1}, \delta \mathbf{p}_{j+1})$ 。

(6) 若待修正参数的均值和协方差矩阵收敛,执行步骤(7);不收敛,则令 $j=j+1$,回到步骤(3),重新开始迭代。

(7) 迭代终止。

当参数的不确定性较小时,对计算模态参数 $\mathbf{z}_j^a(\mathbf{p}_j)$ 在待修正参数的均值点 $\bar{\mathbf{p}}_j$ 处 Taylor 展开并进行一阶截断即

$$\mathbf{z}_j^a(\mathbf{p}_j) = \mathbf{z}_j^a(\bar{\mathbf{p}}_j) + \frac{\partial \mathbf{z}_j^a(\bar{\mathbf{p}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} (\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) \quad (21)$$

由式(3)可得

$$\mathbf{z}_j^a(\mathbf{p}_j) - \mathbf{z}_j^a(\bar{\mathbf{p}}_j) = \frac{\partial \mathbf{z}_j^a(\bar{\mathbf{p}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} (\mathbf{p}_j - \bar{\mathbf{p}}_j) \Rightarrow \delta \mathbf{z}_j^a = \frac{\partial \mathbf{z}_j^a(\bar{\mathbf{p}}_j)}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} \delta \mathbf{p}_j \quad (22)$$

令 $\mathbf{T}_j = \partial \mathbf{z}_j^a(\mathbf{p}_j) / \partial \mathbf{p}_j$, 步骤(3)中的矩阵根据式(22)计算得

$$\begin{cases} \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{z}_j^a) = \bar{\mathbf{T}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{p}_j) \bar{\mathbf{T}}_j^T \\ \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{z}_j^a) = \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{p}_j) \bar{\mathbf{T}}_j^T \\ \text{Cov}(\delta \mathbf{z}_j^a, \delta \mathbf{p}_j) = \bar{\mathbf{T}}_j \text{Cov}(\delta \mathbf{p}_j, \delta \mathbf{p}_j) \end{cases} \quad (23)$$

当参数的不确定性不满足上述情况,可以采用蒙特卡洛方法或渐进积分方法来计算参数的统计特性^[7,11]。

4 仿真算例研究

采用图 1 所示的三自由度弹簧-质量模型^[11]开展仿真算例研究。在此模型中,确定性的参数为

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1.0 \text{ kg}$$

$$k_3 = k_4 = 1.0 \text{ N/m}, k_6 = 3.0 \text{ N/m}$$

假设其他不确定的弹簧弹性系数为待修正参数,满足高斯分布的随机变量,它们的均值和标准差分别为

$$\mu_{k_1} = \mu_{k_2} = \mu_{k_5} = 1.0 \text{ N/m}$$

$$\sigma_{k_1} = \sigma_{k_2} = \sigma_{k_5} = 0.2 \text{ N/m}$$

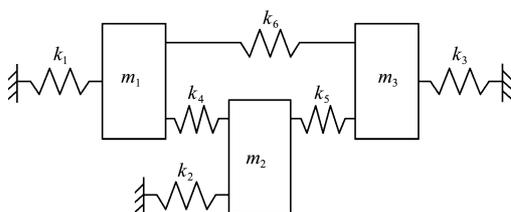


图 1 三自由度弹簧-质量模型

Fig. 1 Three degrees of freedom spring-mass model

仿真的试验模态参数样本通过蒙特卡洛方法根据不确定参数的均值和标准差构造样本,代入有限元模型中计算得到。

不确定的待修正参数初始估计值为 $\mu_{k_1} = \mu_{k_2} = \mu_{k_5} = 2.0 \text{ N/m}$, $\sigma_{k_1} = \sigma_{k_2} = \sigma_{k_5} = 0.3 \text{ N/m}$,即对待修正参数的均值和标准差分别高估了 100% 和 50%。采用本文的方法,不考虑第一次迭代之后模态参数与待修正参数之间相关性的情况(利用式(8)和式(20)),进行不确定性有限元模型修正仿真研究。试验的模态参数通过仿真得知,试验数据不受其他因素影响,取加权矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{I}$;由于迭代过程中修正问题的方程组并未出现病态,正则化参数 $\lambda = 0$ 。

试验数据样本是否能真实反映结构动态特性的统计特性关系到修正结果的准确性,是工程中重点关心的问题之一。本文开展了试验模态参数样本数对不确定性模型修正结果误差影响的仿真研究。

表 1 为试验样本数是四种不同情况的修正结果比较。仿真结果表明,试验样本数为 10 时,修正后参数均值精度较高,最大误差不超过 4%,而标准差误差较大,最大误差为 -20.88%;然而,随着试验样本数量的增加(10~10000),修正后参数均值的误差并没有明显降低,标准差的精度逐步提高;当样本数为 10000 时,修正后参数标准差的误差最大为 1.28%。图 2~图 5 为试验样本数是四种不同情况的待修正参数收敛曲线,对于本文的三自由度系统,试验模态参数的样本数对参数收敛速度影响较小,表明了修正效率不受样本数量的影响。根据修正前后待修正参数的均值和标准差,采用蒙特卡洛方法得到。试验样本数为 10000 时修正前后试验频率与计算频率散点图,如图 6 所示。可以看出,采用 10000 个随机样本,可以得到较准确的模拟结果。

表 1 试验样本数为四种不同情况的修正结果比较

Tab. 1 Comparison of updating results using four different sample sizes

模型参数	初始误差 / %	修正后误差 / %			
		10 samples	100 samples	1000 samples	10000 samples
mean(k_1)	100	1.39	2.04	1.07	1.22
mean(k_2)	100	3.84	-3.30	-3.18	-3.16
mean(k_5)	100	0.57	-1.16	0.15	0.58
std(k_1)	50	-6.79	-12.18	1.25	1.28
std(k_2)	50	-20.88	-6.81	-1.90	0.86
std(k_5)	50	-19.65	-4.17	-1.43	0.62

为了进一步说明试验模态参数样本数量对修正后参数的标准差的影响,在多种不同试验样本数情况下分别进行 10 次模型修正,并每次计算参数标准误差的 1 范数为

$$\|\text{error}_{\sigma_p}\|_1 = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sigma_{p(i)}^{\text{updated}} - \sigma_{p(i)}^{\text{exact}}}{\sigma_{p(i)}^{\text{exact}}} \right| \times 100\% \quad (24)$$

式中 N 为待修正参数的数目,上标 exact 和上标 updated 分别为参数的真实值和修正后的值, σ_p 为参数的标准差。

图 7 为不同试验样本数修正后参数标准差误差情况,当仅采用 10 个试验样本进行修正时,修正结果的离散性较大,参数标准差的误差范数变化范

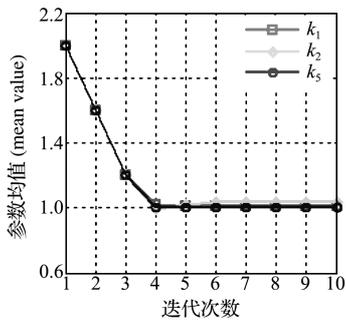


图 2 试验样本数为 10 的待修正参数收敛曲线
Fig. 2 Convergence of updating parameters (10 samples)

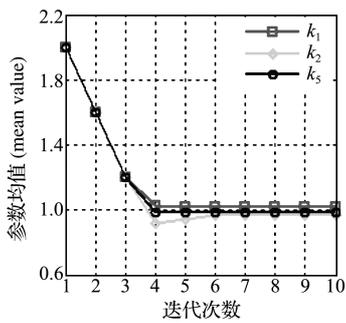
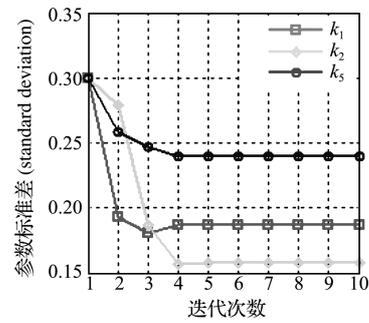


图 3 试验样本数为 100 的待修正参数收敛曲线
Fig. 3 Convergence of updating parameters (100 samples)

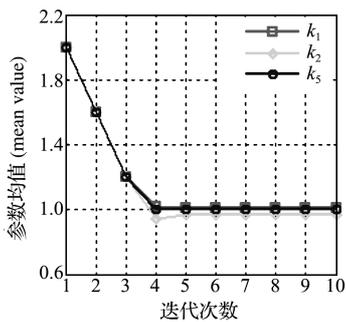
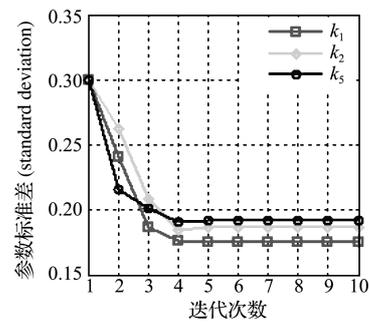


图 4 试验样本数为 1000 的待修正参数收敛曲线
Fig. 4 Convergence of updating parameters (1000 samples)

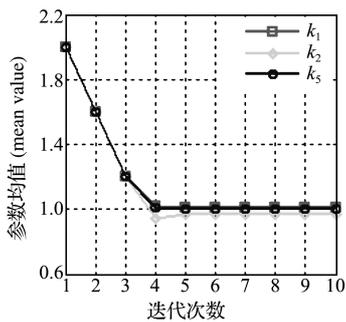
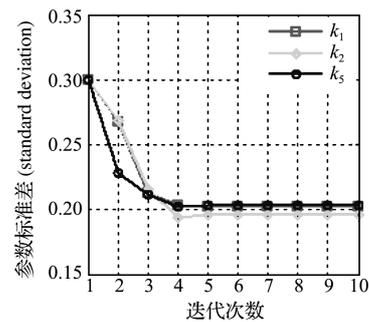


图 5 试验样本数为 10000 的待修正参数收敛曲线
Fig. 5 Convergence of updating parameters (10000 samples)

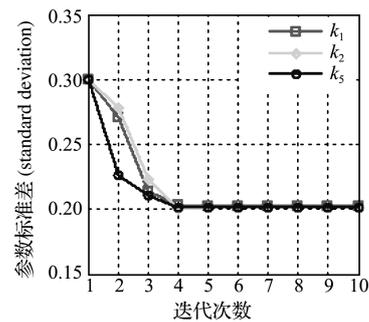




图6 试验样本数为10000时修正前后试验与计算频率散点图

Fig. 6 Initial and updated scatter of experimental and numerical data (10000 samples)

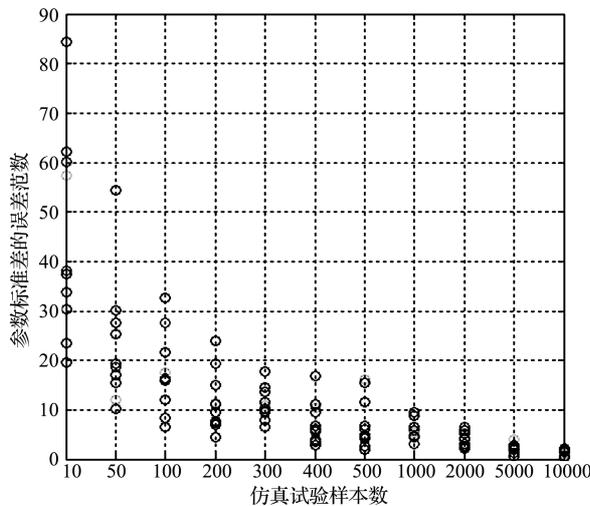


图7 不同试验样本数修正后参数标准差误差情况

Fig. 7 Error of updating parameter standard deviations using different sample sizes

围为19%~85%；当试验样本数为10000时，参数标准差的误差范数最大不超过3%。随着试验样本数量的增加，待修正参数标准差的精度越来越高。

试验模态参数的样本数量为10000时，将本文的修正结果与文献[11]中考虑试验模态参数对待修正参数不确定性的影响(方法一)、不考虑试验的影响(方法二)等得到的修正结果进行比较。如表2为不确定性模型修正结果对比，表明各方法修正后能得到精度相似的结果，对三自由度弹簧-质量模型而言，忽略试验模态参数对待修正参数不确定性的影响能避免计算二阶灵敏度矩阵，能得到较准确的修正结果。

仿真结果表明，样本的离散性是影响修正结果的重要因素。然而，在解决实际问题时，可以通过采样定理筛选能够正确反映试验数据分布特征的有限样本来得到较准确的结果，应进一步开展相关研究。

表2 不确定性模型修正结果对比
Tab. 2 Comparison of updating results by different methods

模型参数	初始误差/%	修正后误差/%		
		方法一	方法二	本文结果
mean(k_1)	100	1.32	1.20	1.22
mean(k_2)	100	-2.26	-2.43	-3.16
mean(k_5)	100	0.57	0.71	0.58
std(k_1)	50	0.88	0.31	1.28
std(k_2)	50	0.46	1.77	0.86
std(k_5)	50	0.24	1.96	0.62

5 结论

本文针对参数不确定性较小的模型修正问题，开展了基于摄动法的不确定性有限元模型修正方法研究；考虑试验模态数据以及结构参数的不确定性，推导了待修正参数均值和协方差的迭代格式，其中协方差的迭代格式为考虑试验数据与待修正参数之间相关性与否的两种形式。

采用三自由度弹簧-质量模型，针对试验模态参数样本数不同的四种情况开展仿真研究。仿真结果表明，修正后参数均值的精度较高，受样本数量影响较小，随着试验样本数量的增加，标准差的误差逐步降低；由收敛曲线可知，修正效率不受样本数量的影响。多种不同试验样本数情况下分别进行10次模型修正的结果表明，随着试验样本数量的增加，待修正参数标准差的离散性越来越小。通过与其他研究者的修正结果进行比较分析，表明忽略试验模态参数对待修正参数不确定性的影响在保证修正精度的前提下避免计算二阶灵敏度矩阵而降低计算量。

仿真研究中,试验模态参数的样本通过伪随机数产生,样本数量较少时模态参数有较大的离散性,对待修正参数标准差精度影响较显著。应进一步开展根据实测数据筛选能够准确反映结构动态性能统计特征的研究。

参考文献(References):

- [1] Mottershead J E, Link M, Friswell M I. The sensitivity method in finite element model updating: a tutorial [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**: 2275-2296.
- [2] 费庆国,张令弥,郭勤涛. GARTEUR 有限元模型修正与确认研究[J]. *航空学报*, 2004, **25**: 372-375. (FEI Qing-guo, ZHANG Lin-mi, GUO Qin-tao. Case study of FE model updating and validation via an aircraft model structure[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2004, **25**: 372-375. (in Chinese))
- [3] 郭勤涛,张令弥,费庆国. 结构动力学有限元模型修正的发展——模型确认[J]. *力学进展*, 2006, **36**: 36-42. (GUO Qin-tao, ZHANG Ling-mi, FEI Qing-guo. From FE model updating to model validation: advances in modeling of dynamic structures [J]. *Advances in Mechanics*, 2006, **36**: 36-42. (in Chinese))
- [4] 朱 跃,张令弥. 基于确定性计算响应面的复杂工程结构不确定性建模研究[J]. *计算力学学报*, 2011, **28**(3): 412-416. (ZHU Yue, ZHANG Ling-mi. Deterministic computer simulation response surface research on complex engineer structure uncertainty [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(3): 412-416. (in Chinese))
- [5] 陈塑寰. 随机参数结构的随机特征值分析[J]. *吉林工业大学学报*, 1984, **4**: 12-18. (CHEN Su-huang. Random eigenvalue analysis for structures with random parameters [J]. *Journal of Jilin University of Technology*, 1984, **4**: 12-18. (in Chinese))
- [6] 宋大同,陈塑寰,杨 荣. 基于随机优化技术的结构参数制造误差的预测[J]. *吉林工业大学学报*, 1996, **26**: 59-64. (SONG Da-tong, CHEN Su-Huang, YANG Rong. Tolerance estimation of structural parameters based on stochastic optimization [J]. *Journal of Jilin University of Technology*, 1996, **26**: 59-64. (in Chinese))
- [7] Adhikari S, Friswell M I. Random matrix eigenvalue problems in structural dynamics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**: 562-591.
- [8] Moens D, Vandepitte D. A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005, **194**: 1527-1555.
- [9] Collins J D, Hart G C, Hasselman T K, et al. Statistical identification of structures [J]. *AIAA Journal*, 1974, **12**(2): 185-190.
- [10] Mares C, Mottershead J E, Friswell M I. Stochastic model updating (Part I) theory and simulated example [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, **20**: 1674-1695.
- [11] Khodaparast H H, Mottershead J E, Friswell M I. Perturbation methods for the estimation of parameter variability in stochastic model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, **22**: 1751-1773.
- [12] Hua X G, Ni Y Q, Chen Z Q, et al. An improved perturbation method for stochastic finite element model updating [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2008, **73**: 1845-1864.
- [13] Khodaparast H H, Mottershead J E, Badcock K J. Interval model updating with irreducible uncertainty using the Kriging predictor [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, **25**: 1204-1226.
- [14] 王登刚,秦仙蓉. 结构计算模型修正的区间反演方法 [J]. *振动工程学报*, 2004, **17**(2): 205-209. (WANG Deng-gang, Qin Xian-rong. Interval method for computational model updating of dynamic structures [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, **17**(2): 205-209. (in Chinese))
- [15] Ahmadian H, Mottershead J E, Friswell M I. Regularization methods for finite element model updating [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1998, **12**: 47-64.

Stockwell transform based power spectrum estimation of non-stationary stochastic process

KONG Fan¹, LI Jie^{*1,2}

(1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. State Key Laboratory Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The evolutionary power spectrum density (EPSD) of the non-stationary stochastic process is estimated via the Stockwell transform (S transform). The approach depends on the slowly varying property of the modulating function of the stochastic process, compared to the kernel of the S transform. This yields the phase-modified S transform of the process on a certain frequency can be viewed as a stochastic process with the EPSD given in terms of the EPSD of the original one. Further, an equation between the mean square value of the instantaneous S-transform and the EPSD of the process is derived. The solution of the equation is sought by representing the EPSD of the process as a sum of squared modulus of Gaussian shape functions of the S transform on the different frequency points, modulated by time-dependent coefficients. Finally, the time-dependent coefficients can be determined by a linear algebra equation. Since the system matrix in the algebra equation only depends on the Gaussian shape function of the S transform, the algorithm shows high computational efficiency. Both the uniformly and non-uniformly modulated stochastic process is employed to demonstrate the accuracy of the proposed approach.

Key words: Stockwell transform; power spectrum density; stochastic process; earthquake excitation

~~~~~  
(上接第 437 页)

## A study on stochastic finite element model updating based on perturbation approach

JIANG Dong<sup>1,2</sup>, FEI Qing-guo<sup>\*1,2</sup>, WU Shao-qing<sup>1,2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Southeast University, Nanjing 210096, China;

2. Jiangsu Key Laboratory of Engineering Mechanics, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** A study on stochastic finite element model updating using perturbation method is conducted in this paper. The uncertain parameters to be updated are divided into the summation of mean value and a deviation term based on which the formulations for the stochastic model updating are derived, two kinds of updating equation for covariance matrix are formulated according to whether the correlation between the updating parameters and the measurements is considered. Based on stochastic model updating method, numerical simulations are conducted with a further study between the number of response samples and the accuracy of the method. Results show that the statistical characteristics of the uncertain parameters can be accurately identified though the iterations of the stochastic model updating method and the accuracy of the updated standard deviations of the parameters are affected by the number of samples. When the correlation between the uncertainties in the updating parameters and in the test data is ignored, higher order sensitivity matrix is not necessary to be calculated, which lead to a lower computational effort but promise results.

**Key words:** finite element model; finite model updating; uncertainty; perturbation method