

多目标规划的单纯形算法

多目标规划问题与线性规划问题相似，可用单纯形算法求解。

注意：在比较检验数大小时，要先比较较高级别的系数，再比较较低级别的系数。

例4-9 (例4-6)

目标函数: $\text{Min } S = P_1 d_1^- + P_2 (5d_2^+ + d_3^+)$

约束方程:

$$6X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 280$$

$$2X_1 + 3X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$4X_1 + 2X_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 (i=1, 2, 3)$$

标准型

目标函数: $\text{Max } S' = -P_1 d_1^- - P_2 (5d_2^+ + d_3^+)$

约束方程:

$$6X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 280$$

$$2X_1 + 3X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$4X_1 + 2X_2 + d_3^- - d_3^+ = 120$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

初始单纯形表

		0	0	0	-P₁	-5p₂	0	-p₂	0	
		x₁	x₂	d₁⁺	d₁⁻	d₂⁺	d₂⁻	d₃⁺	d₃⁻	
-P₁	d₁⁻	6	4	-1	1	0	0	0	0	280
0	d₂⁻	2	3	0	0	-1	1	0	0	100
0	d₃⁻	4	2	0	0	0	0	-1	1	120
λ	P₁	6	4	-1	0	0	0	0	0	
	P₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

首先满足第一目标 P_1 进基变量 x_1 ，出基变量 y_3^- 主元 (4)

		0	0	0	$-P_1$	$-5p_2$	0	$-p_2$	0	
		x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	
$-P_1$	d_1^-	6	4	-1	1	0	0	0	0	280
	d_2^-	2	3	0	0	-1	1	0	0	100
	d_3^-	(4)	2	0	0	0	0	-1	1	120
λ	P_1	6	4	-1	0	0	0	0	0	
	P_2	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

重新计算检验数

		0	0	0	-P₁	-5p₂	0	-p₂	0	
		x₁	x₂	d₁⁺	d₁⁻	d₂⁺	d₂⁻	d₃⁺	d₃⁻	
-P₁	d₁⁻	0	1	-1	1	0	0	3/2	-3/2	100
0	d₂⁻	0	2	0	0	-1	1	1/2	-1/2	40
0	x₁	1	1/2	0	0	0	0	-1/4	1/4	30
	P₁	0	1	-1	0	0	0	3/2	-3/2	
λ	P₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

		0	0	0	-P₁	-5p₂	0	-p₂	0	
		x₁	x₂	d₁⁺	d₁⁻	d₂⁺	d₂⁻	d₃⁺	d₃⁻	
-P₁	d₁⁻	0	1	-1	1	0	0	3/2	-3/2	100
0	d₂⁻	0	(2)	0	0	-1	1	1/2	-1/2	40
0	x₁	1	1/2	0	0	0	0	-1/4	1/4	30
	P₁	0	1	-1	0	0	0	3/2	-3/2	
λ	P₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

第二行除以2

		0	0	0	-P ₁	-5p ₂	0	-p ₂	0	
		x ₁	x ₂	d ₁ ⁺	d ₁ ⁻	d ₂ ⁺	d ₂ ⁻	d ₃ ⁺	d ₃ ⁻	
-P ₁	d ₁ ⁻	0	1	-1	1	0	0	3/2	-3/2	100
0	x ₂	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/4	-1/4	20
0	x ₁	1	1/2	0	0	0	0	-1/4	1/4	30
	P ₁	0	1	-1	0	0	0	3/2	-3/2	
λ	P ₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

计算检验数

		0	0	0	-P₁	-5p₂	0	-p₂	0	
		x₁	x₂	d₁⁺	d₁⁻	d₂⁺	d₂⁻	d₃⁺	d₃⁻	
-P₁	d₁⁻	0	0	-1	1	1/2	-1/2	5/4	-5/4	80
0	x₂	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/4	-1/4	20
0	x₁	1	0	0	0	1/4	-1/4	-3/8	3/8	20
	P₁	0	0	-1	0	1/2	-1/2	5/4	-5/4	
λ	P₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

计算检验数

		0	0	0	-P ₁	-5p ₂	0	-p ₂	0	
		x ₁	x ₂	d ₁ ⁺	d ₁ ⁻	d ₂ ⁺	d ₂ ⁻	d ₃ ⁺	d ₃ ⁻	
-P ₁	d ₁ ⁻	0	0	-1	1	1/2	-1/2	(5/4)	-5/4	80
0	x ₂	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/4	-1/4	20
0	x ₁	1	0	0	0	1/4	-1/4	-3/8	3/8	20
	P ₁	0	0	-1	0	1/2	-1/2	5/4	-5/4	
λ	P ₂	0	0	0	0	-5	0	-1	0	

计算检验数

		0	0	0	-P₁	-5p₂	0	-p₂	0	
		x₁	x₂	d₁⁺	d₁⁻	d₂⁺	d₂⁻	d₃⁺	d₃⁻	
-P₂	d₃⁺	0	0	-4/5	4/5	2/5	-2/5	1	-1	64
0	x₂	0	1	1/5	-1/5	-3/5	3/5	0	0	4
0	x₁	1	0	-3/10	3/10	2/5	-2/5	0	0	44
	P₁	0	0	0	-1	0	0	0	0	
λ	P₂	0	0	-4/5	4/5	-23/5	-2/5	0	-1	

最后变量 y_1^- 的检验数为 $-P_1 + (4/5)P_2$ 由于假定 $P_1 \gg P_2$, 所以此检验数也小于零。

		0	0	0	$-P_1$	$-5p_2$	0	$-p_2$	0	
		x_1	x_2	d_1^+	d_1^-	d_2^+	d_2^-	d_3^+	d_3^-	
$-P_2$	d_3^+	0	0	$-4/5$	$4/5$	$2/5$	$-2/5$	1	-1	64
0	x_2	0	1	$1/5$	$-1/5$	$-3/5$	$3/5$	0	0	4
0	x_1	1	0	$-3/10$	$3/10$	$2/5$	$-2/5$	0	0	44
	P_1	0	0	0	-1	0	0	0	0	
λ	P_2	0	0	$-4/5$	$4/5$	$-23/5$	$-2/5$	0	-1	

该问题的最优方案为生产A产品44个单位，B产品4个单位，利润为280百元。此时，原料正好用了100吨，工时比原计划超了64小时。

例4-10 设某工厂生产两种产品，都要经过两道工序，有关资料如下表。假如工序1，2都允许加班，使得利润不少于1000元作为目标。又以：第1，2工序的加班工时之和尽可能在160之内为第一目标；产品乙必须严格控制在70公斤之内为第二目标；该厂的利润越高越好为第三目标；尽量减少工序1，2加班工时为第四目标。试问：在上述条件下，该厂应如何生产？

小时/公斤	甲	乙	能提供的工时
工序1	2	1	100
工序2	1	1	80
产量上界(kg)	不限	70	
利润 (元/kg)	6	4	

解：设 X_1 ， X_2 为甲，乙两种产品的生产公斤数，

d_1^- ， d_1^+ 分别为低于或超过利润1000元的偏差

d_2^- ， d_2^+ 分别为第1道工序剩余和加班的工时数

d_3^- ， d_3^+ 分别为第2道工序剩余和加班的工时数

d_4^- ， d_4^+ 为加班工时之和低于或超过160工时数

由于产品 X_2 必须严格控制在70公斤之内为第一目标，则可取 d_5^- 为实际公斤数不到70的偏差，且

$d_5^+=0$ 。

目标函数:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z = & P_1 d_4^+ + P_2 d_5^- + P_3 d_1^- \\ & + P_4 (d_2^+ + d_3^+) \end{aligned}$$

约束方程: $6X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 1000$

$$2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 80$$

$$d_2^+ + d_3^+ + d_4^- - d_4^+ = 160$$

$$X_2 + d_5^- = 70$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+, d_5^- \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

目标函数:

$$\text{Max } s = -P_1 d_4^+ - P_2 d_5^- - P_3 d_1^- \\ - P_4 (d_2^+ + d_3^+)$$

约束方程: $6X_1 + 4X_2 + d_1^- - d_1^+ = 1000$

$$2X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 100$$

$$X_1 + X_2 + d_3^- - d_3^+ = 80$$

$$d_2^+ + d_3^+ + d_4^- - d_4^+ = 160$$

$$X_2 + d_5^- = 70$$

$$X_1, X_2, d_i^-, d_i^+, d_5^- \geq 0 \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	6	4	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
0	d ₂ ⁻	2	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	100
0	d ₃ ⁻	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	80
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
-p ₂	d ₅ ⁻	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p ₃	6	4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
	p ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	6	4	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
0	d_2^-	2	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	100
0	d_3^-	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	80
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
$-p_2$	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	6	4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
	p_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	6	4	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
0	d_2^-	2	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	100
0	d_3^-	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	80
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
$-p_2$	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	6	4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1000
	p_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	X_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	6	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-4	720
0	d_2^-	2	1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0	100
0	d_3^-	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	80
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
$-p_2$	d_5^-	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	6	4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	720
	p_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	6	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-4	720
0	d ₂ ⁻	2	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	30
0	d ₃ ⁻	1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	80
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
-p ₂	d ₅ ⁻	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p ₃	6	4	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	720
	p ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	70
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	x _B	x ₁	x ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	6	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	-4	720
0	d ₂ ⁻	2	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	30
0	d ₃ ⁻	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p ₃	6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-4	720
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
0	d_2^-	2	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	30
0	d_3^-	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-4	660
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
0	d_2^-	0	0	0	0	1	-1	-2	2	0	0	1	10
0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-4	660
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
0	d_2^-	0	0	0	0	1	-1	-2	2	0	0	1	10
0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	0	0	0	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	x _B	x ₁	x ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
0	d ₂ ⁻	0	0	0	0	1	-1	-2	2	0	0	1	10
0	x ₁	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p ₃	0	0	0	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
0	d_2^-	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	0	0	0	-1	0	0	-6	6	0	0	2	660
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
0	d_2^-	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	x_1	1	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	-1	10
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
\bar{O}	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	0	0	0	-1	0	0	-6	6	0	0	2	630
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	$-p_3$	0	0	$-p_4$	0	$-p_4$	0	$-p_1$	$-p_2$	
C_B	x_B	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+	d_4^-	d_4^+	d_5^-	b
$-p_3$	d_1^-	0	0	1	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
0	d_2^-	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	x_1	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
0	d_4^-	0	0	0	0	0	1	0	1	1	-1	0	160
0	x_2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p_4	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0
	p_3	0	0	0	-1	0	0	-6	6	0	0	2	630
	p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	-1/2	3/2	1	0	1	-1	-1/2	155
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	5
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
0	d ₄ ⁻	0	0	0	0	-1/2	3/2	1	0	1	-1	-1/2	155
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	5
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	108
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	630
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/2	-1/2	-1	1	0	0	1/2	5
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	108
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	320
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/3	0	-2/3	1	1/3	-1/3	1/3	57
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	160
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	320
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/3	0	-2/3	1	1/3	-1/3	1/3	57
0	X ₁	1	0	0	0	1/2	-1/2	-1	0	0	0	-1/2	15
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	1/2	-3/2	-1	0	0	0	1/2	160
	p ₃	0	0	0	-1	-3	3	0	0	0	0	-1	320
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/3	0	-2/3	1	1/3	-1/3	1/3	57
0	X ₁	1	0	0	0	1/3	0	-2/3	0	1/3	-1/3	-2/3	200/3
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	160
	p ₃	0	0	0	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

表1	C	0	0	-p ₃	0	0	-p ₄	0	-p ₄	0	-p ₁	-p ₂	
C _B	X _B	X ₁	X ₂	d ₁ ⁻	d ₁ ⁺	d ₂ ⁻	d ₂ ⁺	d ₃ ⁻	d ₃ ⁺	d ₄ ⁻	d ₄ ⁺	d ₅ ⁻	b
-p ₃	d ₁ ⁻	0	0	1	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
-p ₄	d ₃ ⁺	0	0	0	0	1/3	0	-2/3	1	1/3	-1/3	1/3	57
0	X ₁	1	0	0	0	1/3	0	-2/3	0	1/3	-1/3	-2/3	200/3
-p ₄	d ₂ ⁺	0	0	0	0	-1/3	1	2/3	0	2/3	-2/3	-1/3	103
0	X ₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	70
Ó	p ₄	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	160
	p ₃	0	0	0	-1	-2	0	-2	0	-2	2	0	320
	p ₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
	p ₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0

到目前为止，已经不能再进行下去， (2)
(1) 否则会破坏已经满足的条件。

该题的解答： $X_1=200/3$ ， $X_2=70$ ，

$d_1^- = 320$ ， $d_2^+ = 310/3$ ， $d_3^+ = 170/3$

$d_4^+ = d_4^- = d_5^- = 0$

即该厂生产方案：生产产品甲 $200/3$ 公斤，
产品乙70公斤，第1道工序加班 $310/3$ 工时，
第2道工序加班 $170/3$ 工时，才能获利

$1000 - d_1^- = 1000 - 320 = 680$ 元。

投资规划实例

某经济区准备筹集资金，在下一个计划期内投资建设新项目，有轻工业、重工业和新技术产业三种项目，这些项目能否如期建成有一定风险。在建成投产后，其收入与投资额有关，经过分析研究，各项目的建设方案不能如期投入的风险因子及投产后可以增加的经济收入的资金收益率百分数如下

项目种类	建设方案	风险因子 r_i	资金收益率 g_i (%)
轻工业	1	0.2	20
轻工业	2	0.2	20
轻工业	3	0.3	12
轻工业	4	0.3	16
新技术产业	5	0.4	30
新技术产业	6	0.2	16
新技术产业	7	0.5	30
重工业	8	0.7	20
重工业	9	0.6	4
重工业	10	0.4	30
重工业	11	0.1	15

根据该地区情况，决策部门提出如下要求：用于轻工业的投资额不超过总资金的35%；用于新技术产业的投资额至少占总资金的15%；用于重工业的投资额不超过总资金的50%；并且首先有考虑总风险因子不超过0.2；其次考虑总收益率至少要达到22%；然后再考虑各项投资的总和不能超过总资金额。现在要确定对不同行业的各投资方案所占的比例。

解： 设 x_i 为第I方案投资占总资金的比例，若总资金数为100%

则轻工业的投资额不超过总资金的35%，可表示为：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 0.35$$

用于新技术产业的投资额至少占总资金的15%，可表示为：

$$x_5 + x_6 + x_7 \geq 0.15$$

用于重工业的投资额不超过总资金的50%

$$x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 0.5$$

第一项：优先因子为 P_1 约束条件：

$$\sum r_i x_i + d_1^- - d_1^+ = 0.2$$

第二项：优先因子为 P_2 约束条件：

$$\sum g_i x_i + d_2^- - d_2^+ = 0.22$$

第三项：优先因子为 P_3 约束条件：

$$\sum x_i + d_3^- - d_3^+ = 1$$

目标函数： $\min Z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^- + P_3 d_3^+$