7-2 动态规划应用举例

例7-6　一家著名的快餐店计划在某城市建立5个分店，这个城市分成三个区，分别用1，2，3表示。由于每个区的地理位置、交通状况及居民的构成等诸多因素的差异，将对各分店的经营状况产生直接的影响。经营者通过市场调查及咨询后，建立了下表。

该表表明了各个区建立不同数目的分店时的利润估计，确定各区建店数目使总利润最大。

店数	区 1	区 2	区 3	店数	区 1	区 2	区 3
0	0	0	0	3	12	14	9
1	3	5	4	4	14	16	10
2	7	10	7	5	15	16	11

解：

阶段：每个区，共三个阶段。

状态：S_k为第k阶段开始时，可供分配的店数。

决策：d_k为分配给区k的店数。

状态转移方程：$S_{k+1}=S_k-d_k$

效益：$r_k(d_k)$为分配给区k，d_k个店时的利润。

$f_k(S_k)$ 为当第k阶段初始状态为S_k时，从第k阶段到最后阶段所得最大利润。

$$\begin{cases} f_k(S_k)=\underset{d_k(S_k)}{\mathrm{Max}}\left\{ \begin{array}{c} r_k(d_k)+f_{k+1}(S_{k+1}) \\ k=1，2，3 \end{array} \right\} \\ f_4(S_4)=0 \end{cases}$$

k=3 时， 计算如下：

S_3	$f_3(S_3)$	d^*_3	S_3	$f_3(S_3)$	d^*_3
0	0	0	3	9	3
1	4	1	4	10	4
2	7	2	5	11	5

店数	区			店数	区		
	1	2	3		1	2	3
0	0	0	0	3	12	14	9
1	3	5	4	4	14	16	10
2	7	10	7	5	15	16	11

k=2 时，计算如下：

$S_3=S_2-d_2$

S_2 \ d_2	$R_2(d_2)+f_3(S_3)$						$f_2(S_2)$	d^*_2
	0	1	2	3	4	5		
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	4	5	-	-	-	-	5	1
2	7	9	10	-	-	-	10	2
3	9	12	14	14	-	-	14	2,3,
4	10	14	17	18	16	-	18	3
5	11	15	19	21	20	16	21	3

k=1 时， 计算如下：

最优解：$d^*_1=3$， $d^*_2=2$，$d^*_3=0$

即：在区1建3个分店，在区2建2个分店，而不在区3建立分店。最大总利润=22。

d_1 / S_1	$R_1(d_1)+f_2(S_2)$ 0	1	2	3	4	5	$f_1(S_1)$	d^*_1
5	21	21	21	22	19	15	22	3

$d_1^*=3, s_2=s_1-d_1^*=5-3=2, d_2^*=2$

$s_3=s_2-d_2^*=2-2=0, d_3^*=0$

s_i	$f_1(s_1)$	d_1^*	$f_2(s_2)$	d_2^*	$f_3(s_3)$	d_3^*
0			0	0	0	0
1			5	1	4	1
2			10	2	7	2
3			14	2,3	9	3
4			18	3	10	4
5	22	3	21	3	11	5

建立动态规划模型的要点：

- 分析题意，识别问题的多阶段性，按时间或空间的先后顺序适当地划分满足递推关系的若干阶段，对非时序的静态问题要人为地赋予“时段”的概念。

建立动态规划模型的要点：

- 正确地选择状态变量，使其具备两个必要特征：

（1）可知性：即过去演变过程的各阶段状态变量的取值，能直接或间接地确定。

（2）能够确切地描述过程的演变且满足无后效性。

建立动态规划模型的要点：

- 根据状态变量与决策变量的含义，正确写出状态转移方程或转移规则。
- 根据题意明确指标函数，最优指标函数以及一段效益即阶段指标的含义。并正确列出最优指标函数的递推关系及边界条件（即 DP基本方程）。

例7-7（投资问题）现有资金5百万元，可对三个项目进行投资，投资额均为整数（单位为百万元），其中2#项目的投资不得超过3百万元，1#和3#项目的投资均不得超过4百万元， 3#项目至少要投资1百万元，每个项目投资5年后，预计可获得收益由下表给出，问如何投资可望获得最大收益。

投资额 项目	0	1	2	3	4
1#	0	3	6	10	12
2#	0	5	10	12	-
3#	-	4	8	11	15

解：这个投资问题可以分成三个阶段，在第k阶段确定k #的投资额

令 S_k——对1#，2#……（ k -1）#项目投资后剩余的资金额。

X_k——对k项目的投资额。

r_k（ X_k）——对k#项目投资X_k的收益.

$f_k(S_k)$——应用剩余的资金S_k对k#,（ k+1）#……N#投资可获得的最大收益。

状态转移方程为：$S_{k+1}= S_k- X_k$

为了获得最大收益，必须将5百万元全部用于投资，故假想有第4阶段存在时，必有$S_4=0$，于是得递推方程：

$$
\begin{cases}
f_k(S_k)= \max\limits_{dk(Sk)} \left\{ r_k (X_k)+ f_{k+1}(S_{k+1}) \right\} & k=3,2,1 \\
f_4(S_4)=0
\end{cases}
$$

当k=3时，（3#至多投资4百万元，至少投资1百万元）

$f_3(1)=4$， $f_3(2)=8$， $f_3(3)=11$， $f_3(4)=15$

当k=2时，（2#投资不超过3百万元）

$f_2(1) = r_2(0) + f_3(1) = 0 + 4$

$f_2(2) = \mathrm{Max}\{\, r_2(1) + f_3(1)\ \ r_2(0) + f_3(2) \,\}$

$= \mathrm{Max}\{\, 5+4,\ 0+8 \,\}$

$= 9$

当k=2时，（2#投资不超过3百万元）

$$f_2(3) = \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l} r_2(2)+f_3(1) \\ r_2(1)+f_3(2) \\ r_2(0)+f_3(3) \end{array}\right\}$$

$= \mathrm{Max}\ \{10+4，5+8，0+11\}$

$= 14$

$f_2(4)$

$$= \mathrm{Max}\begin{Bmatrix} r_2(3)+f_3(1) & r_2(2)+f_3(2) \\ r_2(1)+f_3(3) & r_2(0)+f_3(4) \end{Bmatrix}$$

$$= \mathrm{Max}\{12+4,\ 10+8,\ 5+11,\ 0+15\}$$

$$= 18$$

当k=2时，（2#投资不超过3百万元）

$$f_2(5) = \mathrm{Max}\begin{Bmatrix} r_2(3)+f_3(2) & r_2(2)+f_3(3) \\ r_2(1)+f_3(4) & \end{Bmatrix}$$

$$= \mathrm{Max}\quad 12+8，10+11，5+15$$

$$= 21$$

注意：3#至多投资4百万元

当k=1时，S_1=5（最初有5百万元，3#至少投资1百万元）

$$f_1(5) = \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{ll} r_1(0)+f_2(5) & r_1(1)+f_2(4) \\ r_1(2)+f_2(3) & r_1(3)+f_2(2) \\ r_1(4)+f_2(1) & \end{array}\right\}$$

$$= \mathrm{Max}\left\{\begin{array}{l} 0+21,\ 3+18,\ 6+14 \\ 10+9,\ 12+4 \end{array}\right\}$$

$$= 21$$

解：应用顺序反推可知，最优投资方案：

方案1：$X^*_1=0$，$X^*_2=2$，$X^*_3=3$

方案2：$X^*_1=1$，$X^*_2=2$，$X^*_3=2$

最大收益均为21百万元。

一维“背包”问题

例7-8：有一辆最大货运量为10吨的卡车，用于装载三种货物，每种货物的单位重量及相应单位价值如下，应如何装载可使总价值最大？

货物编号 i	1	2	3
单位重量（吨）	3	4	5
单位价值 Ci	4	5	6

解:

设第i种货物装载的件数为$x_i(i=1,2,3)$

则问题可表示为:

$$\max \quad Z=4x_1+5x_2+6x_3$$

$$3x_1+4x_2+5x_3 \le 10$$

$x_i \ge 0$且为整数$(i=1,2,3)$

方法一：由于决策变量取整数，所以可以用列表法求解。

当k=1时，$f_1(s)= \max\limits_{\substack{0\le 3x_1 \le s \\ x_1\text{为整数}}} \{4x_1\}$

或 $f_1(s)= \max\limits_{\substack{0\le x_1 \le s/3 \\ x_1\text{为整数}}} \{4x_1\} = 4\,[s/3]$

计算结果见下表:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(s)$	0	0	0	4	4	4	8	8	8	12	12
x_1^*	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3

当k=2时, $f_2(s) = \max\limits_{\substack{0 \le x_2 \le s/4 \\ x_2\text{为整数}}} \{5x_2 + f_1(s-4x_2)\}$

计算结果见下表:

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_2	0	0	0	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1,2	0,1,2	0,1,2
c2+f1	0	0	0	4	4,5	4,5	8,5	8,9	8,9,10	12,9,10	12,13,10
$f_2(s)$	0	0	0	4	0,5	5	8	9	10	12	13
x_2^*	0	0	0	0	1	1	0	1	2	0	1

当k=3时

$$f_3(10)=\max_{\substack{0\le x_3\le 2\\ x_3\text{为整数}}}\{6x_3+f_2(10-5x_3)\}$$

$$=\max_{x_3=0,1,2}\{6x_3+f_2(10-5x_3)\}$$

$$=\max\{f_2(10),6+f_2(5),12+f_2(0)\}$$

$$=\max\{13,6+5,12+0\}$$

$$=13$$

此时x_3*=0，可推得全部策略为：

x_1*=2，x_2*=1， x_3*=0，最大价值为13。

方法二：问题最终要求$f_3(10)$。

而$f_3(10)= \max\limits_{\substack{3x_1+4x_2+5x_3 \le 10 \\ x_i 为整数 I=1,2,3}} \{4x_1+5x_2+6x_3\}$

$= \max\limits_{\substack{3x_1+4x_2 \le 10-5x_3 \\ x_i 为整数 I=1,2,3}} \{4x_1+5x_2+6x_3\}$

$$= \max_{\substack{10-5x_3 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \text{为整数}}} \{6x_3 + \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leq 10-5x_3 \\ x_i \geq 0 \text{为整数} I=1,2}} [4x_1+5x_2]\}$$

$$= \max_{x_3=0,1,2} \{6x_3 + f_2(10-5x_3)\}$$

$$= \max\{ 0+f_2(10), 6+ f_2(5), 12+ f_2(0)\}$$

由此看到要计算$f_3(10)$须先计算

$f_2(10)$， $f_2(5)$ ， $f_2(0)$

而

$$f_2(10) = \max \{4x_1+5x_2\}$$

$3x_1+4x_2 \leq 10$ x_1，$x_2 \geq 0$整数

$$= \max \{4x_1+5x_2\}$$

$3x_1 \leq 10-4x_2$ x_1，$x_2 \geq 0$整数

$$= \max_{\substack{10-4x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 0\text{整数}}} \{5x_2 + \max_{\substack{3x_1 \leq 10-4x_2 \\ x_1 \geq 0\text{整数}}} [4x_1]\}$$

$$= \max_{x_2=0，1，2} \{5x_2 + f_1(10-4x_2\}$$

$$= \max\{ f_1(10),5+ f_1(6),10+ f_1(2)\}$$

同理，

$$f_2(5)= \max_{\substack{3x_1+4x_2\leq 5 \\ x_1,\ x_2\geq 0\text{整数}}} \{4x_1+5x_2\}$$

$$= \max_{x_2=0,\ 1} \{5x_2+ f_1(5-4x_2)\}$$

$$= \max\{ f_1(5),5+ f_1(1)\}$$

$$f_2(0) = \max\{4x_1+5x_2\}$$

$$3x_1+4x_2 \le 0$$

$$x_1，x_2 \ge 0\text{整数}$$

$$= \max\{5x_2+ f_1(0-4x_2)\}$$

$$x_2=0$$

$$= f_1(0)$$

为了计算$f_2(10)$ $f_2(5)$ $f_2(0)$需要先计算$f_1(10)$ $f_1(6)$ $f_1(5)$ $f_1(2)$ $f_1(1)$ $f_1(0)$。

由于 $f_1(s)=\max\limits_{\substack{0\le x_1\le s/3 \\ x_1\text{为整数}}}\{4x_1\}=4[s/3]$

$f_1(10)=12$（$x_1=3$），$f_1(6)=8$（$x_1=2$），$f_1(5)=4$（$x_1=1$）， $f_1(2)=0$ （$x_1=0$），$f_1(1)=0$ （$x_1=0$）， $f_1(0)=0$ （$x_1=0$）。

从而

$f_2(10) = \max\{ f_1(10), 5+ f_1(6), 10+ f_1(2)\}$

$= \max\{12，5+8，10+0\}$

$= 13$ （$x_1=2$，$x_2=1$）

$f_2(5) = \max\{ f_1(5), 5+ f1(1) \}$

$= \max\{4，5+0\}$

$= 5$ （$x_1=0$，$x_2=1$）

$f_2(0) = f_1(0) = 0$ （$x_1=0$，$x_2=0$）

最后有

$$f_3(10)= \max\{ f_2(10),6+ f_2(5),12+ f_2(0)\}$$

$$= \max\{13,6+5,12+0\}$$

$$= 13$$

（$x_1=2$， $x_2=1$， $x_3=0$）

二维“背包”问题

例7-9：有一辆最大货运量为12吨，最大容量10立方米的某种类型卡车，用于装载两种货物A、B，每种货物的单件重量分别3吨、4吨，体积为1立方米、5立方米，价值为2、3，求合理装载的最大效益？

解：设A、B货物装载的件数为

x_i (i=1, 2)

则问题可表示为:

$$\max \quad Z=2x_1+3x_2$$

$$3x_1+4x_2 \le 12$$

$$x_1+5x_2 \le 10$$

$$x_i \ge 0\text{整数} \quad (i=1, 2)$$

并解出

$$f_2(12, 10) = \max_{\substack{3x_1+4x_2 \leq 12 \\ x_1+5x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0\text{整数}(i=1,2)}} \{2x_1+3x_2\}$$

$$= \max_{\substack{3x_1 \leq 12-4x_2 \\ x_1 \leq 10-5x_2 \\ x_i \geq 0\text{整数}(i=1,2)}} \{2x_1+3x_2\}$$

$$= \max \quad \{3x_2 + f_1(12-4x_2, 10-5x_2)\}$$

$12-4x_2 \geq 0$

$10-5x_2 \geq 0$

$x_i \geq 0$整数$(i=2)$

$$= \max \quad \{3x_2 + f_1(12-4x_2, 10-5x_2)\}$$

$x_2 \leq 12/4$

$x_2 \leq 10/5$

$x_i \geq 0$整数$(i=2)$

$$= \max_{x_2=0,1,2} \{3x_2 + f_1(12-4x_2, 10-5x_2)\}$$

$$= \max \{f_1(12,10), 3+f_1(8,5), 6+f_1(4,0)\}$$

先 要计算

$f_1(12,10)$, $f_1(8,5)$,及 $f_1(4,0)$

$$f_1(12,10)= \max_{\substack{3x_1 \le 12 \\ x_1 \le 10 \\ x_1 \ge 0\text{整数}}} \{2x_1\} = \max_{x_1=0,1,2,3,4} \{2x_1\}$$

$= 8 \qquad (x_1^*=4)$

同理，

$f_1(8,5)=4\ (x_1^*=2)$ $\qquad$ $f_1(4,0)=0\ \ (x_1^*=0)$

$f_2(12，10)$

$= \max\{f_1(12,10),3+ f_1(8,5),6+ f_1(4,0)\}$

$= \max\{8，3+4，6+0\}$

$= 8 \quad (x_1^*=4\ x_2^*=0)$

因此，最优方案为：装A种货物4件，不装B种货物，最大价值为8。

连续变量的解法

例7-10：某公司有资金10万元，可投资于项目i (i=1, 2, 3)，若投资额为x_i，

其收益分别为$g_1(x_1)=4x_1$，

$g_2(x_2)=9x_2$，

$g_3(x_3)=2x_3^2$，

问如何分配投资额，使总收益最大？

解：建立此问题的数学模型求x_i使

$$\max \quad Z=4x_1+9x_2+2x_3^2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1+x_2+x_3 \le 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

按变量个数分阶段，可看成三段决策问题，设状态变量s_k表示：第k阶段可以分配给第k到第3个项目的资金额。决策变量x_k：决定投资给第k个项目的资金额。

则有：$s_1=10$，　$s_2=s_1-x_1$，$s_3=s_2-x_2$

即状态转移方程为：$s_{k+1}=s_k-x_k$

令最优指标函数$f_k(s_k)$表示第k个阶段，初始状态为s_k时，从第k个到第3个项目所获最大收益，$f_1(s_1)$即为所求的总收益。

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{x_k}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})\} \quad k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

k=3 时，

$$f_3(s_3)= \max_{0 \le x_3 \le s_3} \{2x_3^2\}$$

当$x_3^*=s_3$时，取得最大值 $2s_3^2$

即：$f_3(s_3)= \max_{0 \le x_3 \le s_3} \{2x_3^2\} = 2s_3^2$

k=2 时，

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+f_3(s_3)\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+2s_3^2\}$$

$$=\max_{0\le x_2\le s_2}\{9x_2+2(s_2-x_2)^2\}$$

令 $h_2(s_2, x_2)= 9x_2+ 2(s_2-x_2)^2$

由 $dh_2/dx_2=9+4(s_2-x_2)(-1)=0$

解得 $x_2=s_2-9/4$

而 $d^2h_2/dx_2^2=4>0$

所以 $x_2=s_2-9/4$ 是极小点

极大点只可能在[0， s_2]端点取得：

$$f_2(0) = 2s_2^2$$

$$f_2(s_2) = 9s_2$$

当 $s_2 \geq 9/2$ 时， $f_2(0) \geq f_2(s_2)$，

此时 $x_2^*=0$

当 $s_2 \leq 9/2$ 时， $f_2(0) < f_2(s_2)$ ，

此时 $x_2^*= s_2$

$k=1$ 时， $f_1(s_1)=\max\limits_{0\le x_1\le s_1}\{4x_1+f_2(s_2)\}$

当$f_2(s_2)=9s_2$时,

$$f_1(10)=\max_{0\le x_1\le 10}\{4x_1+9s_1-9x_1\}$$

$$=\max_{0\le x_1\le 10}\{9s_1-5x_1\}$$

$$=9s_1\quad(x_1^*=0)$$

但此时$s_2=s_1-x_1=10-0=10>9/2$,

与$s_2<9/2$矛盾。故舍去。

当$f_2(0)=2s_2^2$时，

$f_1(10)= \max\{4x_1+2(s_1-x_1)^2\}$

$0 \le x_1 \le 10$

令

$h_1(s_1,x_1)=4x_1+2(s_1-x_1)^2$

由

$dh_1/dx_1=4+4(s_1-x_1)(-1)=0$

解得

$x_1=s_1-1$

而 $d^2h_1/dx_1^2=1>0$

所以 $x_1=s_1-1$ 是极小点，

比较[0，10]两个端点，

$x_1=0$时， $f_1(10) = 200$

$x_1=10$时， $f_1(10) = 40$

所以 $x_1^*=0$

再由状态方程得

$s_2=s_1-x_1^*=10-0=10$

由于 $s_2 \geq 9/2$，

因此 $x_2^*=0$,

$s_3=s_2-x_2^*=10-0=10$

所以 $x_3^*=s_3=10$

最优投资方案为全部资金投入第3个项目可得最大收益200万元。