现代控制理论

Modern Control Theory

(16)

俞　立

浙江工业大学 信息与控制研究所

应用MATLAB命令来计算观测器增益矩阵：

```
L=(acker(A',C',V))'
L=(place(A',C',V))'
```

观测器设计时注意的问题：

- ✓ 观测器极点比系统极点快2～5倍；
- ✓ 并非越快越好。

兼顾观测器误差的衰减和系统抗扰动能力。

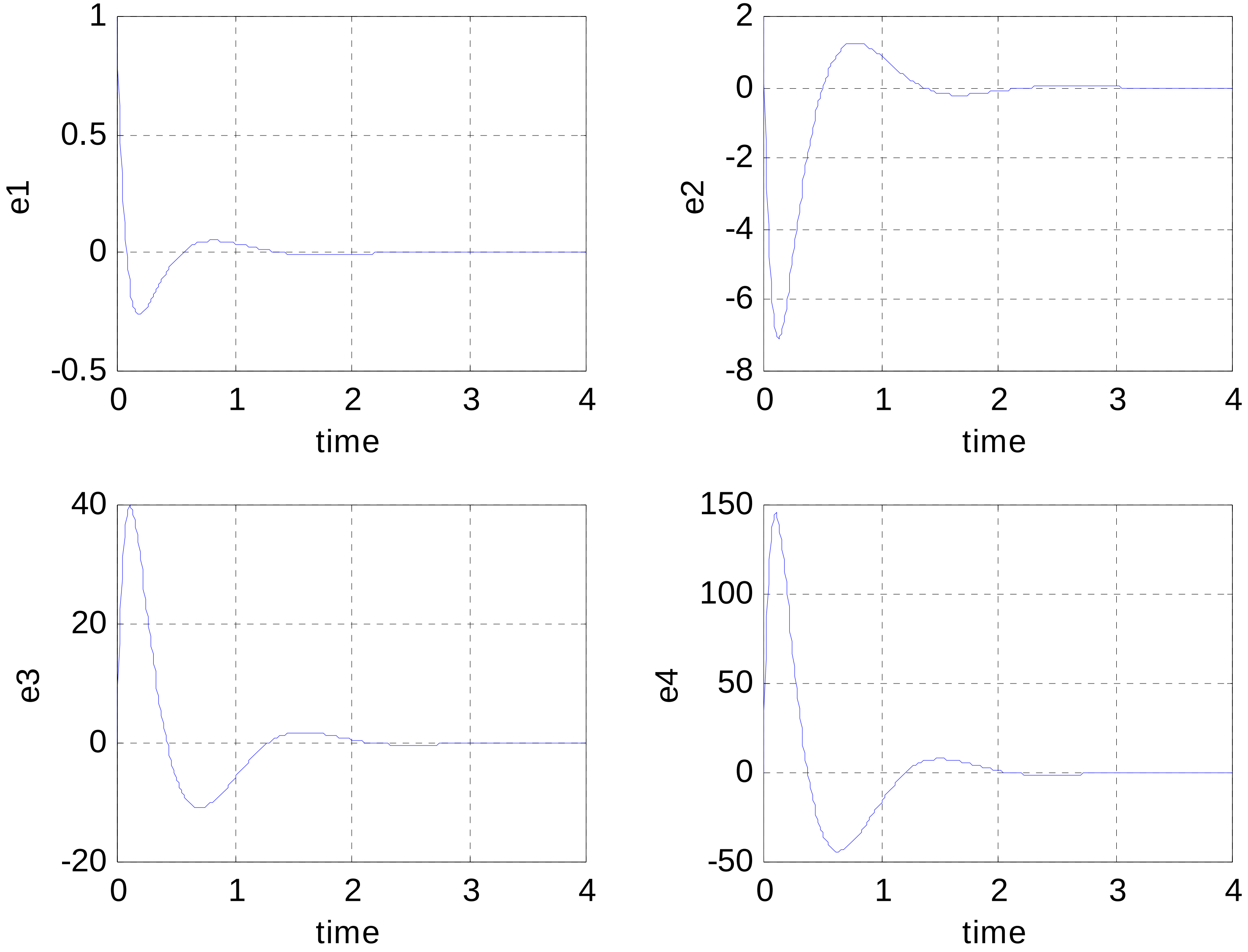
倒立摆例子

$$\boldsymbol{x} = [y \quad \dot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^{\mathrm{T}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

初始误差：$\boldsymbol{e}(0)=[1 \quad 2 \quad 0.1 \quad -0.1]^{\mathrm{T}}$



基于观测器的控制器设计

系统模型

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

假定系统是能控、能观的。

使得闭环系统极点为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的状态反馈控制律是 $u = -Kx$。若系统状态不能直接测量，可以用观测器

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}) \\ &= (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly\end{aligned}$$

来估计系统的状态。进而用 $u = -K\tilde{x}$ 来替代原来的控制

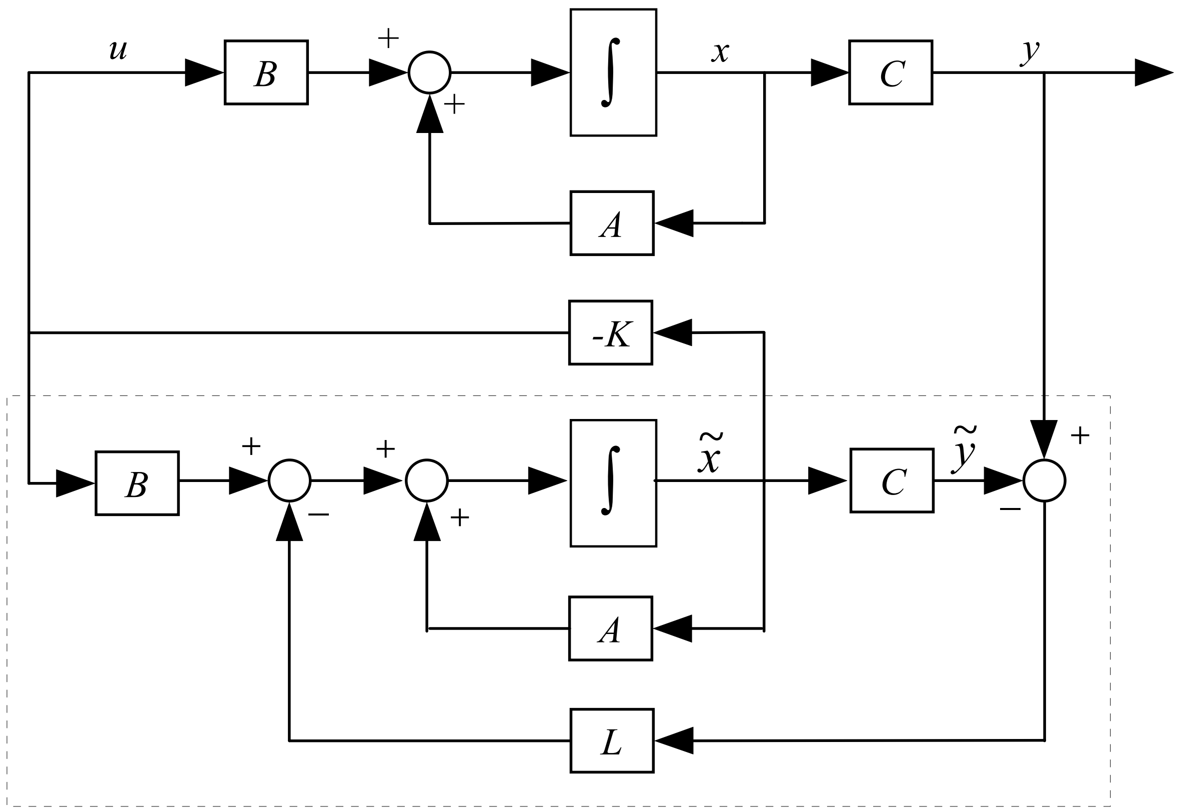
问题：还具有原来的效果吗？

利用状态估计值的反馈控制器是

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC - BK)\tilde{x} + Ly$$

$$u = -K\tilde{x}$$

基于观测器的输出反馈控制系统结构图：



观 测 器

增加了积分器，闭环系统是2n阶的。

$[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 为闭环系统状态，则闭环系统状态方程：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

写成矩阵向量形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \tilde{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix}$$

定义误差向量：$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{e}}(t) &= \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \\ &= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\boldsymbol{e}(t) \end{aligned}$$

若选择 $[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$为闭环系统状态，
$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK} \\ 0 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK} & -\boldsymbol{BK} \\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC} \end{bmatrix}\right) = \det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{LC})$$

分离性原理 闭环系统的极点是极点配置单独设计产生的极点和由观测器单独设计产生的极点两部分组成。

设计可以分步完成：

第1步：设计状态反馈控制器；

第2步：若状态不能直接测量，则设计观测器；

第3步：利用状态反馈和观测器增益矩阵构造控制器。

例 系统状态空间模型的系数矩阵：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

已知系统状态不能直接测量，试设计控制器，使得闭环系统渐近稳定。

解：输出反馈控制器： $u=-ky$

闭环矩阵：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}k\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1-k\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

特征多项式： λ^2+1-k

结论：无论k取什么值，无法将两个闭环极点配置在左半开复平面。

例 系统状态空间模型的系数矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

系统能控、能观。

状态反馈控制器：$u=-[k_1 \quad k_2]\boldsymbol{x}$

闭环矩阵：$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]=\begin{bmatrix}-k_1 & 1-k_2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

特征多项式：$\lambda^2+k_1\lambda+1-k_2$

选取 $\boldsymbol{K}=[k_1 \quad k_2]=[1 \quad -1]$，则闭环极点 $-0.5\pm \mathrm{j}1.32$

状态不可测，设计状态观测器。

选取观测器极点：$\mu_1=-2$，$\mu_2=-2$

应用极点配置方法，可得观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}=[4\quad 3]^{\mathrm{T}}$

观测器模型：
$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}y$$

根据分离性原理，由以上分别得到的状态反馈和观测器增益矩阵可构造基于观测器的输出反馈控制器：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -4 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}4\\ 3\end{bmatrix}y$$
$$u=-[1\quad -1]\tilde{\boldsymbol{x}}$$

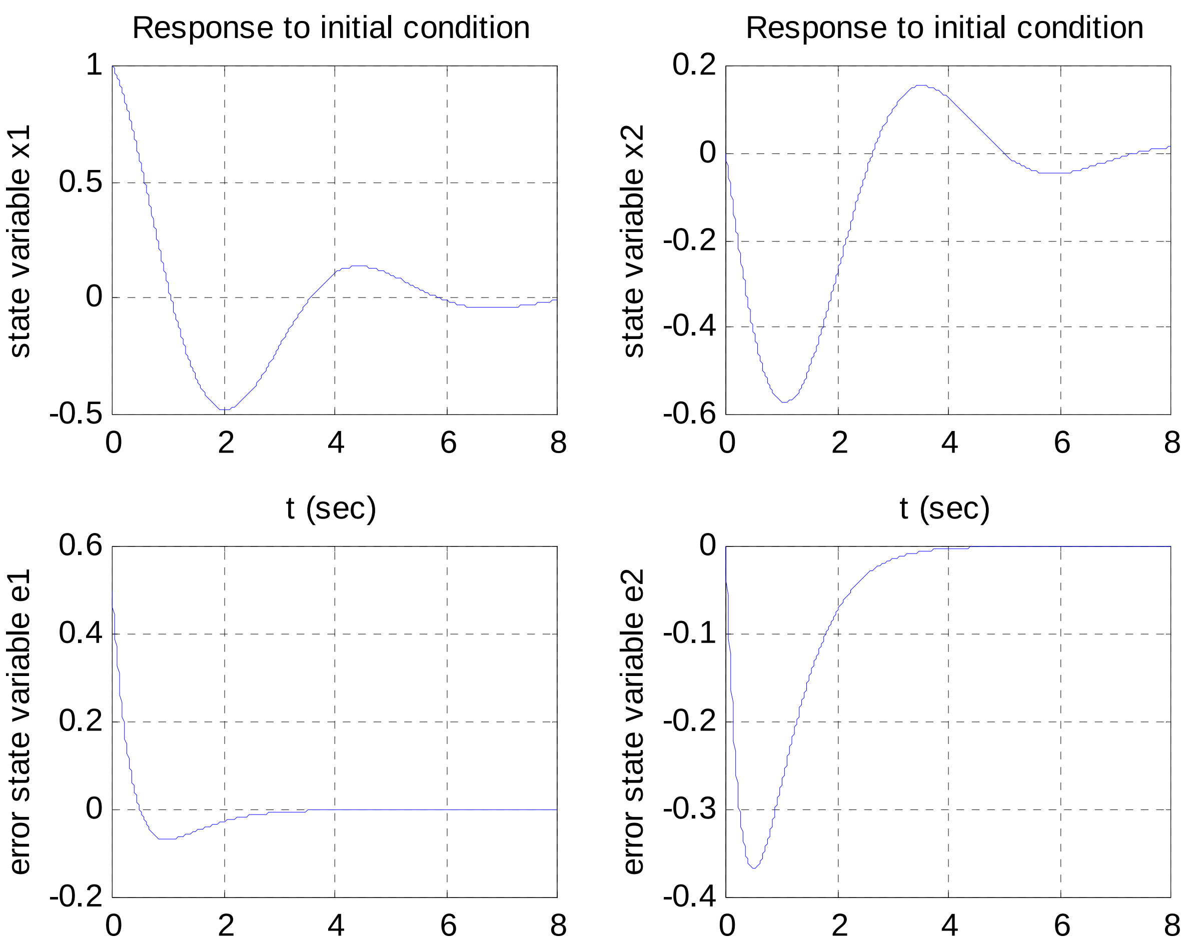
系统的动态特性：

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{e}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK} & \boldsymbol{BK}\\ 0 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{e}\end{bmatrix}$$

检验系统的稳定性：

对象和误差的初始条件： $\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{e}(0)=\begin{bmatrix}0.5\\0\end{bmatrix}$

系统曲线：



一般的输出反馈动态补偿器：

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c y$$
$$u = C_c x_c + D_c y$$

其中：$x_c \in R^{n_c}$是控制器的状态向量，A_c, B_c, C_c 和 D_c是待定的控制器参数。

若 $n_c = 0$，则相应的控制器是静态的，具有形式：

$$u = D_c y$$

静态输出反馈控制器。

特点：设计参数多，可达到更多性能；

物理意义不明显；

设计更加复杂。

倒立摆系统模型：

状态：$\boldsymbol{x}=[y \quad \dot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^{\mathrm{T}}$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=[1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]\boldsymbol{x}$$

小车的位移是可以直接测量的。

设计的状态观测器，可以得到整个状态的估计。也得到了小车位移的估计。

问题：对所有状态分量都估计是否必要？

计算量？精度？

降阶观测器！

降阶观测器设计

考虑单输出系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

假定矩阵C具有形式[1 0]，将系统状态x分划成两部分：

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

其中x_a是一个标量，对应的恰好是系统的输出，x_b 是状态向量中不能直接测量的部分。

对状态空间模型进行类似分划：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & A_{ab} \\ A_{ba} & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$$

由此可得：

$$\dot{x}_a = A_{aa} x_a + A_{ab} x_b + B_a u$$

$$\dot{x}_a - A_{aa} x_a - B_a u = A_{ab} x_b$$

$$\dot{x}_b = A_{ba} x_a + A_{bb} x_b + B_b u$$

$$= A_{bb} x_b + (A_{ba} x_a + B_b u)$$

可以考虑新的状态空间模型：

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + (A_{ba}x_a + B_b u)$$

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = A_{ab}x_b$$

降阶观测器模型

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - LA_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + L(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u)$$

如何消除微分信号？

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_b - L\dot{x}_a &= (A_{bb} - LA_{ab})\tilde{x}_b + (A_{ba} - LA_{aa})y + (B_b - LB_a)u \\ &= (A_{bb} - LA_{ab})(\tilde{x}_b - Ly) + [(A_{bb} - LA_{ab})L + A_{ba} - LA_{aa}]y \\ &\quad + (B_b - LB_a)u\end{aligned}$$

引进记号：

$$x_b - Ly = x_b - Lx_a = w$$

$$\tilde{x}_b - Ly = \tilde{x}_b - Lx_a = \tilde{w}$$

$$A_{bb} - LA_{ab} = \hat{A}$$

$$\hat{A}L + A_{ba} - LA_{aa} = \hat{B}$$

$$B_b - LB_a = \hat{F}$$

则降阶观测器模型是

$$\dot{\tilde{w}} = \hat{A}\tilde{w} + \hat{B}y + \hat{F}u$$

$$\tilde{x}_b = \tilde{w} + Ly$$

由于

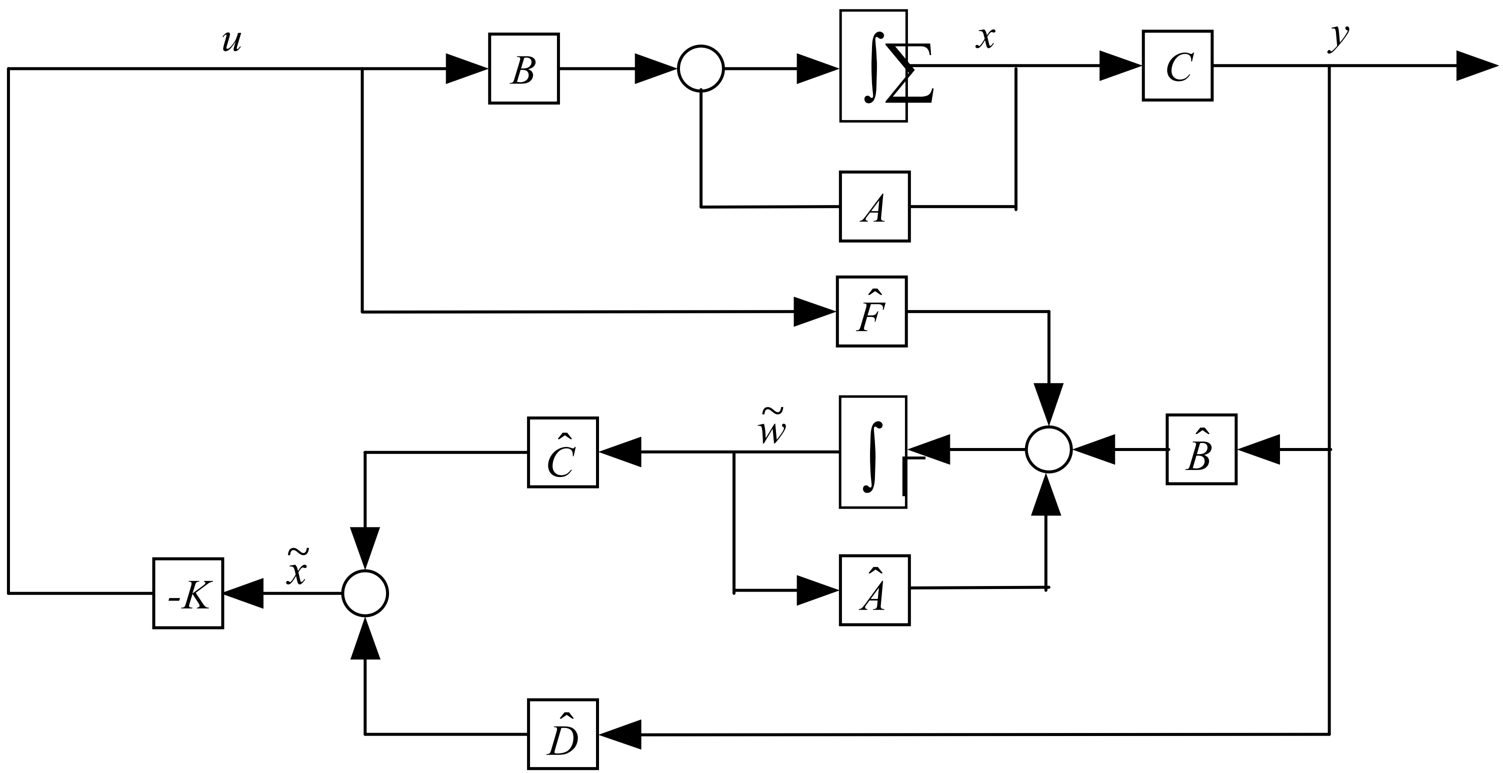
$$\tilde{x}=\begin{bmatrix} x_a \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ \tilde{x}_b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y \\ \tilde{w}+Ly \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\tilde{w}+\begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix}y$$

基于状态估计值的反馈控制器是

$$\begin{aligned} u &= -K\tilde{x} \\ &= -\begin{bmatrix} K_a & K_b \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}\tilde{w}+\begin{bmatrix} 1 \\ L \end{bmatrix}y\right) \\ &= -K_b\tilde{w}-(K_a+K_bL)y \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{w}}=(\hat{A}-\hat{F}K_b)\tilde{w}+[\hat{B}-\hat{F}(K_a+K_bL)]y$$

$$u=-K_b\tilde{w}-(K_a+K_bL)y$$



基于状态观测器的反馈控制器

误差模型：

$$\dot{e} = (A_{bb} - LA_{ab})e$$

闭环系统的特征多项式是

$$\left|\lambda I - A + BK\right|\left|\lambda I - A_{bb} + LA_{ab}\right| = 0$$

求解降阶观测器的MATLAB命令

```
L=(acker(Abb',Aab',V))'
L=(place(Abb',Aab',V))'
```

例　考虑系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

要配置的闭环极点是

$$\lambda_1 = -2 + \mathrm{j}2\sqrt{3} \qquad \lambda_2 = -2 - \mathrm{j}2\sqrt{3} \qquad \lambda_3 = -6$$

则可得状态反馈增益矩阵

K=[90.0000 29.0000 4.0000]

若只有系统的输出是可以直接测量的，则需要设计一个降阶观测器。

降阶观测器是2阶的，要求的极点是

$$\mu_1 = -10 \qquad \mu_1 = -10$$

进行分块：

$$x = \left[\begin{array}{c} x_a \\ \hline x_b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline x_2 \\ x_3 \end{array}\right], \qquad A = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{array}\right], \qquad B = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{array}\right]$$

$$A_{aa} = 0, \qquad A_{ab} = [1 \quad 0], \qquad A_{ba} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A_{bb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}, \qquad B_a = 0, \qquad B_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

可以得到观测器的增益矩阵

$$L=[\,14 \quad 5\,]'$$

观测器模型：

$$\dot{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} -14 & 1 \\ -16 & -6 \end{bmatrix} \tilde{w} + \begin{bmatrix} -191 \\ -260 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix} + Lx_1$$

反馈控制律

$$u = -90y - [29 \quad 4] \begin{bmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$$