现代控制理论

Modern Control Theory

(15)

俞　立

浙江工业大学 信息工程学院

控制系统设计的目标

- ✓ 闭环系统稳定；
- ✓ 闭环系统具有满意的过渡过程；

采用的方法

极点配置

设计的控制器

状态反馈控制器：$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$

存在的问题

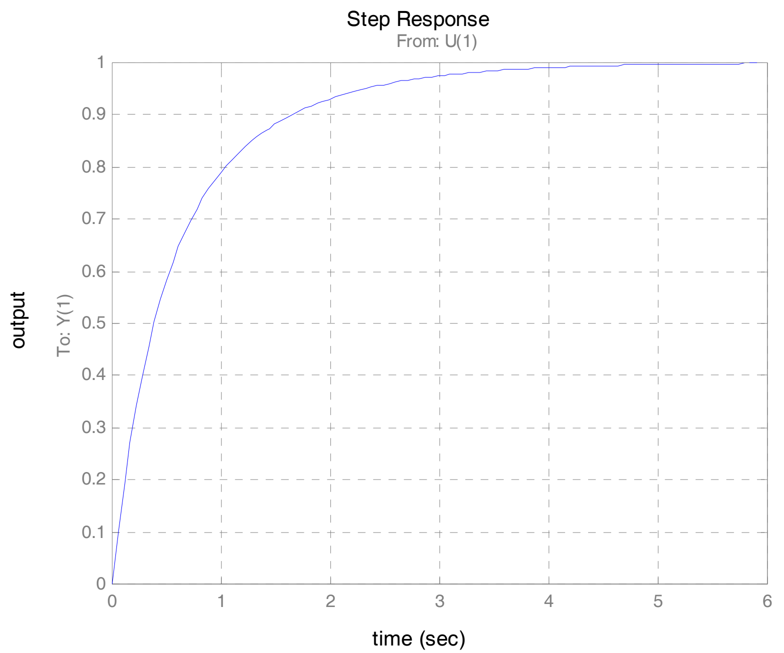
极点配置在改善系统性能的同时可能产生稳态误差

例 已知被控对象的状态空间模型为

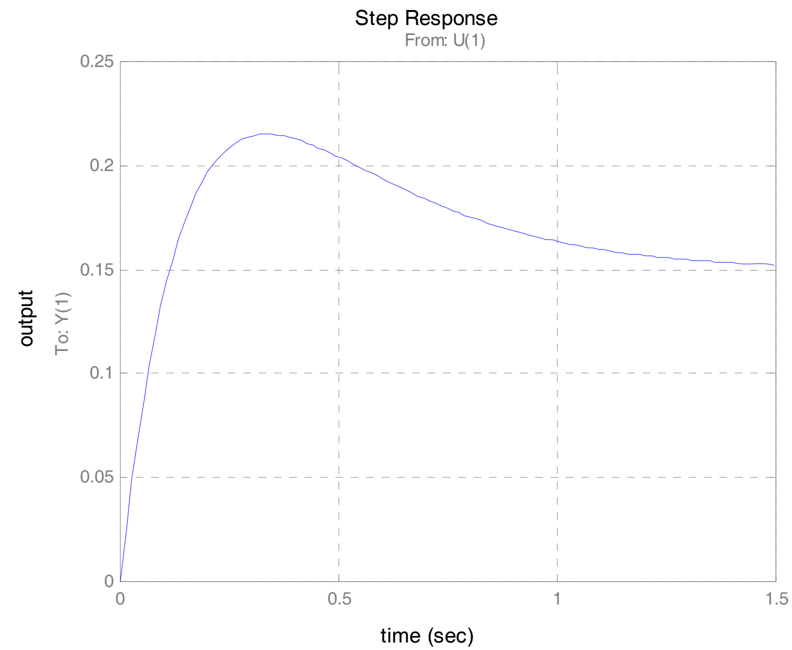
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

开环极点是−1和−3。状态反馈控制律 $\boldsymbol{u} = -[17 \quad 5]\boldsymbol{x}$ 使得闭环极点为−4和−5，改善了系统的衰减速度。



开环系统的单位阶跃响应



闭环系统的单位阶跃响应

解决方法：引进误差的积分

$$q(t)=\int_0^t e(\tau)d\tau=\int_0^t [y(\tau)-y_r]d\tau$$

增广系统模型

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}y_r=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 0\\ \hline 3 & 2 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ q\end{bmatrix}+\left[\begin{array}{c}0\\ 1\\ \hline 0\end{array}\right]u+\left[\begin{array}{c}0\\ 0\\ \hline -1\end{array}\right]y_r$$

$$y=[\boldsymbol{C}\quad 0]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ q\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}3 & 2 & 0\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ q\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|c}0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1\\ \hline 3 & 2 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\right)=3=n+r\Rightarrow \text{增广系统能控}$$

设计要求：保持原闭环极点－4，－5；

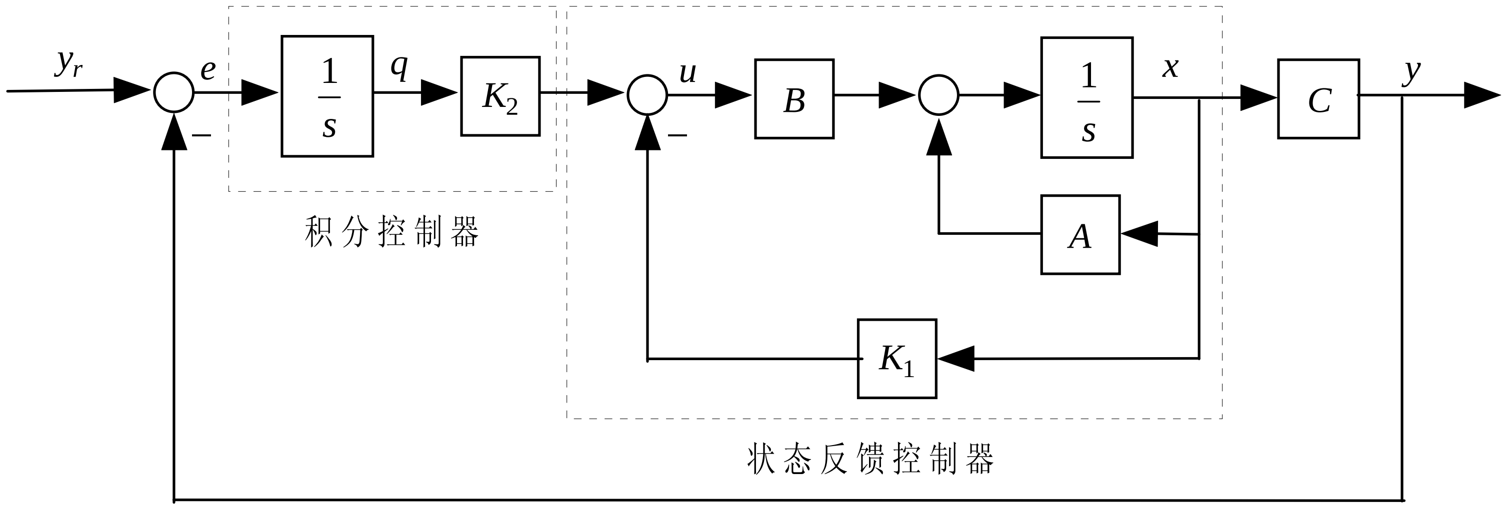
增加的增广闭环系统极点－8。

利用Matlab可得： K=[-17.6667 13.0000 53.3333]

跟踪控制律

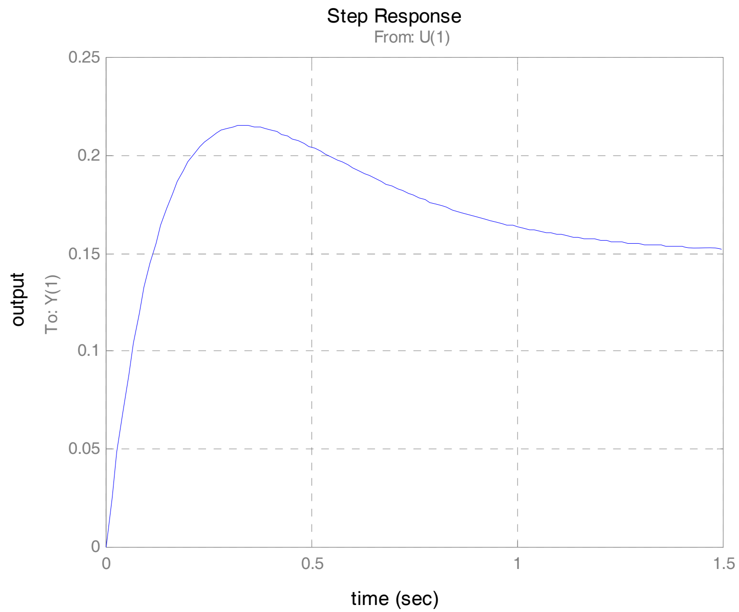
$$u = [17.6667 \quad -13]x - 53.3333\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$$

比例积分控制器。

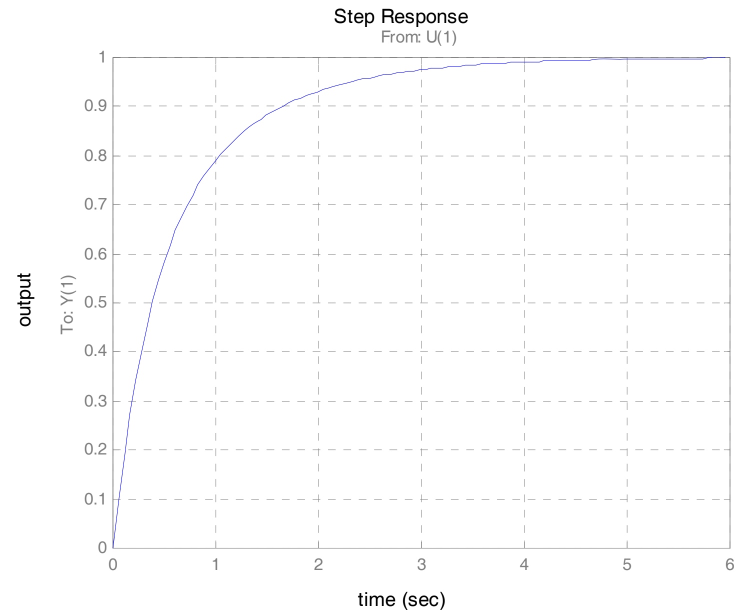


闭环系统的结构图

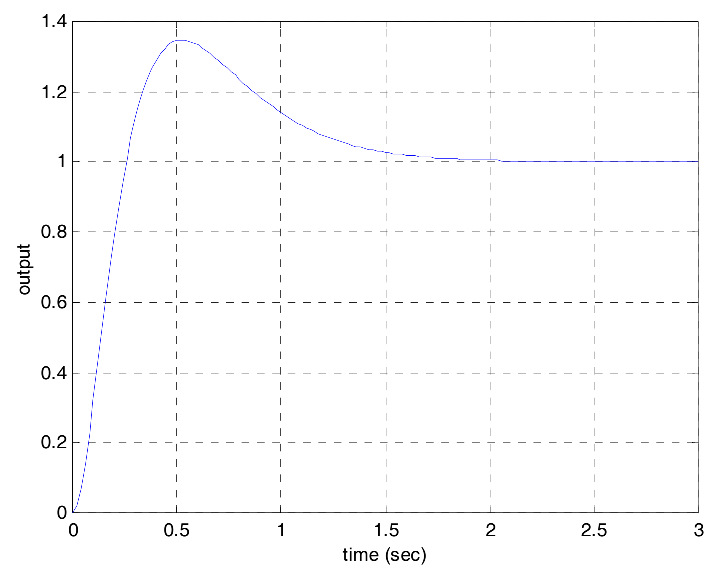
单位阶跃响应：



极点配置的闭环系统



开环系统的单位阶跃响应



跟踪控制器的闭环系统

- ✓ 改善动态性能
- ✓ 消除静态误差

状态反馈控制器：$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$

在系统实现中需要用到状态的全部信息！

- ✓ 系统的状态未必是物理量，故未必能测；
- ✓ 即使是物理量，有时也难以直接测量

问题

如果状态的信息没有，状态反馈控制器就不能实现！

极点配置方法不能用！

怎么办？

- ✓ 重新寻找新的方法
- ✓ 进一步完善

进一步完善

关键的问题是缺乏系统的状态信息！

- ✓ 系统的输出可直接测量
- ✓ 如果系统能观测，则系统的输出可以反映状态信息

$$\boldsymbol{x}_0 = \int_0^T \boldsymbol{W}_o^{-1}(0,\ T)e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}t}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}(t)\mathrm{d}t$$

由初始状态和输入信号可以计算未来任何时刻的状态

前提：模型足够精确

- ✓ 在系统能观的条件下，可以用系统的输出来估计状态，进而用这个状态的估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 来代替 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 中的真实状态 $\boldsymbol{x}$，即控制律为 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}$

命题归纳

- ✓ 给出状态 $x(t)$ 的估计 $\tilde{x}(t)$，使得

$$\lim_{t\to\infty}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{0}$$

- ✓ 用极点配置方法设计状态反馈增益矩阵K，进而用 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{x}}$ 来实现控制策略，希望得到和 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 有同样的效果。

以上分析表明了“进一步完善”这一思路的可行性

研究课题：基于观测器的输出反馈控制器设计

- ✓ 第一部分工作：观测器设计；
- ✓ 第二部分工作：基于观测器的输出反馈控制器设计

第6章　状态观测器设计

已知系统模型　$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$

问题：如何从系统的输入输出数据得到系统的状态？

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

初始状态：由能观性，从输入输出数据确定。

不足：初始状态不精确，模型不确定。

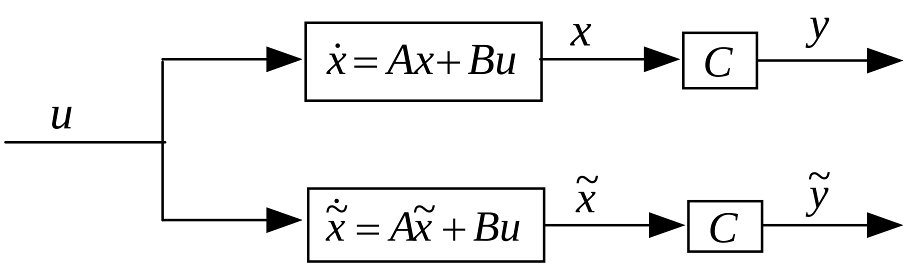
思路：构造一个系统，输出 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 逼近系统状态 $\boldsymbol{x}(t)$

$$\lim_{t\to\infty}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t)] = \boldsymbol{0}$$

$\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ 称为是 $\boldsymbol{x}(t)$ 的重构状态或状态估计值。

实现系统状态重构的系统称为状态观测器。

已知初始状态，状态估计的开环处理：



问题：不能处理模型不确定性和扰动

而估计的初始状态也是不精确的

应用反馈校正思想来实现状态估计。

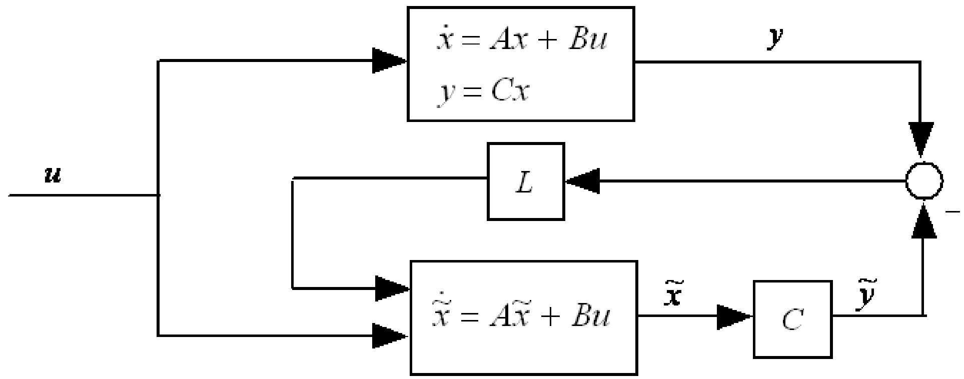
通过误差来反馈校正系统——控制的核心

状态误差：$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$

要用到真实状态，真实状态不知道，误差得不到

输出误差：$\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$

通过误差来反馈校正状态估计的结构图



其中的L是误差加权矩阵。

状态观测器模型

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}})$$
$$= (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{y}$$

L称为是观测器增益矩阵。

龙伯格（Luenberger）观测器

状态观测器模型

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x})$$
$$= (A - LC)\tilde{x} + Bu + Ly$$

真实状态和估计状态的误差向量 $e = x - \tilde{x}$

误差的动态行为：

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{\tilde{x}}$$
$$= Ax + Bu - (A - LC)\tilde{x} - Bu - Ly$$
$$= Ax - (A - LC)\tilde{x} - LCx$$
$$= (A - LC)e$$

$A - LC$ 的极点决定了误差是否衰减、如何衰减？通过确定矩阵L来保证。类似于极点配置问题

- ✓ 要使得误差衰减到零，需要选取一个适当的矩阵L，使得$A-LC$是稳定的。
- ✓ 若能使得矩阵$A-LC$具有适当的特征值，则可以使得误差具有一定的衰减率。

由于

$$\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})]=\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}]$$
$$=\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})]$$

因此，问题转化为（$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$）的极点配置问题。

该极点配置问题可解的条件：$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$ 能控

等价于 $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 能观

定理6.1.1 系统可以任意配置观测器极点的充分必要条件是（C, A）能观。

观测器的增益矩阵可以按照极点配置的方法来设计。

✓ 求解$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$的极点配置问题，得到增益矩阵 $\boldsymbol{K}$；

✓ 观测器增益矩阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$

观测器设计的三种方法：

直接法、变换法、爱克曼公式

例 考虑由以下系数矩阵给定的系统

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

要求设计一个观测器，使得观测器两个极点都是−2。

检验系统的能观性：

$$\Gamma_o[\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

系统是能观的，因此问题可解。

要求确定观测器增益矩阵 $L=\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}$，使得矩阵$A-LC$具有两个相同的特征值－2。由于

$$\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})]=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}l_1\\ l_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}\lambda+l_1 & -1\\ 1+l_2 & \lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$=\lambda^2+l_1\lambda+1+l_2$$

期望的特征值多项式是

$$(\lambda+2)(\lambda+2)=\lambda^2+4\lambda+4$$

比较两个多项式，可以得到

$$l_1=4,\ l_2=3 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

所求的观测器是

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{B}u+\boldsymbol{L}y$$

$$=\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}[1 \quad 0]\right)\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}y$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 1\\-4 & 0\end{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}y$$

应用MATLAB命令来计算观测器增益矩阵：

```
L=(acker(A’,C’,V))’
L=(place(A’,C’,V))’
```

观测器设计时注意的问题

- ✓ 观测器极点比系统极点快2～5倍；
- ✓ 并非越快越好。

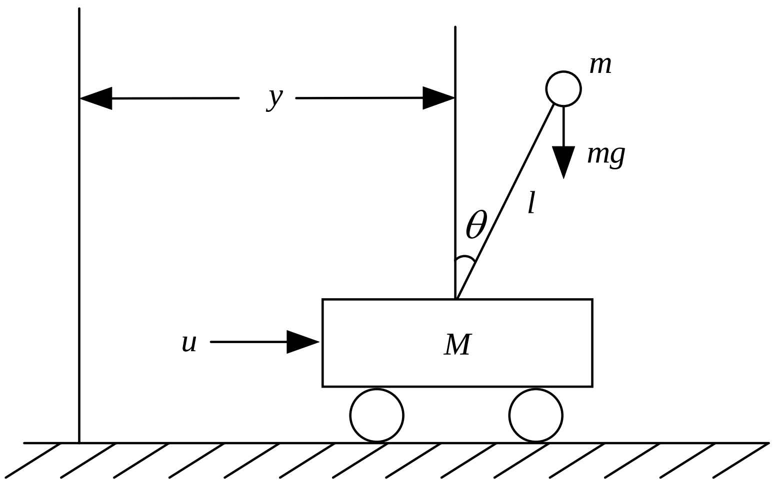
兼顾观测器误差的衰减和系统抗扰动能力。

软测量技术！

例 考虑倒立摆系统，假定只有小车的位移可以测量，

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u$$

$$y = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$



状态 $\boldsymbol{x} = [y \quad \dot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^{\mathrm{T}}$

系统是能观的，可以通过小车的位移估计小车的速度、摆杆的偏移角和角速度。

观测器模型：$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{L}\boldsymbol{C})\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}y$

观测器极点：$\mu_1 = -2 + \mathrm{j}2\sqrt{3},\ \mu_2 = -2 - \mathrm{j}2\sqrt{3},\ u_3 = -10,\ u_4 = -10$

应用Matlab得到观测器增益矩阵：

L =[24; 207; -984; -3877]

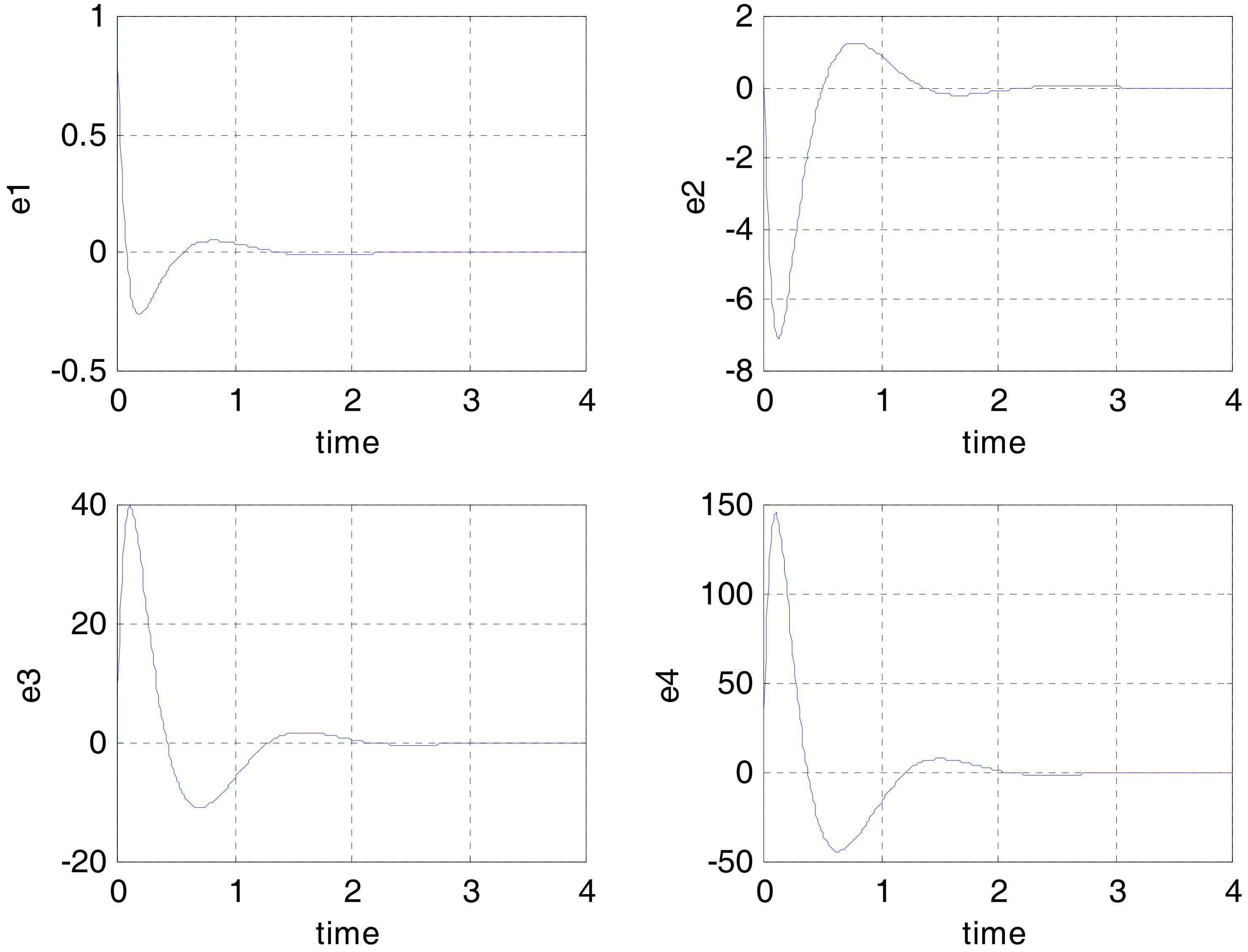
观测器是 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}u + \boldsymbol{L}y$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 \\ 207 \\ -984 \\ -3877 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \right) \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 24 \\ 207 \\ -984 \\ -3877 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & 1 & 0 & 0 \\ -207 & 0 & -1 & 0 \\ 984 & 0 & 0 & 1 \\ 3877 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 24 \\ 207 \\ -984 \\ -3877 \end{bmatrix} y$$

状态估计的误差动态方程： $\dot{\boldsymbol{e}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} -24 & 1 & 0 & 0 \\ -207 & 0 & -1 & 0 \\ 984 & 0 & 0 & 1 \\ 3877 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{e}$

初始误差：$\boldsymbol{e}(0)=[1 \quad 2 \quad 0.1 \quad -0.1]^{\mathrm{T}}$



总结

研究课题：基于观测器的输出反馈控制器设计

- ✓ 立论依据
- ✓ 研究目标
- ✓ 研究内容
- ✓ 技术路线
- ✓ 实验验证