现代控制理论

Modern Control Theory

(14)

俞　立

浙江工业大学 信息工程学院

爱克曼（Ackermann）公式

极点配置状态状态反馈增益矩阵***K***的解析表达式

闭环系统特征多项式：

$$
\begin{aligned}
\det[\lambda \boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})] &= \det(\lambda \boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}) \\
&= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) \\
&= \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0 = \phi(\lambda)
\end{aligned}
$$

$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$， 闭环矩阵满足

$$
\phi(\tilde{\boldsymbol{A}}) = \tilde{\boldsymbol{A}}^n + b_{n-1}\tilde{\boldsymbol{A}}^{n-1}+\cdots+b_1\tilde{\boldsymbol{A}}+b_0\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}
$$

问题：如何从以上的关系式来确定增益矩阵*K*?

从关系式
$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$$
$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}$$
$$\tilde{\boldsymbol{A}}^2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^2=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{ABK}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}$$
$$\tilde{\boldsymbol{A}}^3=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})^3=\boldsymbol{A}^3-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{ABK}\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}^2$$

分别乘以 b_0, b_1, b_2, b_3 $(b_3=1)$ ， 再相加可得

$$\begin{aligned}b_0\boldsymbol{I}+b_1\tilde{\boldsymbol{A}}+b_2\tilde{\boldsymbol{A}}^2+\tilde{\boldsymbol{A}}^3&=b_0\boldsymbol{I}+b_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})+b_2(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{ABK}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}})+\boldsymbol{A}^3\\&\quad-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{ABK}\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}^2\\&=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3-b_1\boldsymbol{BK}-b_2\boldsymbol{ABK}-b_2\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}\\&\quad-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}-\boldsymbol{ABK}\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}^2\end{aligned}$$

$$0=\phi(\tilde{\boldsymbol{A}})=\phi(\boldsymbol{A})-b_1\boldsymbol{BK}-b_2\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{BK}\tilde{\boldsymbol{A}}^2-b_2\boldsymbol{ABK}-\boldsymbol{ABK}\tilde{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}$$

$$\phi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}(b_1\boldsymbol{K}+b_2\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}^2)+\boldsymbol{AB}(b_2\boldsymbol{K}+\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}})+\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}$$

$$\phi(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{B}(b_1\boldsymbol{K} + b_2\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}^2) + \boldsymbol{AB}(b_2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}) + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{BK}$$

$$= [\ \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ ]\begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{K} + b_2\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}^2 \\ b_2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$$

由能控性，可得

$$[\ \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ ]^{-1}\phi(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{K} + b_2\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}^2 \\ b_2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 0 \quad 1][\ \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ ]^{-1}\phi(\boldsymbol{A}) = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix} b_1\boldsymbol{K} + b_2\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}}^2 \\ b_2\boldsymbol{K} + \boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{K} \end{bmatrix} = \boldsymbol{K}$$

爱克曼公式：$\boldsymbol{K} = [0 \quad 0 \quad 1][\ \boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ ]^{-1}\phi(\boldsymbol{A})$

例 对传递函数描述的二阶系统 $G(s)=1/s^2$，确定一个状态反馈控制律，使得闭环极点位于 $-1\pm \mathrm{j}$

解 期望闭环多项式：$\phi(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+2$

对象的状态空间实现：
$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

能控性矩阵：$\Gamma_c[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

爱克曼公式：
$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\phi(\boldsymbol{A})$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}$$

关于极点配置问题：

1。n个极点，以共轭对的形式出现；

2。主导极点；

3。考虑到零点的影响；

4。系统响应速度并非越快越好；

5。单输入系统，极点配置不影响零点分布；

6。单输入能控系统，控制器惟一，多输入系统则不惟一

7。区域极点配置。

不足：需要用到全部状态。

5.3.5 应用MATLAB求解极点配置问题

提供了两个函数：

acker:基于爱克曼公式，单输入系统，多重极点

place:多输入系统，相同极点个数不超过*B*的秩

对单输入系统，所得的*K*是一致的

```
K=acker(A,B,J)
K=place(A,B,J)
```

$$\boldsymbol{J}=[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]$$

检验：eig(A-B*K)

极点配置的优点：可以改善系统的稳定性、动态性能

5.3 跟踪控制器设计

极点配置的优点：可以改善系统的稳定性、动态性能

例 已知被控对象的状态空间模型为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} x$$

设计状态反馈控制律，使得闭环极点为−4和−5，并讨论闭环系统的稳态性能。

期望的闭环特征多项式是

$$\Delta^*(\lambda) = \lambda^2 + 9\lambda + 20$$

所要设计的状态反馈增益矩阵是

$$K = [20-3 \quad 9-4] = [17 \quad 5]$$

相应的闭环系统状态矩阵

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}$$

闭环传递函数

$$G(s) = C[sI-(A-BK)]^{-1} = \frac{2s+3}{s^2+9s+20}$$

检验系统的稳态特性：

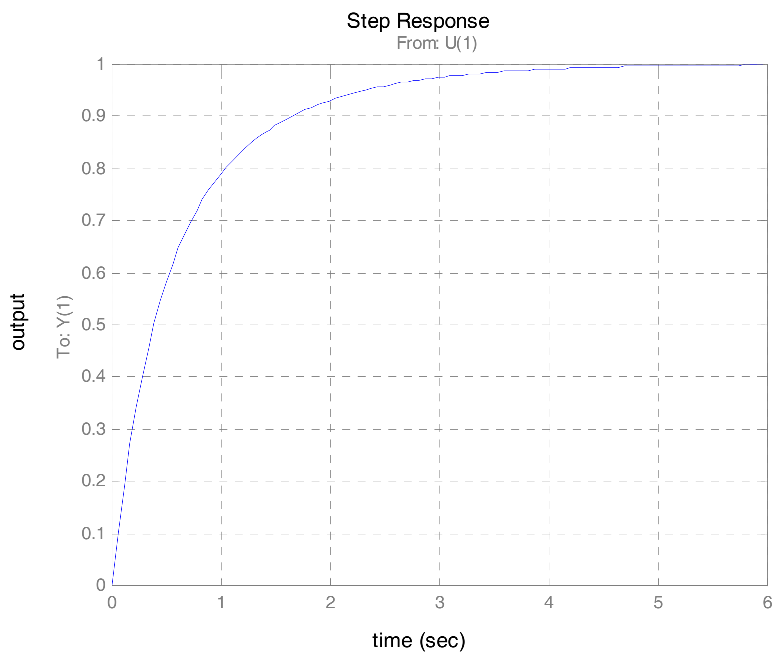
当参考输入为单位阶跃时，输出的稳态值（终值定理）

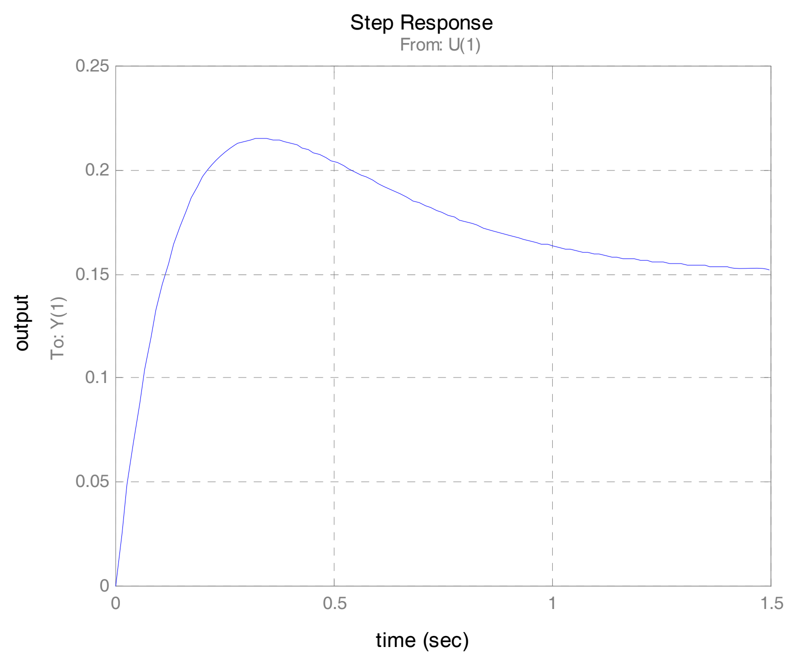
$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = \frac{3}{20}$$

开环系统是稳定的，且开环传递函数 $G_o(s)=\dfrac{2s+3}{s^2+4s+3}$

开环系统的稳态输出 $y_o(\infty)=\dfrac{3}{3}=1$，无静差。

闭环系统的稳态输出 $y_c(\infty)=\dfrac{3}{20}$，有稳态误差。





开环系统的单位阶跃响应

闭环系统的单位阶跃响应

结论：极点配置改善了系统的动态性能；
有可能降低系统的稳态性能。

问题：如何在既可以改善系统动态性能，又不降低稳态性能呢？

考虑系统
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

参考输入：$\boldsymbol{y}_r(t) = \boldsymbol{y}_{r0} \cdot 1(t)$

外部扰动：$\boldsymbol{d}(t) = \boldsymbol{d}_0 \cdot 1(t)$

要求：设计控制器，使得

✓ 系统是稳定的，且具有一定过渡过程特性；

✓ 在存在扰动下，系统输出跟踪参考输入。

定义误差向量：$e(t)=y(t)-y_r(t)$

引入了积分器

引入偏差的积分：

$$q(t)=\int_0^t e(\tau)d\tau$$

$$\dot{q}(t)=e(t)=Cx(t)-y_r(t)$$

对多输入系统：

$$\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}(t)=[q_1(t)\quad q_2(t)\quad \cdots \quad q_r(t)]=\left[\int_0^t e_1(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \int_0^t e_2(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \cdots \quad \int_0^t e_r(\tau)\mathrm{d}\tau\right]$$

引入增广系统

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{y}_r\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}\end{cases}$$

对增广系统 $\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & 0\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{y}_r\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}\end{cases}$

设计状态反馈控制律 $u=-\begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ q\end{bmatrix}=-K_1x-K_2q$

使得闭环系统 $\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\ -\boldsymbol{y}_r\end{bmatrix}$

是稳定的。

分析稳态性能：求拉氏变换，得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{q}(s)\end{bmatrix}=\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}(s)\\ -\boldsymbol{y}_r(s)\end{bmatrix}$$

参考输入和外部扰动都是阶跃信号时，由终值定理

$$\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{q}(t)\end{bmatrix}=\lim_{s\to 0}s\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}(s)\\ \boldsymbol{q}(s)\end{bmatrix}$$

$$=\lim_{s\to 0}s\left(s\boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_0/s\\ -\boldsymbol{y}_{r0}/s\end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1 & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_2\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_0\\ -\boldsymbol{y}_{r0}\end{bmatrix}$$

即x和q趋向于常值。从而 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 趋于零。

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}_r(t)\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to\infty}[y(t)-y_r(t)]=0$$

结论：针对增广系统，设计状态反馈控制律，只要闭环系统渐近稳定，则系统无静态误差。

若还需要系统有一定的过渡过程特性，极点配置！

条件：能任意配置极点的条件是增广系统能控。

定理 增广系统能控的充分必要条件是

（1）原来系统是能控的

（2） $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + r$， $m \geq r$，$\operatorname{rank} C = r$

证明：

$$\Gamma_{zc} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+r-1}B \\ 0 & CB & CAB & \cdots & CA^{n+r-2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AS_1 \\ 0 & CS_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & S_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

其中$S_1 = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \quad \cdots \quad A^{n+r-2}B]$ 是$n \times (n+r-1)m$

原系统的能控性 $\Rightarrow$

$[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{AB} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]$ 的行向量线性无关。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{S}_1 \\ \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{行满秩} \Rightarrow \quad \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = n + r$$

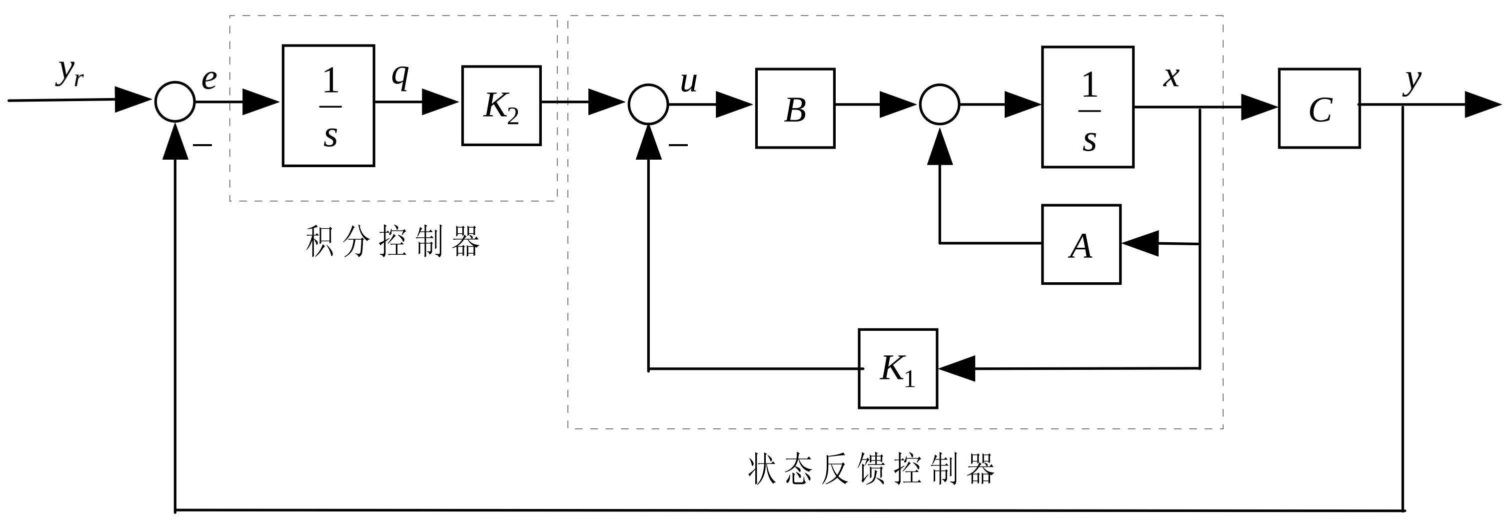
必要条件：$m \geq r$，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$

$m \geq r$： 输入的个数不能小于输出的个数

$\operatorname{rank}(\boldsymbol{C}) = r$： 所有的测量输出都是独立的。

跟踪外部参考输入的控制律是 $u = -K_1 x - K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau$

积分比例控制器



针对前面的例子，再来设计一个状态反馈控制器：

使得：闭环系统具有理想的过渡过程特性；

无静差地跟踪阶跃参考输入 。

系统模型

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} y_r = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hdashline -1 \end{array}\right] y_r$$

$$y = [\boldsymbol{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix} = [3 \quad 2 \;\vdots\; 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \right) = 3 = n + r \Rightarrow \text{增广系统能控}$$

设计要求：保持原闭环极点－4，－5；

增加的增广闭环系统极点－8。

利用MATLAB可得 K=[-17.6667 13.0000 53.3333]

跟踪控制律 $u = [17.6667 \quad -13]\boldsymbol{x} - 53.3333\int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau$

单位阶跃响应：

改善动态性能；

消除静态误差。