第九章 常微分方程数值解

9.0 基本概念

9.1 初值问题的**Euler**方法

9.2 初值问题的梯形方法与改进**Euler**方法

9.0 基本概念

❖ 研究微分方程数值解的意义

《常微分方程》课程已经开过，在哪里学习了如何求解几类特殊常微分方程定界问题的解析解。

在工程和科学计算中，所建立的各种常微分方程的初值或边值问题，除很少几类的特殊方程能给出解析解，绝大多数的方程是很难甚至不可能给出解析解的，其主要原因在于积分工具的局限性。因此，人们转向用数值方法去解常微分方程，并获得相当大的成功，讨论和研究常微分方程的数值解法是有重要意义的。

9.0 基本概念

1 一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & x_0 < x \le X \qquad (1) \\ y(x_0) = y_0 & \qquad (2) \end{cases}$$

注：若f 在$D = \{x_0 \le x \le X, |y| < +\infty\}$内连续，且满足Lip条件：

$\exists L \ge 0$，使

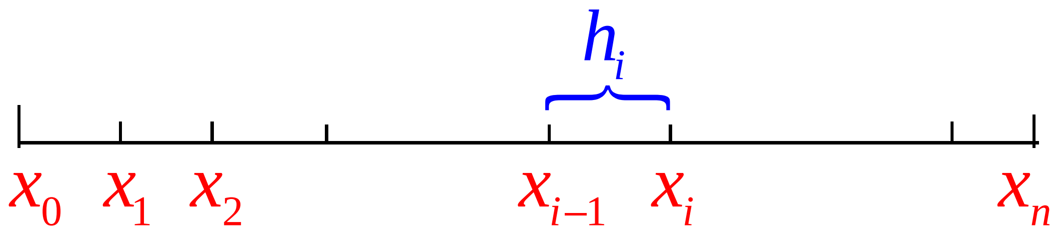
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

则(1) (2)的连续可微解$y(x)$在$[x_0, X]$上唯一存在。

9.0 基本概念

2. 初值问题的数值解

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad x_0 < x \le X & (1) \\
y(x_0) = y_0 & (2)
\end{cases}
$$



称(1) (2)的解$y(x)$在节点x_i处的近似值

$$y_i \approx y(x_i) \quad x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = X.$$

为其数值解，方法称为数值方法。

注：

① 考虑等距节点：$x_i = x_0 + ih$，$h = (X - x_0)/n$.

② 从初始条件$y(x_0) = y_0$出发，依次逐个计算

y_1，y_2，…，y_n的值，称为步进法。

两种：单步法、多步法。

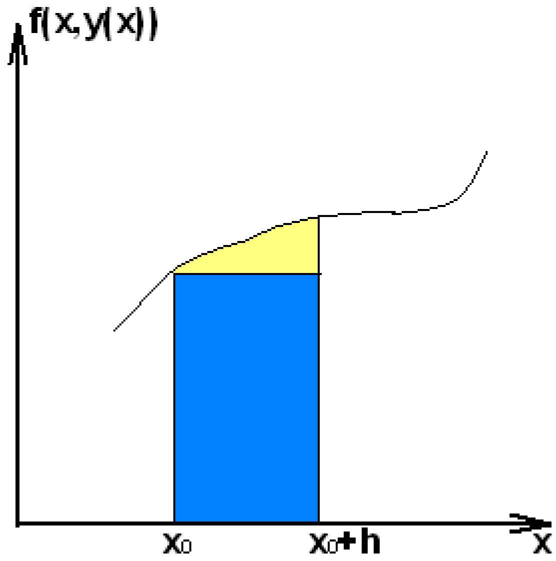
9.1 初值问题的Euler方法

1. Euler方法的推导(积分法)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad x_0 < x \le X & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

由 $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

得 $y(x_0+h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx$



求$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x,y)dx$的近似值?

用$f(x_0,y_0)$代替$[x_0,x_0+h]$上的$f(x,y)$,有

$$y(x_0+h) \approx y(x_0) + hf(x_0,y_0)$$

用$y_0=y(x_0)$, $y_1 \approx y(x_0+h)$, $x_1=x_0+h$, 则

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$$

❖ 2. Euler方法的推导

将其应用于区间$[x_{\mathrm{i}}, x_{\mathrm{i}}+h]$上，有

$$y(x_{\mathrm{i}}+h) \approx y(x_i) + hf(x_i, y_i)$$

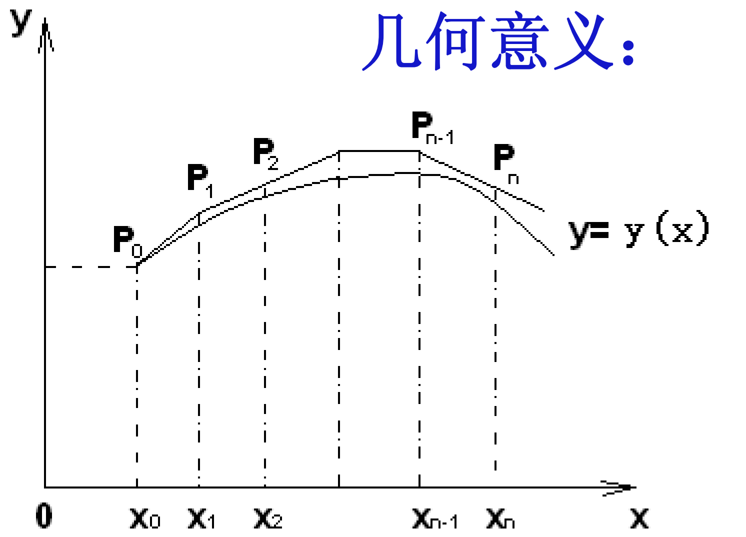
用$y_i = y(x_i)$，$y_{i+1} \approx y(x_i + h)$，$x_{i+1} = x_i + h$，

得显式Euler方法公式或Euler方法公式

$$\boxed{\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases} \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1}$$

它可以从y_0出发，逐次算出$y_1, y_2, y_3 \cdots$。

几何意义：



2. Euler方法的推导

用$f(x_{i+1}, y_{i+1})$代替$[x_i, x_{i+1}]$上的$f(x, y)$,有

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

用$y_i = y(x_i)$，$y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$,

得隐式Euler公式或向后Euler公式

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) & （2） \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

它与显式的不同在于，它每算一步要解

函数方程（2）才能得到y_{n+1}。

注：无特殊说明，Euler公式指的是显式形式

❖ 2. Euler方法的推导(Tayler 展开法)

Euler方法的公式可由Tayler级数去掉高阶导数项得到

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2} y''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \cdots$$

去掉高于一阶导数的项，由 $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

有 $$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$

得 $$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad i = 0,1,2,\cdots,n-1 \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

显式Euler公式

3. Euler方法的简单应用

例1 以h=0.1为步长，用Euler公式求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xe^{-x} - y & 0 < x \leq 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解，并与精确解比较。

解：精确解 $y(x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + 2)e^{-x}$

$$f(x, y) = xe^{-x} - y, h = 0.1, y_0 = 1, i = 0, 1, \cdots, 9$$

由Euler公式，则有

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i e^{-x_i} - y_i)$$

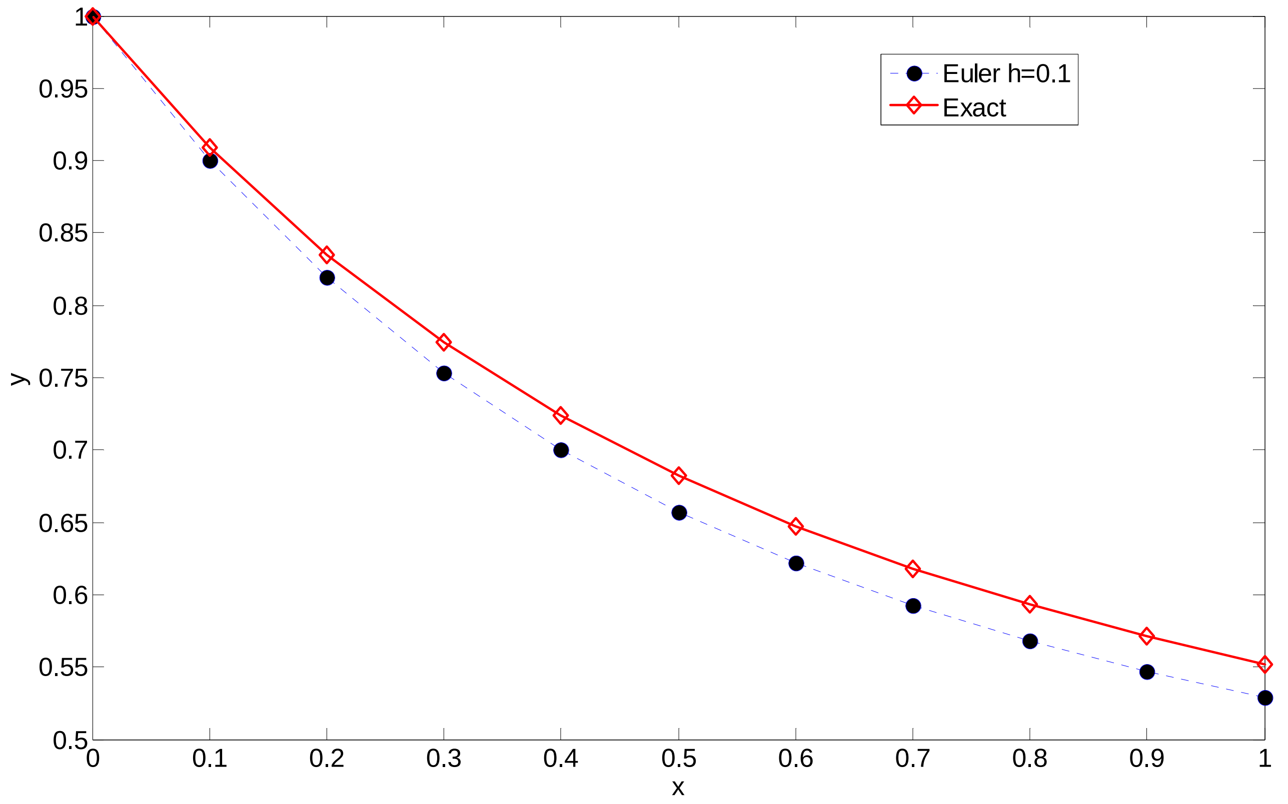
9.1 初值问题的Euler方法

❖ 程序实现

```
%dy/dx=x*exp(-x)-y
%y(0)=1
%Exact  solution y(x)=1/2*(x^2+2)*exp(-x)
a=0;  b=1;
h=0.1;
x=[0:h:1];
n=(b-a)/h;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=1;
for i=2:n+1
      y(i)=y(i-1)+h*(x(i-1)*exp(-x(i-1))-y(i-1)) ;
end
 plot(x,y,‘o')
hold on
z=0.5.*(x.^2+2).*exp(-x)
plot(x,z,'r')
```

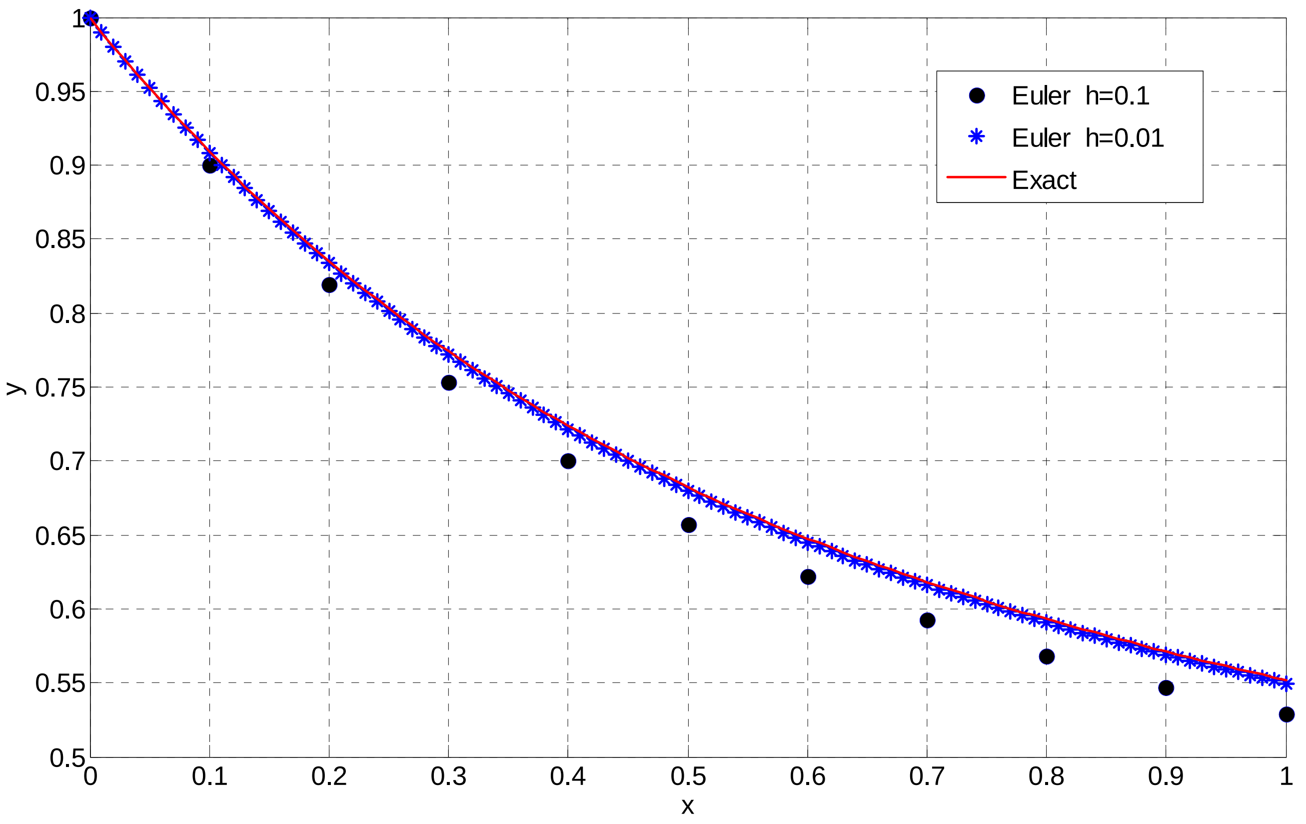
9.1 初值问题的Euler方法

❖ 计算结果



9.1 初值问题的Euler方法

❖ 计算结果



4. 截断误差与代数精度

- 定义1

  ① 称 $e_i = y(x_i) - y_i$ 为数值解y_i的（整体）截断误差。

  ② 若$y_k = y(x_k)$，$k = 0$，1，2，…，i.

  由求解公式得数值解$\tilde{y}_{i+1} \approx y(x_{i+1})$，则称$\varepsilon_{i+1}(x) = y(x_{i+1}) - \tilde{y}_{i+1}$ 为局部截断误差。

局部截断误差	整体截断误差
单步计算产生的误差	考虑到每步误差对下一步的影响

4. 截断误差与代数精度

- 定义2 若求解公式的局部截断误差为$\varepsilon_i=O(h^{p+1})$，则称该方法是p阶方法，或是p阶精度。<p阶公式>

问题： Euler方法是几阶方法？ 一阶方法

证 设$y(x)$在$[x_0,x_n]$上充分光滑，$M=\max\limits_{x_0\le x\le x_n}|y''(x)|$，

由Tayler展开可知

$$y(x_{i+1})=y(x_i)+y'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{1}{2}y''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2+\cdots$$

$$=y(x_i)+hy'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(\xi)\qquad x_i<\xi<x_{i+1}$$

将精确解带入Euler方法公式，有$y_{i+1}=y(x_i)+hf(x_i,y(x_i))$

$$|\varepsilon_{i+1}|=|y(x_{i+1})-y(x_i)-hf(x_i,y(x_i))|$$

$$=|y(x_{i+1})-y(x_i)-hy'(x_i)|$$

$$=\frac{h^2}{2}|y''(\xi)|\le\frac{Mh^2}{2}=O(h^2)$$

9.2 初值问题的梯形方法与改进的Euler方法

- **1　一阶常微分方程初值问题**

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) & x_0 < x \le X \quad (1) \\ y(x_0) = y_0 & \quad (2) \end{cases}$$

- **2. 梯形方法的推导**

由 $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

得 $y(x_i + h) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_i + h} f(x, y)dx$

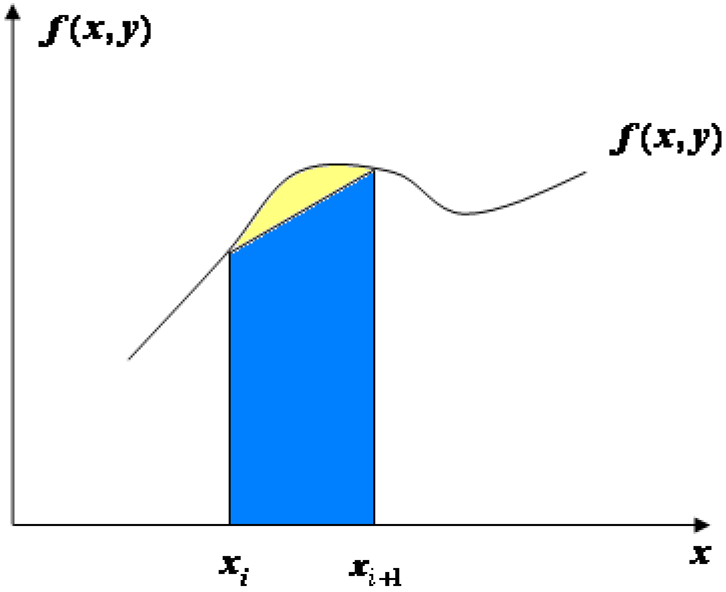
求 $\int_{x_i}^{x_i + h} f(x, y)dx$ 的近似值?

9.2 初值问题的梯形方法与改进的Euler方法

❖ 2. 梯形方法的推导

$$y(x_{i+1})-y(x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx$$

$$\approx \frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))]$$



因此有

$$y(x_{i+1})\approx y(x_i)+\frac{x_{i+1}-x_i}{2}[f(x_i,y(x_i))+f(x_{i+1},y(x_{i+1}))]$$

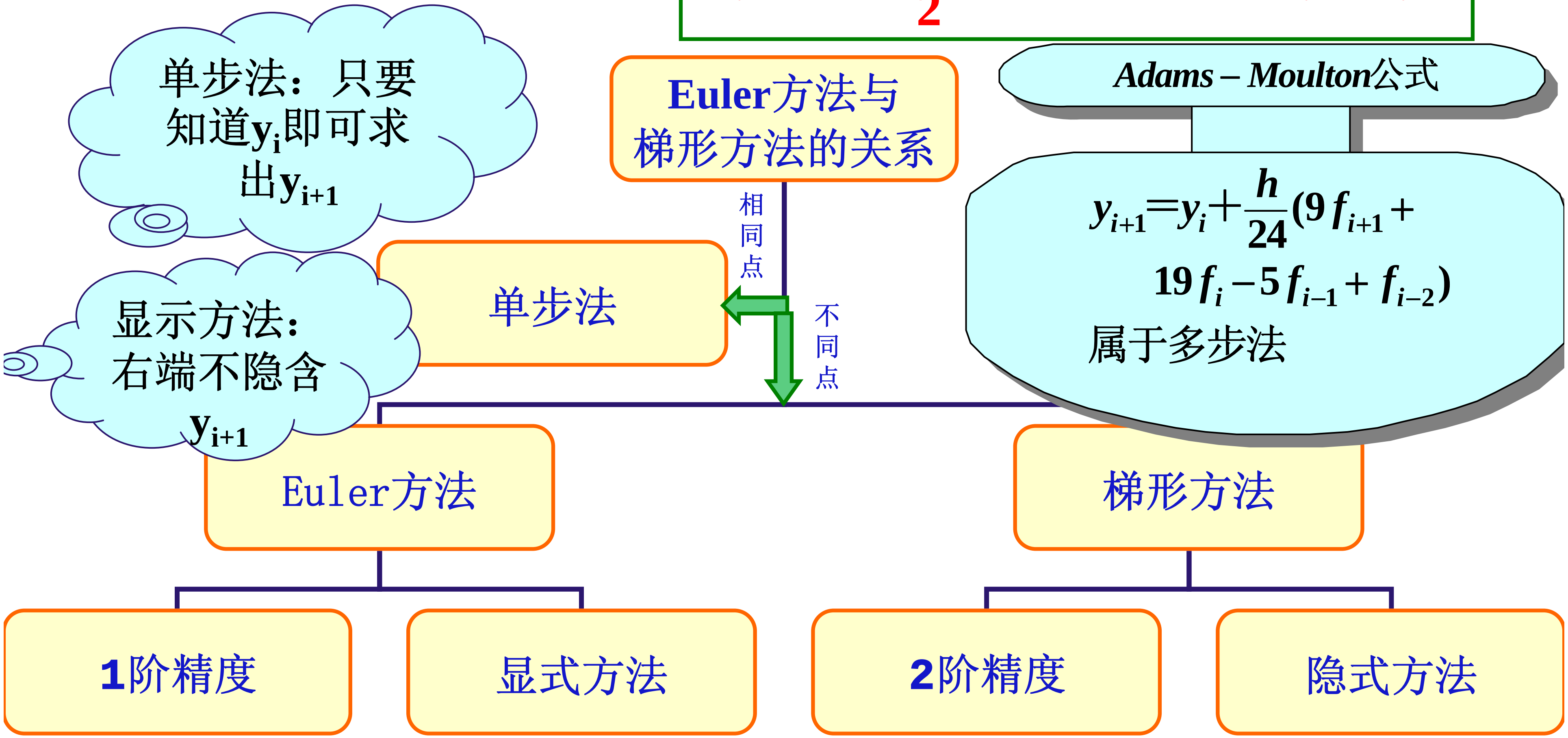
❖ 梯形公式

$$\boxed{y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}[f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})]}$$

❖ 3. Euler方法（显式的）和梯形方法的比较

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})]$$



4. 改进的Euler方法

$$\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) & \text{预估} \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] & \text{校正} \end{cases}$$

一种预估校正方法

❖ 5. 简单应用

例1 以h=0.1为步长，用Euler法与改进Euler方法求初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xe^{-x} - y \qquad 0 < x \le 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

的数值解，并与精确解 $y(x) = \dfrac{1}{2}(x^2+2)e^{-x}$ 比较。

解：$f(x,y) = xe^{-x} - y$, y_0=1, h=0.1, $i = 0,1,2,\cdots,9$

Euler方法, 改进的Euler方法分别为

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \qquad \begin{cases} \bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})] \end{cases}$$

9.2 初值问题的梯形方法与改进的Euler方法

❖ 程序实现

首先建立一个函数文件**f.m**，程序如下：

```
function f=f(a,b)
f=a*exp(-a)-b;
```

然后，在一个新的**m**文件中编程，实现结果，代码如下:

9.2 初值问题的梯形方法与改进的Euler方法

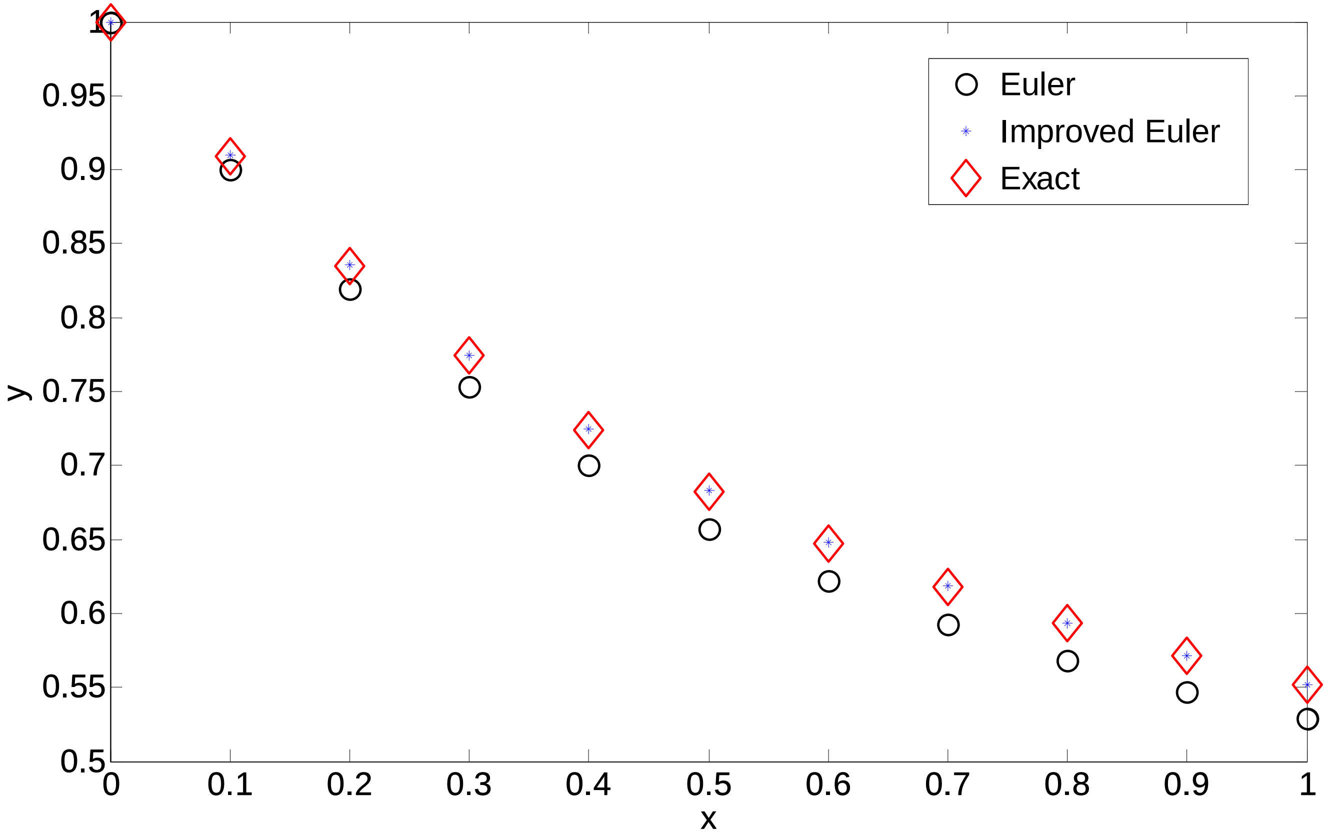
❖ 程序实现

```
a=0;
h=0.1;b=1;
x=[0:h:1];n=(b-a)/h;
y=zeros(1,n+1);
y(1)=1;
%Euler公式
for i=2:n+1
      y(i)=y(i-1)+h*f(x(i-1),y(i-1)) ;
end
 plot(x,y,‘o')
hold on
```

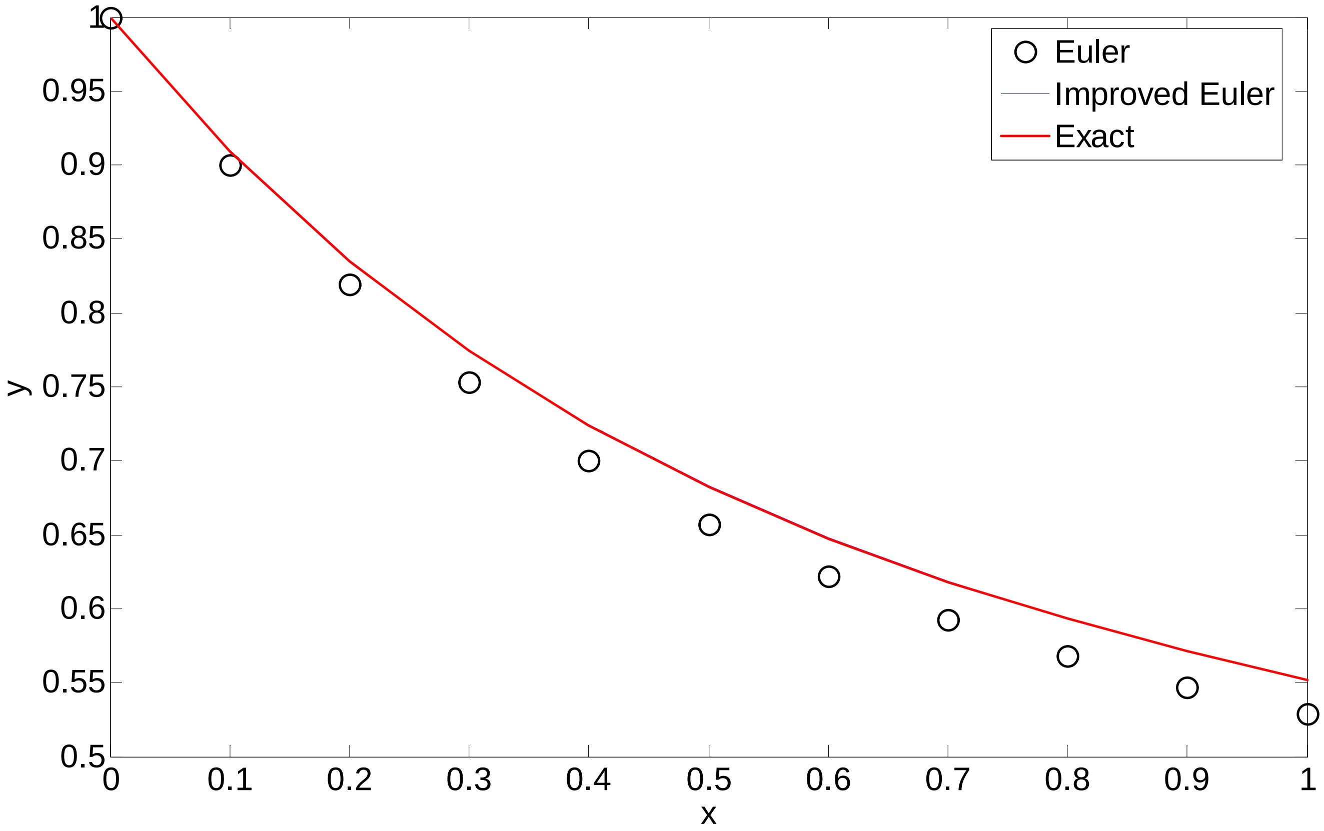
```
%改进Euler公式
y=zeros(1,n+1);
y(1)=1
for i=2:n+1
  t=y(i-1)+h*f(x(i-1),y(i-1)) ;
  y(i)=y(i-1)+h/2*(f(x(i-1),y(i-1))+f(x(i),t) ) ;
end
plot(x,y,'b')
hold on
z=0.5.*(x.^2+2).*exp(-x)
plot(x,z,'r')
```

9.2 初值问题的梯形方法与改进的Euler方法

❖计算结果



❖ 计算结果



1
0.95
0.9
0.85
0.8
0.75
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
y
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x
Euler
Improved Euler
Exact

小结

- 利用**Euler**方法、改进**Euler**方法求解一阶常微分方程的初值问题

- 概念：
  - 截断误差，格式的精度
  - 单步法、多步法
  - 显式方法、隐式方法