线弹性体本构方程对称性的逆命题研究 1)

王怀磊 *,2)　苏振超 †

*(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京 210016)

†(厦门大学嘉庚学院土木工程系, 福建漳州 363105)

摘要　基于线弹性体本构方程系数矩阵的对称性，提出了其对应的逆命题问题，即若材料本构方程是线性且对称的，能否由此确定物体是完全弹性的？论文通过构造势函数的方法对该问题给出了肯定的回答，从而论证了对于符合线性本构关系的材料，其本构方程的对称性与物体的完全弹性相互蕴含，因而是相互等价的.

关键词　完全弹性体，线弹性，本构关系，对称性，逆命题

中图分类号：O343　　**文献标识码**：A　　doi：10.6052/1000-0879-13-206

THE INVERSE PROPOSITION ABOUT THE SYMMETRY OF LINEAR CONSTITUTIVE LAW 1)

WANG Huailei*,2)　SU Zhenchao†

*(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

†(Department of Civil Engineering, Tan Kah Kee College, Xiamen University, Fujian, Zhangzhou 363105, China)

Abstract　From the symmetry of the coefficient matrix of the constitutive law of linear elastic bodies, one may motivated to consider the corresponding inverse proposition, i.e. whether or not the symmetry of the linear constitutive law implies the perfect elasticity of the body. A positive answer of this question may be made via the construction of an elastic potential function for the body，which indicates that the symmetry of the constitutive equation and the perfect elasticity of body are equivalent.

Key words　perfectly elastic body, linear elasticity, constitutive law, symmetry, converse proposition

引　言

在最一般的意义上，弹性体的理想模型 (包括线弹性体和非线性弹性体) 只假设物体存在各处应力为零的自然状态, 初始构形就取在自然状态上, 材料行为只与相对于自然状态的现时变形状态有关 [1-2]. 其本构方程一般可通过两种途径来建立，一种是格林方法，即从势能函数出发来得到弹性体的本构方程，这种具有弹性势的弹性体也称为超弹性体或格林意义下的弹性体. 另一种是柯西方法，即从弹性体的特性即 “一定的应力状态对应于一定的应变状态” 出发，直接假设应力–应变函数关系，再通过实验确定其中的系数. 直接由这种应力 – 应变函数关系描述的物体叫柯西意义下的弹性体，或直接叫作弹性体.

经典弹性力学中的完全弹性假设要求材料的应力应变具有一一对应的关系，而且这个关系和时间无关，也和变形历史无关 (因此其材料的弹性常数不随应力或应变的变化而改变)，这实际上也是在柯西意义定义的弹性体 [3-4]. 显然，超弹性体一定是弹性体，但对于一般的弹性体只有当其应力应变关系中的系数满足一定的条件时才是超弹性体，才具有相应的弹性势. 在这个意义上说来，柯西弹性体是一个比超弹性体更为广泛的概念.

对于完全弹性的线弹性体而言，由广义胡克定

2013–05–20 收到第 1 稿，2013–09–13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11172126) 和江苏高校优势学科建设工程资助项目.

2) E-mail: whlay@nuaa.edu.cn

律表征的本构关系方程中有 36 个弹性系数，但由于线弹性体应变能密度即为其势函数，因此完全弹性和超弹性此时是等价的，由此可以证明 36 个弹性系数中只有 21 个是独立的，也即线弹性体的本构方程的系数矩阵是对称的 [5]. 但是其逆命题，即如果已知本构方程是线性且对称的，能否得出物体是完全弹性或超弹性的结论，在现有的文献中却鲜有提及. 本文对该问题进行探讨，以期得到对本构方程的对称性及物体的完全弹性之间关系更为深刻的认识.

1 线弹性体的本构方程与势函数

在小变形假设下，无初应力的弹性体的应力–应变关系可近似表示为如下线性函数形式

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + C_{13}\varepsilon_z + C_{14}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{15}\gamma_{yz} + C_{16}\gamma_{zx} \\
\sigma_y &= C_{21}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + C_{23}\varepsilon_z + C_{24}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{25}\gamma_{yz} + C_{26}\gamma_{zx} \\
\sigma_z &= C_{31}\varepsilon_x + C_{32}\varepsilon_y + C_{33}\varepsilon_z + C_{34}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{35}\gamma_{yz} + C_{36}\gamma_{zx} \\
\tau_{xy} &= C_{41}\varepsilon_x + C_{42}\varepsilon_y + C_{43}\varepsilon_z + C_{44}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{45}\gamma_{yz} + C_{46}\gamma_{zx} \\
\tau_{yz} &= C_{51}\varepsilon_x + C_{52}\varepsilon_y + C_{53}\varepsilon_z + C_{54}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{55}\gamma_{yz} + C_{56}\gamma_{zx} \\
\tau_{zx} &= C_{61}\varepsilon_x + C_{62}\varepsilon_y + C_{63}\varepsilon_z + C_{64}\gamma_{xy} + \\
&\quad C_{65}\gamma_{yz} + C_{66}\gamma_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

若采用张量表示法，上式可缩写成

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2}$$

其中 σ_{ij} 为二阶应力张量，ε_{ij} 是二阶应变张量，C_{ijkl} 为四阶弹性张量. 由弹性体应力张量的对称性 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$，可得出 $C_{ijkl} = C_{jikl}$，再由应变张量的对称性 $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$，可得出 $C_{ijkl} = C_{ijlk}$，于是 C_{ijkl} 中的 81 个分量独立的仅为 36 个，与式 (1) 中的 36 个分量一一对应.

当弹性体从无应变状态 “0” 到某一应变状态 “ε_{ij}” 的过程中，弹性体的应变能为

$$U = \iiint_V \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\mathrm{d}V \tag{3}$$

由于完全弹性体的应变能是弹性体状态的函数，它应只与弹性体的状态有关，而与达到该状态的具体过程无关，因此式 (3) 右端积分结果应与路径无关，从而被积函数必为某一函数的全微分. 设此函数为 $U_0(\varepsilon_{ij})$，则有

$$U_0(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{4}$$

且

$$\delta U_0(\varepsilon_{ij}) = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{5}$$

所以

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \tag{6}$$

其中 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 表示单位体积的弹性应变能，称为弹性应变能密度函数或弹性应变比能函数，又由于它是以应力分量作为系数的全微分的势函数，故又称为弹性势函数. 式 (6) 称为格林公式，它对任意完全弹性体皆成立. 根据格林公式，只要给定了弹性势函数，则弹性体的应力–应变关系也就确定了，因此弹性势函数是弹性材料本构关系的另一种表达形式.

进一步假设 $U_0(\varepsilon_{ij})$ 有二阶以上的连续偏导数，则由格林公式 (6) 可得

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}}, \quad \frac{\partial^2 U_0}{\partial\varepsilon_{kl}\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{7}$$

所以

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{8}$$

上式称为广义格林公式. 将式 (2) 代入广义格林公式 (8) 可得

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial\varepsilon_{ij}} = C_{klij} \tag{9}$$

这说明对于具有线性本构关系的完全弹性体而言，其本构方程中的 36 个变量实际上只有 21 个是独立的，即本构方程的系数矩阵是对称的.

2 本构方程的对称性是否决定物体的完全弹性?

本构方程的对称性是一般弹性力学教科书都会阐述的基本问题，即完全弹性体的物理特性决定了其应力 – 应变关系矩阵是对称矩阵，或者说如果线性本构关系矩阵是非对称的，则物体一定是非完全弹性体. 但是其逆命题是否成立，目前尚未得到有关学者的关注，在现有的书籍和文献中鲜有提及. 本文下面将对此进行论证.

定理 1 如果已知某物体材料的应力 – 应变关系是线性的，且本构方程中的系数矩阵是对称的，则该物体一定是完全弹性体.

证明 根据已知，物体的应力 – 应变关系如式 (1) 所示，其中 $C_{ij}=C_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,6)$. 如果要证明该物体为完全弹性体，关键是能否找到其势函数 $U_0(\boldsymbol{\varepsilon})$，使其满足 $\dfrac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_i}=\sigma_i$. 此处为直观起见，不再用张量符号表示，而改用向量符号表示，令

$$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \varepsilon_z\ \ \gamma_{xy}\ \ \gamma_{yz}\ \ \gamma_{zx}]^{\mathrm{T}}=[\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4\ \ \varepsilon_5\ \ \varepsilon_6]^{\mathrm{T}}$$

若取 $U_0(\varepsilon)$ 为如下二次型

$$U_0(\boldsymbol{\varepsilon})=\frac{1}{2}(\varepsilon_1\ \ \varepsilon_2\ \ \varepsilon_3\ \ \varepsilon_4\ \ \varepsilon_5\ \ \varepsilon_6)\cdot\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{pmatrix} \tag{10}$$

则显然有

$$\frac{\partial U_0(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_i}=\sum_{j=1}^{6}C_{ij}\varepsilon_j=\sigma_i \tag{11}$$

上式说明所构造的二次型式 (10) 满足格林公式 (6)，即它可以作为该物体的势函数. 由于势函数的存在，使得物体变形过程中变形能与变形过程无关，而只与最终状态有关，即物体的变形与载荷在整个加载过程中存在一一对应的单值函数关系，且外力释放后物体可完全恢复原状，因此说明该物体是完全弹性体.

3 结 论

本文在回顾梳理弹性势函数理论的基础上, 通过构造一种基于应力 – 应变关系系数矩阵的势函数，回答了能否由本构方程系数矩阵的对称性确定物体是完全弹性体的问题, 从而得出结论：对于线性本构关系而言，本构方程系数矩阵的对称性与物体的完全弹性相互蕴含，因而是相互等价的. 该结论不仅从一个侧面反映了对称性对于某些物理本质的内蕴影响，也是对称美在自然科学美学中的一个新示例 [6]. 同时由于在基础力学中对称性概念的重要地位，讨论这种等价关系，对于深入理解线弹性结构中的相关定理及结论也是非常有益的.

致谢 感谢南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室高存法教授和黄再兴教授对本文给予的建议和指导.

参 考 文 献

1 郭仲衡. 非线性弹性理论. 北京：科学出版社，1980
2 Truesdell C, Noll W. The Non-linear Fields Theories of Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2004
3 李忱，杨桂通. 非线性正交各向异性弹性材料的本构方程及其势函数. 力学季刊，2009, 30(2): 169-175
4 李忱，杨桂通，黄执中. 非线性横观各项同性弹性材料的本构方程及其势函数. 力学季刊，2009, 30(4): 517-522
5 陆明万, 罗学富. 弹性理论基础. 北京: 清华大学出版社, 1990
6 胡海岩. 对振动学及其发展的美学思考. 振动工程学报, 2000, 13(2): 161-169

(责任编辑：胡 漫)