

物体沿绳索无摩擦下滑运动研究

黄瑞璞 卓 新¹⁾

(浙江大学建筑工程学院, 杭州 310058)

摘要 提出了物体在无摩擦情况下沿一段柔性绳索下滑运动力学问题的分析方法, 利用牛顿第二定律建立耦合运动方程组, 采用龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法编写程序对已建方程组进行求解, 用 Matlab 中的曲线拟合命令对方程组的数值解进行公式拟合, 用得到的物体运动公式结合耦合运动方程组可求出物体下滑各时段绳索的内力. 提出的分析方法对物体在不同初始状态下的计算结果表明: 绳索内力随物体的简谐振动呈周期性变化; 物体下滑高度越高, 经过相同位置时速度、加速度和绳索内力就越大.

关键词 物体沿绳索下滑运动, 无摩擦, 力学分析

中图分类号: O301 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-13-297

THE FRICTIONLESS SLIDING OF AN OBJECT ALONG A ROPE

HUANG RuiPu ZHUO Xin¹⁾

(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract A new method is proposed to analyze the internal force in a rope in the process of an object sliding along it without friction. A set of equations for the coupled motion is established on the basis of Newton's second law. Then, it is solved numerically by using the Runge-Kutta method, and the results are fitted through the Matlab software to obtain the formulas of motion. With the combination of the fitted formulas and the equations of motion, the internal force in the rope, as the object sliding along, is determined. Under different initial states of the object, the results, analyzed by the proposed new method, show that the internal force in the rope changes periodically in accordance with the simple harmonic motion of the object. The higher the object is released, the larger velocity and acceleration it achieves when passing through the same point on the rope, so does the internal force in the rope.

Key words objects sliding along the rope, frictionless, mechanical analysis

引 言

物体沿绳索等柔性结构下落或者移动是典型的动力学问题, 为解决此类问题而构建的力学模型各有不同. 魏建东^[1] 为了精确模拟结构中绳索和滑轮之间的相互作用, 考虑了滑轮的半径, 基于有限元的基本原理建立了滑轮支撑一段索的单元, 推导出新单元的切线刚度矩阵, 并用新单元进行有限元分析得出滑轮沿绳索的移动和索道运送重物时索的内力变化. Ren 等^[2] 为了考虑索的垂度对索结构静力分

析的影响, 创建了两节点抛物线单元, 并用新建单元分析一物体在重力作用下沿绳索的移动, 得到不同垂度下滑移重物的挠度曲线. 周新年等^[3] 从悬索的悬链线标准线形出发对滑索进行设计计算, 按照能量原理的方法分析影响滑速的诸多因素, 用动能定理导出了滑速的计算公式, 并应用于福建省三明市瑞云山滑索工程设计; 经现场实测, 验证了该计算方法的正确性. Zhou 等^[4] 创建了每个节点有 3 个自由度的 3 节点滑移索单元, 基于均匀应变假设以及

2013-07-16 收到第 1 稿, 2013-09-25 收到修改稿.

1) 卓新, 男, 副教授. E-mail: zhuoxin@zju.edu.cn

用第二 Piola-Kirchhoff 应力和 Green 应变表示的积分形式虚功方程, 推导出滑移索单元切线刚度方程, 并将这个新单元应用到分析解决物体沿绳索下滑的问题, 得到了物体在下滑时的瞬时位置坐标. Aaufaure^[5-6] 提出了模拟索在滑轮处滑动的有限元模型, 推导出单元内力和单元刚度矩阵, 并把新单元应用到柔性结构.

文献 [1-2, 4-6] 在分析滑轮沿绳索下滑时都创建新单元, 新单元的切线刚度矩阵的推导对有限元理论要求较高, 编写新单元程序对有限元进行二次开发难度较大、方法繁琐, 并且无法得到物体下滑过程各时间点的运动情况和相应时刻绳索的内力. 文献 [3] 建立能量方程只研究初始时刻和终点时刻物体的速度, 不能得到物体下滑时各个时间点的运动情况和相应时刻绳索的内力. 本文将采用牛顿第二定律方法分析物体在无摩擦情况下沿一段柔性绳索的下滑过程, 分析物体的运动轨迹和不同时刻绳索的内力.

1 计算原理与步骤

如图 1 所示, 一个重为 m 的物体在自重作用下沿不计重力的绳索无初始速度向下滑动, 假设绳索由两段折线构成, 且物体下滑过程中绳索的总长度 L 保持不变.

本文提出了分析物体沿绳索等柔性结构无摩擦下滑问题的计算方法, 步骤如下:

(1) 建立坐标系, 对物体进行受力分析, 根据牛顿第二定律对物体和绳索建立耦合运动方程组;

(2) 用龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法, 编写程序对步骤 1 建立的方程组进行求解;

(3) 用 Matlab 工具箱模块中曲线拟合命令对步骤 2 的计算结果进行公式拟合, 得到物体的运动公式, 并研究物体的运动特性;

(4) 利用步骤 1 物体在 x 向或者 y 向的方程, 再结合步骤 3 的物体运动公式计算出物体运动任意时刻的绳索内力.

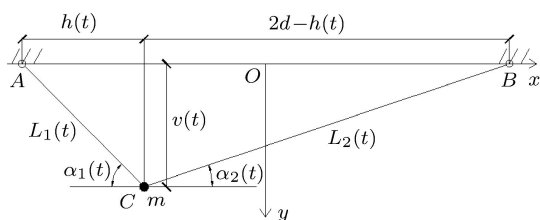


图 1 物体沿绳索下滑示意图

1.1 力学模型和方程的建立

建立如图 2 坐标系, AB 的长度为 $2d$, AC 段的长度为 $L_1(t)$, BC 段索的长度为 $L_2(t)$, $h(t)$ 为物体下滑的水平坐标, $v(t)$ 为物体下滑的竖向坐标, a_x 表示物体下滑时水平方向的加速度, a_y 表示物体下滑时垂直方向的加速度. 绳索与物体之间不计摩擦影响, 设 AC 段的索内力为 $T(t)$, 则 BC 段的索内力也为 $T(t)$, 索 AC 与水平方向的夹角为 $\alpha_1(t)$, 索 BC 与水平方向的夹角为 $\alpha_2(t)$, 如图 2, 其中, m 表示所挂物体的质量.

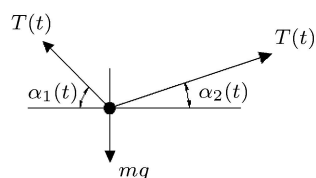


图 2 物体、绳索受力分析图

如图 2, 由牛顿第二定律, 对物体和绳索的 x 向和 y 向建立方程得

$$\left. \begin{aligned} T \cos \alpha_2 - T \cos \alpha_1 &= ma_x = m\ddot{h}(t) \\ mg - T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_1 &= ma_y = m\ddot{v}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由图 1 上的几何关系可知

$$\sin \alpha_1 = \frac{v(t)}{L_1(t)}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{h(t)}{L_1(t)} \quad (2)$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{v(t)}{L_2(t)}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{2d - h(t)}{L_2(t)} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} v(t)^2 + h(t)^2 &= L_1^2(t) \\ (2d - h(t))^2 + v(t)^2 &= L_2^2(t) = (L - L_1(t))^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由式 (1) 消去 T , 代入式 (2) 和式 (3) 得

$$\ddot{v}(t) + \frac{Lv(t)\ddot{h}(t)}{2L_1(t)d - Lh(t)} = g \quad (5)$$

由式 (4) 得

$$\left. \begin{aligned} L_1(t) &= \frac{L^2 + 4dh(t) - 4d^2}{2L} \\ v(t) &= \sqrt{L_1^2(t) - h^2(t)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

联立式 (5) 和式 (6) 得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + \frac{Lv(t)\ddot{h}(t)}{2L_1(t)d - Lh(t)} &= g \\ L_1(t) &= \frac{L^2 + 4dh(t) - 4d^2}{2L} \\ v(t) &= \sqrt{L_1^2(t) - h^2(t)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1.2 龙格-库塔方法解方程组

对式 (7) 第 2 个方程等号两边同时平方然后对时间 t 求二阶导数得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) + \frac{L^2 v(t) \ddot{h}(t)}{(4d^2 - L^2)h(t) + L^2 d - 4d^3} &= g \\ v(t)\ddot{v}(t) + \dot{v}^2(t) + \left(1 - \frac{4d^2}{L^2}\right)\dot{h}^2(t) + \\ \left(1 - \frac{4d^2}{L^2}\right)h(t)\ddot{h}(t) - \\ \left(1 - \frac{4d^2}{L^2}\right)d\ddot{h}(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对式 (8) 进行化简, 分别求出 $\ddot{v}(t)$, $\ddot{h}(t)$ 得

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v}(t) &= \frac{gL^2 v(t) - L^2 \dot{v}^2(t) - (L^2 - 4d^2)\dot{h}^2(t)}{2L^2 v(t)} \\ \ddot{h}(t) &= \left[\frac{gL^2 v(t) + L^2 \dot{v}^2(t) + (L^2 - 4d^2)\dot{h}^2(t)}{L^4 v^2(t)} \right] / \\ &\quad \left[\frac{L^4 v^2(t)}{(4d^2 - L^2)h(t) + L^2 d - 4d^3} - \right. \\ &\quad \left. (L^2 - 4d^2)h(t) + (L^2 - 4d^2)d \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

为了方便用 Matlab 求解方程 (9), 令 $v(t) = x_1$; $\dot{v}(t) = x_2$; $h(t) = x_3$; $\dot{h}(t) = x_4$; $f_1(t, x) = \dot{x}_1$; $f_2(t, x) = \dot{x}_2$; $f_3(t, x) = \dot{x}_3$; $f_4(t, x) = \dot{x}_4$. $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, 则 $\ddot{v}(t) = \dot{x}_2$, $\ddot{h}(t) = \dot{x}_4$. 并对式 (9) 进行降阶化简得

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{gL^2 x_1 - L^2 x_2^2 - (L^2 - 4d^2)x_4^2}{2L^2 x_1} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \left[\frac{gL^2 x_1 + L^2 x_2^2 + (L^2 - 4d^2)x_4^2}{L^4 x_1^2} \right] / \\ &\quad \left[\frac{L^4 x_1^2}{(4d^2 - L^2)x_3 + L^2 d - 4d^3} - \right. \\ &\quad \left. (L^2 - 4d^2)x_3 + (L^2 - 4d^2)d \right] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

由式 (10) 确定函数矩阵 \mathbf{f}

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(t, x) \\ f_2(t, x) \\ f_3(t, x) \\ f_4(t, x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{gL^2 x_1 - L^2 x_2^2 - (L^2 - 4d^2)x_4^2}{2L^2 x_1} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \left[\frac{gL^2 x_1 + L^2 x_2^2 + (L^2 - 4d^2)x_4^2}{L^4 x_1^2} \right] / \\ \left[\frac{L^4 x_1^2}{(4d^2 - L^2)x_3 + L^2 d - 4d^3} - \right. \\ \left. (L^2 - 4d^2)x_3 + (L^2 - 4d^2)d \right] \end{bmatrix} \quad (11)$$

依据式 (11) 编写四阶龙格-库塔算法 Matlab 计算程序, 求出式 (8) 的数值解.

1.3 方程组解公式拟合

选取式 (8) 的数值解一个周期的图形, 提取数据点, 把这些点导入 Matlab 中, 然后用 Matlab 工具箱模块中曲线拟合命令根据数据点的走势选择含有待定常数的 Fourier 函数, 保证至少 95% 的点落在拟合曲线上, 根据输入的点求出选定函数的未知常数, 求出物体下滑过程中的水平位移 $h(t)$ 、竖向位移 $v(t)$ 关于时间 t 的表达式. 对 $h(t)$ 和 $v(t)$ 做关于时间 t 的一次求导得 $\dot{h}(t)$ 和 $\dot{v}(t)$; 二次求导得 $\ddot{h}(t)$ 和 $\ddot{v}(t)$, 进而求出物体下滑过程中瞬时速度和瞬时加速度等运动特性.

1.4 物体下滑过程索的力学特性

由式 (1) 中的第 2 项得

$$T = \frac{mg - m\ddot{v}(t)}{\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1} \quad (12)$$

将式 (2) 和式 (3) 的几何关系代入式 (12) 得

$$T = \frac{L_1(t)L_2(t)}{(L_1(t) + L_2(t))v(t)} m(g - \ddot{v}(t)) \quad (13)$$

将 $L_2(t) = L - L_1(t)$ 代入式 (14) 得

$$T = \frac{L_1(t)(L - L_1(t))}{Lv(t)} m(g - \ddot{v}(t)) \quad (14)$$

为了便于了解物体的运动规律, 对原坐标系进行平移, x 轴不变, y 轴向右平移 d . 坐标系平移

后, 其几何关系发生变化, 式 (4) 则变为

$$\left. \begin{aligned} v(t)^2 + (d + h(t))^2 &= L_1^2(t) \\ v(t)^2 + (d - h(t))^2 &= L_2^2(t) = (L - L_1(t))^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

解得

$$L_1(t) = \frac{4dh(t) + L^2}{2L} \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (15) 得

$$T = \frac{(4dh(t) + L^2)(L^2 - 4dh(t))}{4L^3v(t)} m(g - \ddot{v}(t)) \quad (17)$$

2 算例分析

假定 $d = 0.3\text{ m}$, $L = 0.686\text{ m}$, $g = 3.05\text{ m/s}^2$, 代入式 (11). 当绳索绷紧情况下物体下滑, 初始状态 1: 初始值 $h(t) = 0.15\text{ m}$; $\dot{h}(t) = 0$; $v(t) = 0.15\text{ m/s}$; $\dot{v}(t) = 0$. 则初始值矩阵 $\mathbf{x}_0 = [0.15 \ 0 \ 0.15 \ 0]$. 初始状态 2: 初始值 $h(t) = 0\text{ m}$; $\dot{h}(t) = 0$; $v(t) = 0.081\text{ m/s}$; $\dot{v}(t) = 0$. 则初始值矩阵 $\mathbf{x}_0 = [0.081 \ 0 \ 0 \ 0]$.

2.1 物体的运动特性

解方程组可知 $h(t)$, $v(t)$ 是周期性运动, $h(t)$ 与 t 的关系表示如图 3, $v(t)$ 与 t 的关系表示如图 4. 其中 $h_1(t)$, $v_1(t)$, $p_1(t)$, $a_1(t)$ 分别表示初始状态 1 物体下滑的水平位移 $h(t)$, 竖向位移 $v(t)$, 速度 $p(t)$, 加速度 $a(t)$; $h_2(t)$, $v_2(t)$, $p_2(t)$, $a_2(t)$ 分别表示初始状态 2 物体下滑的水平位移 $h(t)$, 竖向位移 $v(t)$, 速度 $p(t)$, 加速度 $a(t)$.

分别选取图 3 和图 4 第 1 个周期的图形, 对 $h(t)$ 和 $v(t)$ 进行公式拟合, 得到 $h(t)$ 和 $v(t)$ 关于时间 t 的表达式. 对 $h(t)$ 和 $v(t)$ 做关于时间 t 的一次求导和二次求导, 则物体速度 $p(t)$ 与 t 的关系表示如图 5, 加速度 $a(t)$ 与 t 的关系表示如图 6.

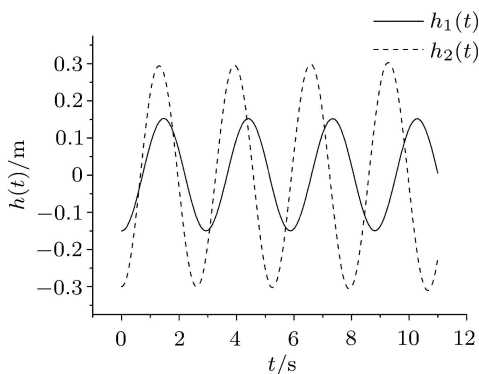


图 3 物体下滑过程中水平位移

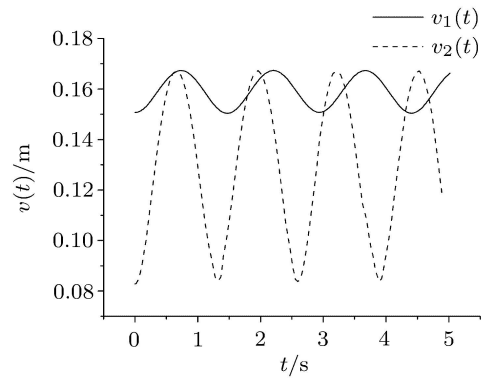


图 4 物体下滑过程中竖向位移

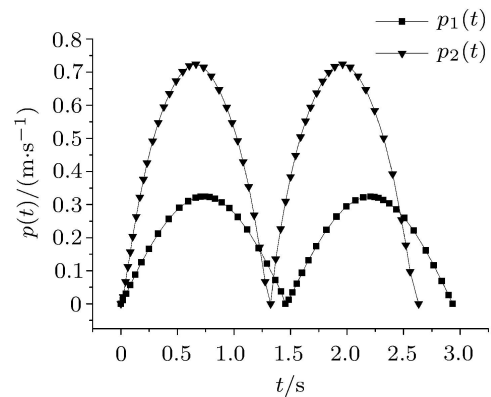


图 5 一个周期内的速度变化

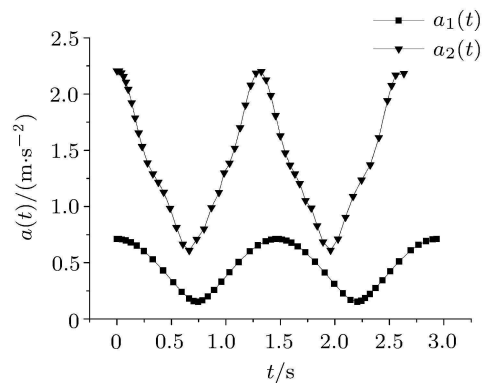


图 6 一个周期内加速度变化

由图 3 和图 4 可知, 在不计摩擦物体沿绳索下滑的过程中, 水平位移 $h(t)$ 、竖向位移 $v(t)$ 做类似正余弦变化周期运动, 物体做简谐振动.

由图 5 和图 6 可知, 在不计摩擦物体沿绳索下滑的过程中, 在一个下滑周期过程中, 物体运动到最高点时速度为 0, 加速度最大; 运动到最低点时速度最大, 加速度最小. 初始状态 2 与初始状态 1 相比, 初始状态 2 物体下滑高度高, 下滑的路径长度大于初始状态 1, 但是物体的加速度大, 速度变化快, 物

体经过相同点的速度大, 初始状态 2 的周期小于初始状态 1.

2.2 物体下滑时绳索的力学特性

选取一个周期的 $h(t)$, $v(t)$ 和 $\ddot{v}(t)$ 的点代入式 (17), 可以计算出在无摩擦情况下物体沿绳索下滑时绳索受到的内力, 计算结果如图 7. 其中 β 为物体运动滑移过程中的绳索内力与物体静止时的绳索内力之比; β_1 表示初始状态 1 的 β 值, β_2 表示初始状态 2 的 β 值. 由图 2, 当 $\alpha_1 = \alpha_2 = 28.998^\circ$ 时, 可得出当物体静止在绳索最低点时绳索的内力 $T = 3.15\text{m}$.

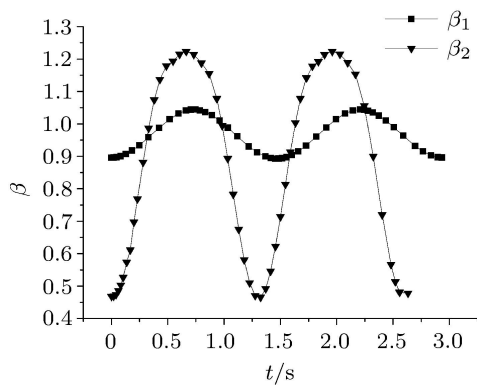


图 7 一个周期内的 β 变化

由图 7 可以看出:

(1) 在不计摩擦物体沿绳索下滑的过程中, 一个下滑周期中, 当物体经过最低点附近时, 绳索的内力是最大的;

(2) 状态 1 绳索所受最大的内力是物体静止放在绳索时的 1.04 倍, 状态 2 绳索所受最大的内力是物体静止放在绳索时的 1.2 倍. 说明在物体下滑过程中, 当物体到达两端最高点附近时, 绳索的内力是最小的;

(3) 状态 1 绳索所受最小的内力是物体静止放在绳索时的 0.89 倍, 状态 2 绳索所受最小的内力是物体静止放在绳索时的 0.47 倍. 说明物体的下滑高度越高, 物体经过最低点附近时绳索的内力就越大.

(4) 由式 (17) 可知, 绳索内力 T 不仅与加速度

$\ddot{v}(t)$ 有关, 而且和物体水平坐标 $h(t)$ 、竖向坐标 $v(t)$ 有关. $h(t)$, $v(t)$, $\ddot{v}(t)$ 都是时间 t 的函数. 物体在不同的下滑高度条件下, 同一索段在最低点时的水平坐标 $h(t)$, 竖向坐标 $v(t)$ 相同. 而物体的下滑高度越大, 经过最低点时的加速度竖向分量 $\ddot{v}(t)$ 就越大. 由于 $\ddot{v}(t)$ 的计算值为负值, 同时在式 (17) 中 $\ddot{v}(t)$ 前面是减号, 所以 $\ddot{v}(t)$ 与 g 实际上是叠加关系, 造成内力 T 增大. 此时, 速度也达到最大值.

3 结论

(1) 与文献 [1-2, 4-6] 采用有限元方法创建新单元分析类似结构相比, 本文采用牛顿第二定律推导出物体的运动方程, 通过解方程组求出物体的运动轨迹和各时刻的位移、速度和加速度等运动特性, 进而根据物体的运动轨迹求出绳索内力. 提出的分析方法概念清楚, 计算简捷.

(2) 物体沿绳索无摩擦下滑做简谐振动, 在一个运动周期中, 物体经过最低点时的运动速度最大, 加速度最小, 绳索内力最大; 物体到达最高点时的速度为 0, 加速度最大, 绳索内力最小; 物体的下滑高度越高, 经过相同点的速度和加速度越大, 绳索内力也越大.

参考文献

- 1 魏建东. 缆索吊装系统有限元分析中的滑轮单元. 力学与实践, 2007, 29(1): 58-63
- 2 Ren Weixin, Huang Menggang, Hu Weihua. A parabolic cable element for static analysis of cable structures. *Engineering Computations*, 2008, 25(4): 366-384
- 3 周新年, 张正雄, 官印生等. 滑索理论及其应用研究. 林业科学, 2006, 42(9): 83-88
- 4 Zhou B, Accorsi ML, Leonard JW. Finite element formulation for modeling sliding cable elements. *Computers and Structures*, 2004, 82(2): 271-280
- 5 Aufaure M. A finite element of cable passing through a pulley. *Computers and Structures*, 1993, 46 (5): 807-812
- 6 Aufaure M. A three-joint cable element ensuring the continuity of the horizontal tension: a clamp-cable element. *Computers and Structures*, 2000, 74(2): 243-251

(责任编辑: 胡漫)