

一种用于实时轨道确定的 NPF-SRCKF 滤波算法

李志军¹, 侯黎强^{1,2}

(1. 西安卫星测控中心宇航动力学国家重点实验室, 西安 710043;

2. 西安交通大学电子信息工程学院, 西安 710049)

摘要: 针对航天器实时轨道确定中建模复杂、计算量大、估计精度低的问题, 设计了一种考虑地球 J_2 摄动影响的基于 NPF-SRCKF 的实时轨道确定算法, 该算法采用非线性预测滤波(NPF)对模型误差进行补偿修正, 利用平方根容积卡尔曼滤波(SRCKF)算法对修正模型误差后的系统进行状态估计。针对单测站、双测站跟踪测量设计了不同的实时轨道确定算法。实验结果显示, 将非线性预测滤波和平方根容积卡尔曼滤波结合在一起, 运用于简化的实时轨道确定模型, 能有效降低计算复杂度, 改进数值运算的稳定性, 提高状态估计的精度。

关键词: 实时轨道确定; 非线性预测滤波; 平方根容积卡尔曼滤波

中图分类号: V249.3 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2014)07-0811-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2014.07.010

An Improved NPF-SRCKF Based Algorithm for Spacecraft Orbit Determination

LI Zhi-jun¹, HOU Li-qiang^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Astronautic Dynamics, Xi'an Satellite Control Center, Xi'an 710043, China;

2. School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: A NPF-SRCKF based algorithm taking into account J_2 perturbation is proposed for spacecraft orbit determination. In this method, Nonlinear Predictive Filter (NPF) is used for correcting the model error, while Square-Root Cubature Kalman Filter (SRCKF) is performed for estimating the states with the model corrected by NPF. To illustrate effectiveness of the method, two test cases are designed for the orbit determination by use of data from single ground station and double stations. Simulation results show that combined improved NPF with SRCKF, the method proposed in this paper can reduce the complexity of the computation, and make the data processing procedure more robust and accurate.

Key words: Orbit determination; Nonlinear predictive filter; Square-root cubature Kalman filter

0 引 言

目前我国的地(海)基卫星轨道跟踪测量系统包含统一测控系统、雷达和光电测量系统, 测量元主要为: 测距、测速、方位角和俯仰角。利用上述测量元实时估计航天器的运行轨道, 这是一个非常复杂的问题, 首先航天器的动力学模型是无法用解析式准确表达的, 其次观测量和状态量不在同一空间坐标系中, 第三观测方程和状态方程的误差特性是不

明确的, 准确建模求解此问题几乎是不可能的。对此, 本文做了一个简化近似处理: 航天器的动力学模型忽略其它摄动, 只考虑地球 J_2 摄动影响, 状态量选用地心惯性坐标系的位置、速度矢量, 观测量为观测站北—东—天顶坐标系的测距、测速、方位角和俯仰角, 观测方程和状态方程的噪声近似为均值为 0 的高斯噪声, 于是上述问题变成一个标准的非线性估计问题。目前解决此类问题的非线性算法主要有扩展卡尔曼滤波(EKF), UKF 和粒子滤波(PF)。其

中 PF 运算量较大,实时性较差;而在运算复杂度相当的前提下,UKF 算法的精度要高于 EKF 算法^[1-2],近年来应用极为广泛,但使用 UKF 对高维状态向量估计时,需要调整合理的参数,才能得到理想的估计结果。2009 年 Simon Haykin 等提出了一种全新的非线性滤波方法,即容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter, CKF)^[3],它采用一组等权值的容积点集来解决贝叶斯滤波的积分问题,为非线性估计问题提供了一种新的实现方式。CKF 的一种改进型—平方根容积卡尔曼滤波(Square Root Cubature Kalman Filter, SRCKF),通过引入矩阵正交三角分解,避开每一步迭代过程中的矩阵开方运算,在滤波过程中直接以协方差矩阵的平方根形式进行递推更新,可以降低计算复杂度,获得更高的效率;同时能保证协方差矩阵的非负定性,有效地避免了滤波器的发散,提高了滤波的收敛速度和数值稳定性。

然而,上述建模过程中,动力学模型简化后产生了系统模型误差,系统噪声和测量噪声近似为 0 均值高斯噪声也产生一定误差,同 EKF、UKF 算法类似,SRCKF 算法对系统的模型误差也很敏感,不能解决由此引起的估计误差问题。借鉴预测跟踪方法的实现思想,基于测量矢量估计值的泰勒级数展开,Crassidis 和 Markley 提出了一种求解最小模型误差准则的递推算法,即非线性预测滤波(Nonlinear Predictive Filter, NPF)^[4-5]。NPF 能够实时估计系统的模型误差,并以此修正系统模型,可用于模型误差较大的非线性系统的滤波^[6-8]。故 NPF 可以和 SRCKF 相结合,以弥补系统模型误差的不足。

本文以 NPF 和 SRCKF 算法为基础,针对单测站、双测站的跟踪测量分别设计了不同的实时轨道确定算法,并对几种算法进行了仿真校验,实验表明:将 NPF 和 SRCKF 算法运用于实时轨道确定,能有效降低计算复杂度,改进数值运算的稳定性,提高状态估计的精度,具有重要的工程应用价值。

1 平方根容积卡尔曼滤波

考虑具有加性噪声的离散非线性动态系统

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

假定过程噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 \mathbf{v}_k 相互独立,且 $\mathbf{w}_k \sim$

$N(0, \mathbf{Q}_k), \mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$ 。

由式(1)、(2)描述的非线性系统,容积卡尔曼滤波算法首先计算加权函数为标准正态分布密度的积分的基本容积点和对应的权值

$$\xi_j = \sqrt{n}[\mathbf{1}]_j, W_j = \frac{1}{2n}, j = 1, 2, \dots, 2n, [\mathbf{1}]_j \in \mathbf{R}^n \quad (3)$$

式中: n 为系统的状态维数, $[\mathbf{1}]_j$ 表示为完全全对称点集 $[\mathbf{1}]$ 中的第 j 个点。完全全对称点集表示如下:

$$[\mathbf{1}] = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

若 k 时刻的后验概率为 $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{1:k}) \sim N(\mathbf{x}_k; \hat{\mathbf{x}}_{klk}, \mathbf{P}_{klk})$, $\text{chol}(\cdot)$ 表示矩阵的 Cholesky 分解。平方根容积卡尔曼滤波算法如下:

1) 计算容积点

$$\mathbf{S}_{klk} = \text{chol}(\mathbf{P}_{klk}) \quad (4)$$

$$\mathbf{X}_{j,klk} = \mathbf{S}_{klk} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_{klk} \quad (5)$$

2) 计算通过非线性状态方程传播的容积点

$$\mathbf{X}_{j,k+1k}^* = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{j,klk}) \quad (6)$$

3) 计算状态预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1k} = \sum_{j=1}^{2n} W_j \mathbf{X}_{j,k+1k}^* \quad (7)$$

4) 计算估计预测误差协方差矩阵的平方根

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi}_{k+1k}^* = \frac{1}{\sqrt{2n}} [& (\mathbf{X}_{1,k+1k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k}), \\ & (\mathbf{X}_{2,k+1k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k}), \dots, \\ & (\mathbf{X}_{2n,k+1k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k})] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{S}_{k+1k} = \text{qr}([\boldsymbol{\chi}_{k+1k}^*, \sqrt{\mathbf{Q}_k}]) \quad (9)$$

其中 $\text{qr}(\cdot)$ 表示通过 QR 分解取下三角矩阵, $\sqrt{\mathbf{Q}_k}$ 表示取矩阵 \mathbf{Q}_k 的平方根。

5) 计算容积点

$$\mathbf{X}_{j,k+1k} = \mathbf{S}_{k+1k} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_{k+1k} \quad (10)$$

6) 计算通过非线性量测方程传播的容积点

$$\mathbf{Y}_{j,k+1k} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{j,k+1k}) \quad (11)$$

7) 计算量测预测

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1k} = \sum_{j=1}^{2n} W_j \mathbf{Y}_{j,k+1k} \quad (12)$$

8) 计算新息协方差矩阵的平方根

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1k} = \frac{1}{\sqrt{2n}} [(\mathbf{Y}_{1,k+1k} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1k}), (\mathbf{Y}_{2,k+1k}^* - \hat{\mathbf{y}}_{k+1k}), \dots, (\mathbf{Y}_{2n,k+1k}^* - \hat{\mathbf{y}}_{k+1k})] \quad (13)$$

$$\mathbf{S}_{zz,k+1k} = \text{qr}([\boldsymbol{\eta}_{k+1k}, \sqrt{\mathbf{R}_k}]) \quad (14)$$

式中: $\sqrt{\mathbf{R}_k}$ 表示取矩阵 \mathbf{R}_k 的平方根。

9) 计算互协方差矩阵

$$\boldsymbol{\chi}_{k+1k} = \frac{1}{\sqrt{2n}} [(\mathbf{X}_{1,k+1k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k}), (\mathbf{X}_{2,k+1k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k}), \dots, (\mathbf{X}_{2n,k+1k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1k})] \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{xz,k+1k} = \boldsymbol{\chi}_{k+1k} (\boldsymbol{\eta}_{k+1k})^T \quad (16)$$

10) 计算增益

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_{xz,k+1k} (\mathbf{S}_{zz,k+1k}^T)^{-1}) (\mathbf{S}_{zz,k+1k})^{-1} \quad (17)$$

11) 计算状态估计

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1k}) \quad (18)$$

12) 计算状态估计误差协方差矩阵的平方根

$$\mathbf{S}_{k+1k+1} = \text{qr}([\boldsymbol{\chi}_{k+1k} - \mathbf{K}_{k+1} \boldsymbol{\eta}_{k+1k}, \mathbf{K}_{k+1} \sqrt{\mathbf{R}_k}]) \quad (19)$$

2 非线性预测滤波算法

2.1 滤波器模型

对于非线性连续离散系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{d}(t) \quad (20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{v}(t) \quad (21)$$

可建立滤波器模型

$$\hat{\dot{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{G}(t) \mathbf{d}(t) \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}(t), t) + \mathbf{v}(t) \quad (23)$$

$\hat{\mathbf{x}}(t)$ 是 $n \times 1$ 维状态矢量; $\mathbf{d}(t)$ 是 $l \times 1$ 维模型误差矢量; $\mathbf{G}(t)$ 是 $n \times l$ 维的误差分配矩阵; $\hat{\mathbf{y}}(t)$ 是 $m \times 1$ 维测量矢量。

2.2 输出估计的泰勒级数近似

对式(23)中的 $\hat{\mathbf{y}}(t)$ 进行泰勒级数展开, 可得到

$$\hat{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{y}}(t) + \Delta t \dot{\hat{\mathbf{y}}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\hat{\mathbf{y}}}(t) + \dots \quad (24)$$

整理上式, 得到

$$\hat{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{x}}(t), \Delta t) + \mathbf{A}(\Delta t) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}(t)) \mathbf{d}(t) \quad (25)$$

式中: $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ 是采样间隔。

设 $\hat{\mathbf{y}}(t) = (\hat{y}_1(t) \ \dots \ \hat{y}_m(t))^T$, 则

$$\begin{cases} \dot{\hat{y}}_i(t) = \frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \ddot{\hat{y}}_i(t) = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \left[\frac{\partial h_i(\hat{\mathbf{x}}(t), t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}(t)} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \right] \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \vdots \end{cases}$$

式中: $i = 1, 2, \dots, m$ 。对 $h_i(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ 进行连续微分,

将 $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$ 代入后, $\mathbf{d}(t)$ 的任一元素首次出现时 $h_i(\hat{\mathbf{x}}(t), t)$ 的最低微分阶次记为 p_i , p_i 称为相对阶。 $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{x}}(t), \Delta t)$ 的第 i 个元素计算公式

$$Z_i(\hat{\mathbf{x}}(t), \Delta t) = \sum_{k=1}^{p_i} \frac{(\Delta t)^k}{k!} \mathbf{L}_f^k(h_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (26)$$

$\mathbf{L}_f^k(h_i)$ 是 h_i 关于 f 的 k 阶李导数。定义为

$$\begin{cases} \mathbf{L}_f^k(h_i) = h_i, & k = 0 \\ \mathbf{L}_f^k(h_i) = \frac{\partial \mathbf{L}_f^{k-1}(h_i)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} h_i, & k \geq 1 \end{cases}$$

$\mathbf{A}(\Delta t)$ 是 $m \times m$ 维的对角矩阵, 其对角元素为

$$\lambda_{ii} = \frac{(\Delta t)^{p_i}}{p_i!}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (27)$$

$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}(t))$ 是 $m \times l$ 维的矩阵, 其行元素为

$$s_i = (\mathbf{L}_{g_1}(\mathbf{L}_f^{p_i-1}(h_i)) \ \dots \ \mathbf{L}_{g_l}(\mathbf{L}_f^{p_i-1}(h_i))) \quad (28)$$

2.3 最小模型误差的求解

把式(25)代入性能指标函数

$$\begin{aligned} J[\mathbf{d}(t)] &= \frac{1}{2} [\mathbf{y}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{y}}(t + \Delta t)]^T \mathbf{R}^{-1} \cdot \\ & \quad [\mathbf{y}(t + \Delta t) - \hat{\mathbf{y}}(t + \Delta t)] + \\ & \quad \frac{1}{2} \mathbf{d}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{d}(t) \end{aligned} \quad (29)$$

使 $J[\mathbf{d}(t)]$ 关于 $\mathbf{d}(t)$ 达到最小, 则可求得满足协方差约束条件的最小模型误差解

$$\hat{\mathbf{d}}(t) = - \{ [\mathbf{A}(\Delta t) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{A}(\Delta t) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})] + \mathbf{W} \}^{-1} \cdot [\mathbf{A}(\Delta t) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{x}}, \Delta t) + \hat{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t + \Delta t)] \quad (30)$$

式中: \mathbf{W} 是模型误差加权矩阵。

3 实时轨道确定的系统状态方程和量测方程

在地心惯性坐标系中, 对于航天器的运动方程,

采用位置矢量 $\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T$ 和速度矢量 $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z})^T$ 来描述^[9-10], 运动方程为 $\ddot{\mathbf{r}} = f(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$, 忽略其它摄动, 只考虑地球 J_2 摄动影响, 则系统动力学方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \frac{dz}{dt} = \dot{z} \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\mu x}{r^3} \left[\frac{J_2 a_E^2}{r^2} \left(7.5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1.5 \right) - 1 \right] \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{\mu y}{r^3} \left[\frac{J_2 a_E^2}{r^2} \left(7.5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 1.5 \right) - 1 \right] \\ \frac{d\dot{z}}{dt} = \frac{\mu z}{r^3} \left[\frac{J_2 a_E^2}{r^2} \left(7.5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 4.5 \right) - 1 \right] \end{cases} \quad (31)$$

式中: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $J_2 = 0.001082636$, a_E 是地球赤道平均半径。令 $\mathbf{X} = (\mathbf{r} \ \dot{\mathbf{r}})^T$, 式(31)可记为 $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$ 。已知 t_k 时刻的状态参数 \mathbf{X}_k , 则 t_{k+1} 时刻的状态参数为:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} F(\mathbf{X}_k) dt \quad (32)$$

式(32)可记为

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k) \quad (33)$$

通常情况下, 在观测站北—东—天顶坐标系中, 我们得到的观测量为 $\rho, A, E, \dot{\rho}$ 。其中 ρ 为测距, 测站到目标的径向距离, 也称斜距; A 为方位角, 在北—东—天顶坐标系中按照顺时针方向从正北起计量, 数值范围为 0 到 360° ; E 为俯仰角, 从测站当地地平面向上计算, 数值范围为 0 到 90° ; $\dot{\rho}$ 为测距变化率(也称径向速度或测速), 目标向靠近测站的方向运动时为负, 向远离测站的方向运动时为正。在北—东—天顶坐标系中, 若跟踪目标状态矢量为 $\boldsymbol{\rho} = [\rho_x \ \rho_y \ \rho_z]^T$, $\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{\rho}_x \ \dot{\rho}_y \ \dot{\rho}_z]^T$, 则它们与观测测量 $\rho, A, E, \dot{\rho}$ 的几何关系可以表示为

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2} \\ A = \arctan \frac{\rho_y}{\rho_x} \\ E = \arctan \frac{\rho_z}{\sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2}} \\ \dot{\rho} = \frac{1}{\rho} (\rho_x \dot{\rho}_x + \rho_y \dot{\rho}_y + \rho_z \dot{\rho}_z) \end{cases} \quad (34)$$

令 $\mathbf{X}_{\text{NEZ}} = [\boldsymbol{\rho} \ \dot{\boldsymbol{\rho}}]^T$, $\mathbf{Y} = [\rho \ A \ E \ \dot{\rho}]^T$, 则式(34)可记为 $\mathbf{Y} = h_1(\mathbf{X}_{\text{NEZ}})$ 。

参数 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 到 $\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}$ 通过坐标转换实现, 即先从地心惯性坐标系转换到地固坐标系^[11], 再从地固坐标系转换到北—东—天顶坐标系, 记为 $\mathbf{X}_{\text{NEZ}} = h_2(\mathbf{X})$ 。转换步骤如下:

1) 惯性坐标系的状态矢量 $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$ 转换成地固坐标系中的状态矢量 $\mathbf{r}_b, \dot{\mathbf{r}}_b$

$$\mathbf{r}_b = \mathbf{M}_{\text{HG}} \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}_b = \mathbf{M}_{\text{HG}} \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{M}_{\text{HDC}} \mathbf{r} \quad (35)$$

$$\mathbf{M}_{\text{HG}} = \mathbf{M}_{\text{EP}} \mathbf{M}_{\text{ER}} \mathbf{M}_{\text{NR}} \mathbf{M}_{\text{PR}} \quad (36)$$

$$\mathbf{M}_{\text{HDC}} = \mathbf{M}_{\text{EP}} \mathbf{M}_{\text{EDR}} \mathbf{M}_{\text{NR}} \mathbf{M}_{\text{PR}} \quad (37)$$

式中: \mathbf{M}_{PR} 为岁差矩阵, \mathbf{M}_{NR} 为章动矩阵, \mathbf{M}_{ER} 为地球自转矩阵, \mathbf{M}_{EP} 为极移矩阵, \mathbf{M}_{EDR} 为地球自转矩阵的导数矩阵。

2) 地固坐标系中的状态矢量 $\mathbf{r}_b, \dot{\mathbf{r}}_b$ 转换成北—东—天顶坐标系中的状态矢量 $\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{M}(\mathbf{r}_b - \mathbf{R}), \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{r}}_b \quad (38)$$

式中: \mathbf{R} 为站心坐标, \mathbf{M} 是地固坐标系到北—东—天顶坐标系的转换矩阵。

式(34)最后变成 $\mathbf{Y} = h_1(h_2(\mathbf{X}))$, 记为

$$\mathbf{Y} = h(\mathbf{X}) \quad (39)$$

式(33)、(39)组成实时轨道确定系统的状态方程和量测方程。

4 基于 NPF 和 SRCKF 的实时轨道确定算法

考虑简化模型误差和过程噪声误差, 由式(33)、(39)所表示的非线性离散系统状态方程和量测方程可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{G}_k \mathbf{d}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} = h(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_k \end{cases} \quad (40)$$

式中: $\mathbf{G}_k = [\mathbf{0}_{3 \times 3} \ \mathbf{I}_{3 \times 3}]^T$, $\mathbf{d}_k = [d_1 \ d_2 \ d_3]^T$ 。

4.1 单测站跟踪滤波算法

设 k 时刻的状态估计为: $\hat{\mathbf{x}}_{klk}, \mathbf{S}_{klk}$, 在 $k+1$ 时刻, 测站观测数据为 \mathbf{y}_{k+1} , 单测站跟踪 NPF-SRCKF 算法步骤如下:

1) 计算 k 时刻预测输出

$$\hat{\mathbf{y}}_{klk} = h(\hat{\mathbf{x}}_{klk})$$

2) 用式(26)~(28)计算 k 时刻预测滤波参数 $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{x}}_{klk}, \Delta t)$ 、 $\mathbf{A}(\Delta t)$ 、 $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}}_{klk})$

3) 用式(30)计算 k 到 $k+1$ 时刻的模型误差 $\hat{\mathbf{d}}_k$

4) 基于式(40)描述的非线性离散系统,用 $\hat{\mathbf{d}}_k$ 修正 SRCKF 的一步预测,即对式(6)进行修正:

$$\mathbf{X}_{j,k+1|k}^* = f(\mathbf{X}_{j,k|k}) + \mathbf{G}_k \hat{\mathbf{d}}_k \quad (41)$$

按照式(5)、(41)、(7)~(19)进行 SRCKF 滤波,求得 $k+1$ 时刻的状态估计值 $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \mathbf{S}_{k+1|k+1}$ 。

4.2 双测站跟踪滤波算法

设 k 时刻, A 测站状态估计为: $\hat{\mathbf{x}}_{klk}^A, \mathbf{S}_{klk}^A$, B 测站状态估计为: $\hat{\mathbf{x}}_{klk}^B, \mathbf{S}_{klk}^B$; 在 $k+1$ 时刻, 两测站观测数据为 $\mathbf{y}_{k+1}^A, \mathbf{y}_{k+1}^B$ 。对两站分别用单测站滤波算法进行计算, A 站状态估计为: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^A, \mathbf{S}_{k+1|k+1}^A$, B 站状态估计为: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^B, \mathbf{S}_{k+1|k+1}^B$, 记 $\mathbf{P}_{k+1}^A = \mathbf{S}_{k+1|k+1}^A (\mathbf{S}_{k+1|k+1}^A)^T$, $\mathbf{P}_{k+1}^B = \mathbf{S}_{k+1|k+1}^B (\mathbf{S}_{k+1|k+1}^B)^T$, 双测站跟踪联邦滤波的融合结果^[12]为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1} ((\mathbf{P}_{k+1}^A)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^A + (\mathbf{P}_{k+1}^B)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^B) \quad (42)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = ((\mathbf{P}_{k+1}^A)^{-1} + (\mathbf{P}_{k+1}^B)^{-1})^{-1} \quad (43)$$

信息分配为: $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^A = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \mathbf{S}_{k+1|k+1}^A = \text{chol}(\beta_A^{-1} \mathbf{P}_{k+1})$, $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}^B = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1}, \mathbf{S}_{k+1|k+1}^B = \text{chol}(\beta_B^{-1} \mathbf{P}_{k+1})$, 其中 $\beta_A = 0.5, \beta_B = 0.5$ 。

5 实验结果与分析

实验中, 取观测数据时间间隔 $T = 1.0$ s, 跟踪数据弧段取 A 测站和 B 测站的共视弧段, 时间区间为 $[75654, 76164]$ s, 蒙特卡罗仿真中测距、俯仰角、方位角和测速误差的标准差分别为 20 m、 0.02° 、 0.02° 和 0.1 m/s。初始状态方差矩阵选取

$$\mathbf{P}_0 = \text{diag}(1000^2, 1000^2, 1000^2, 10^2, 10^2, 10^2)$$

初始轨道为地固坐标系, $t_0 = 75654$ s,

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} -5164194.178 \\ 3358672.128 \\ 3289837.729 \\ 3820.598650 \\ -585.719870 \\ 6586.846937 \end{bmatrix}$$

状态噪声方差矩阵

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(0.1^2, 0.1^2, 0.1^2, 0.0001^2, 0.0001^2, 0.0001^2)$$

量测噪声矩阵

$$\mathbf{R} = \text{diag}(20^2, 0.02^2, 0.02^2, 0.1^2)$$

实验时分别采用单测站、双测站跟踪方式进行

仿真计算, 测站 A 大地坐标为 $(140^\circ, 35^\circ, 1000 \text{ m})$, 测站 B 大地坐标为 $(160^\circ, 50^\circ, 1000 \text{ m})$ 。

评价实时轨道计算结果采用位置均方根误差 (RMSE) 和速度均方根误差, 位置均方根误差定义如下:

$$E_k = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [(x_{k,j} - \hat{x}_{k,j})^2 + (y_{k,j} - \hat{y}_{k,j})^2 + (z_{k,j} - \hat{z}_{k,j})^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

式中: N 为蒙特卡罗仿真次数。速度均方根误差定义与式(44)类似。

运行 200 次蒙特卡罗仿真, 实验结果见图 1~图 6、表 1、2, 图中的数据为地固坐标系位置、速度 RMSE 数据, 其中, 图 1、2 为滤波 0~30 s 的数据, 图 3、4 为滤波 31~510 s 的数据, 图 5、6 为滤波稳定后 200~510 s 的数据; 表 1、2 为滤波 200~510 s 位置、速度 RMSE 的统计平均值和标准偏差。

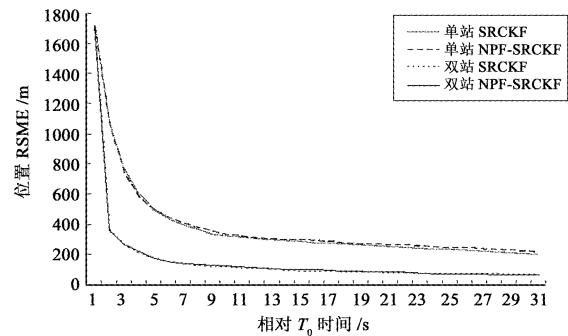


图 1 0~30 s 位置 RMSE 曲线

Fig. 1 0~30 s position RMSE

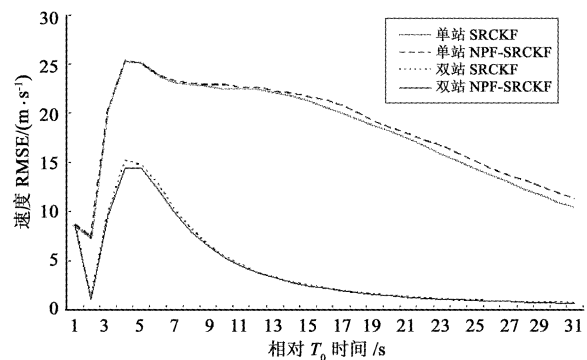


图 2 0~30 s 速度 RMSE 曲线

Fig. 2 0~30 s velocity RMSE

图 1~图 4 表明, 在初始误差大的情况下, 本文的滤波算法能够快速收敛, 双测站滤波收敛速度较快, 且双测站滤波的精度明显优于单测站滤波结果。

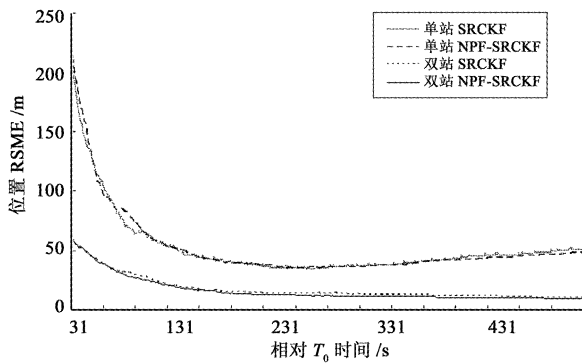


图 3 31 ~ 510 s 位置 RMSE 曲线

Fig. 3 31 ~ 510 s Position RMSE

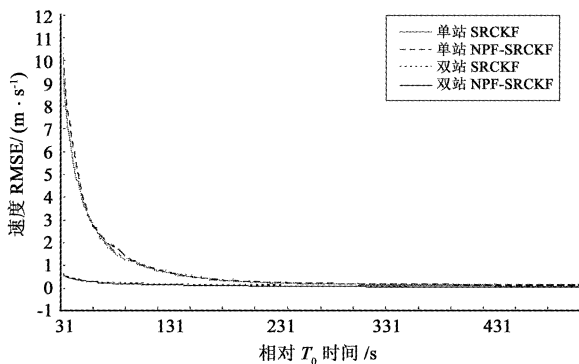


图 4 31 ~ 510 s 速度 RMSE 曲线

Fig. 4 31 ~ 510 s Velocity RMSE

单测站滤波中,位置估计受到累计误差影响,滤波估计的数值稳定性稍差。而双测站滤波能有效地消除累计误差影响,滤波估计的数值稳定性更好。

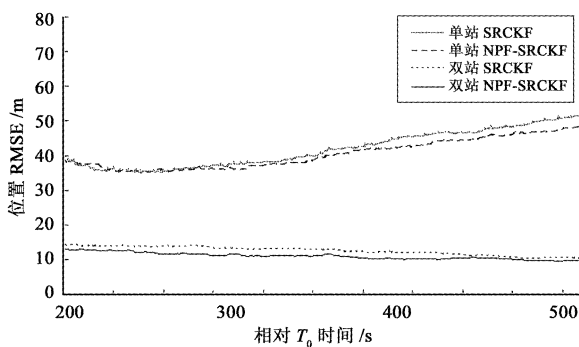


图 5 200 ~ 510 s 位置 RMSE 曲线

Fig. 5 200 ~ 510 s position RMSE

图 5、6 和表 1、2 表明,NPF-SRCKF 滤波算法通过 SRCKF 与 NPF 相结合,对系统模型误差进行了一定程度上的修正,无论对单测站还是双测站,NPF-SRCKF 滤波算法精度都优于 SRCKF 滤波算法。

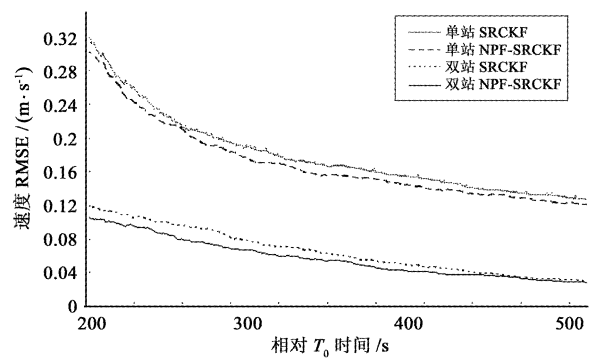


图 6 200 ~ 510 s 速度 RMSE 曲线

Fig. 6 200 ~ 510 s velocity RMSE

表 1 200 ~ 510 s 位置 RMSE 平均值、标准偏差

Table 1 200 ~ 510 s Mean value and variance of

position RMSE

滤波模式	位置 RMSE 平均值 /m	位置 RMSE 标准偏差 /m
单站 SRCKF	41.96055980	5.160529646
单站 NPF-SRCKF	40.36049087	4.159379328
双站 SRCKF	12.49023479	1.225642364
双站 NPF-SRCKF	11.05714724	0.931771953

表 2 200 ~ 510 s 速度 RMSE 平均值、标准偏差

Table 2 200 ~ 510 s Mean value and variance of

velocity RMSE

滤波模式	速度 RMSE 平均值 /(m · s ⁻¹)	速度 RMSE 标准偏差 /(m · s ⁻¹)
单站 SRCKF	0.180957647	0.046627731
单站 NPF-SRCKF	0.170342822	0.045495081
双站 SRCKF	0.065829707	0.026652274
双站 NPF-SRCKF	0.057855628	0.022631129

6 结 论

为解决航天器实时轨道确定的精度、实时性问题,在研究非线性预测滤波和平方根容积卡尔曼滤波算法的基础上,本文设计了一种 NPF-SRCKF 算法,将其运用于单测站、双测站跟踪仿真试验,仿真结果表明,所提出的算法实现简单,数值稳定性好,可以有效地减少实时轨道计算的随机误差和累计误差,提高实时轨道计算的精度。同时本文所设计的双测站跟踪算法,可以推广运用于多测站跟踪时的实时轨道计算。

参 考 文 献

- [1] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear

- estimation[J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3): 401 - 422.
- [2] Lee D J, Alfriend K T. Sigma point filtering for sequential orbit estimation and prediction [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2007, 44(2): 388 - 398.
- [3] Ienkaran A, Simon H. Cubature KALMAN filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1254 - 1269.
- [4] Crassidis J L, Markley F L. Predictive filtering for nonlinear systems [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1997, 20(3): 566 - 572.
- [5] Crassidis J L, Markley F L, Cheng Y. Survey of nonlinear attitude estimation methods [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(1): 12 - 28.
- [6] 张红梅, 邓正隆, 林玉荣. 一种基于模型误差预测的 UKF 方法 [J]. 航空学报, 2004, 25(6): 598 - 601. [Zhang Hongmei, Deng Zheng-long, Lin Yu-rong. UKF Method based on model error prediction [J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2004, 25(6): 598 - 601.]
- [7] Myung H, Bang H. Spacecraft parameter estimation by using predictive filter algorithm [C]. The 17th World Congress The International Federation of Automatic Control, Seoul, Korea, July 6 - 11, 2008.
- [8] 杨少东, 汶德胜, 马军勇. 基于预测滤波的卫星交会对接相对位姿确定方法 [J]. 宇航学报, 2011, 32(8): 1688 - 1693. [Yang Shao-dong, Wen De-sheng, Ma Jun-yong. Predictive filter-based relative attitude and position determination for rendezvous and docking between spacecrafts [J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(8): 1688 - 1693.]
- [9] Li X R, Jilkov V P. A survey of maneuvering target tracking. Part II: Ballistic target models [C]. SPIE Conference on Signal and Data Processing of Small Targets, San Diego, CA, USA, 2001.
- [10] Li X R, Jilkov V P. Survey of maneuvering target tracking. Part II: Motion models of ballistic and space targets [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(1): 96 - 119.
- [11] 刘林. 人造地球卫星轨道力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 13 - 17.
- [12] 刘勇, 徐世杰. 基于联邦 UKF 算法的月球探测器自主组合导航 [J]. 宇航学报, 2006, 27(3): 518 - 521. [Liu Yong, Xu Shi-jie. Autonomous integrated navigation for lunar probe based on federated UKF algorithm [J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(3): 518 - 521.]

作者简介:

李志军(1974 -),男,高级工程师,主要从事卫星轨道、姿态控制与测量工作。

通信地址:西安市 505 信箱 14 分箱(710043)

电话:(029)84762439

E-mail:lizhijunxsc@163.com

(编辑:曹亚君)