

边界约束对梁抗爆动力响应的影响(I) - 理论研究及分析

宋春明^{1,2}, 王明洋^{1,2}, 刘 斌¹

(1. 解放军理工大学 爆炸冲击防灾减灾国家重点实验室, 南京 210007; 2. 南京理工大学 机械工程学院, 南京 210094)

摘 要: 边界约束的差异会直接影响结构的抗爆动力响应及承载能力, 建立了复杂约束条件下抗爆梁在弹性阶段和塑性阶段的解析计算方法, 并计算分析了竖向弹性与阻尼约束、水平约束刚度、抗弯约束、荷载形式以及屈服弯矩动力强化系数对动力响应的影响。计算表明: 竖向弹性与阻尼约束会引起附加惯性力, 能够明显降低结构在弹塑性阶段的位移动力系数。水平约束和抗弯约束影响结构的动态响应主要在塑性阶段, 水平约束使梁截面在变形过程中产生横向压力, 抗弯约束直接限制刚体转动, 均有效降低了梁位移动力系数, 相对提高结构的承载力。相同约束刚度和荷载峰值条件下, 平台荷载下结构的位移动力函数均高于三角形荷载下位移动力函数, 说明动荷载的作用时间越长, 对结构承载越不利。另外考虑屈服弯矩的动力增强系数时, 可提高结构的抗爆潜力。

关键词: 振动理论; 弹塑性动力响应; 边界约束; 梁; 爆炸荷载

中图分类号: O327

文献标识码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.05.015

Effects of boundary restraints on dynamic responses of a beam under blast loadings(I) - theoretical study and analysis

SONG Chun-ming^{1,2}, WANG Ming-yang^{1,2}, LIU Bin¹

(1. State Key Laboratory of Disaster Prevention & Mitigation of Explosion & Impact,

PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China;

2. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: Dynamic responses and bearing capacity of members under blast loadings are directly affected by different boundary restraints. Both elastic and plastic analytical methods for a beam with general flexible supports and restraints under blast loadings were proposed, and the effects of vertical elastic and damping support, horizontal supporting stiffness, rotational constraint, loading characteristics and dynamically intensified coefficient of yielding bending moment on responses were analyzed. The results showed that the inertia forces owing to vertical elastic and damping support can decrease the dynamic coefficient of the beam deflection markedly in elastic-plastic stages; horizontal supports exerting a transverse pressure on beam cross-section in deformation process and rotational restraints confining rotation of rigid body directly both have great effects on the dynamic responses of the beam mainly in plastic stage to reduce the dynamic coefficient of the beam displacement and to increase the load-carrying capacity of the beam; under on the condition of the same constraints and peak load, the dynamic coefficient of the beam displacement with rectangular pulse loads is always higher than that with triangular pulse loads, it means that longer duration of pulse loads is negative to the load-bearing capacity of the beam; in addition, the potential anti-explosion ability of a beam can be improved by taking intensified coefficient of yielding bending moment into account.

Key words: vibration theory; elastic-plastic dynamic response; boundary constraint; beam; blast loadings

除了材料性能和结构形式等影响因素外, 边界约束的差异同样会直接影响到结构的抗爆动力响应及承载能力。例如钢筋混凝土结构的支座截面水平位移受

到阻碍时, 则会产生侧向推力, 使结构内部出现“面力”, 研究表明它极大地降低结构在塑性阶段的变形性并提高结构的极限承载力, 这种现象被称为“面力效应”或者“薄膜效应”^[1-2]。另外, 柔性支承(软土)上构件的挠度要比固定支承上相同构件的挠度值低 20% 甚至更多, 说明不考虑边界约束影响的计算理论已不再适用, 需建立新的计算方法。另一方面分析并主动

基金项目: 国家创新研究群体科学基金(51021001); 国家青年科学基金项目(51008305)

收稿日期: 2013-01-28 修改稿收到日期: 2012-04-11

第一作者 宋春明 男, 博士, 讲师, 1979 年生

调节支约束装置,在提高防护结构的抗爆能力和发展有效的防护技术方面都具有重要的应用价值^[3-4]。

在静力荷载作用下,对边界约束提高钢筋混凝土构件的极限承载力已有较好的理论及试验研究^[5-7],在动力荷载作用下,边界约束对结构动力响应的研究主要集中在数值方法和试验研究^[8-9],仍缺少直接描述边界效应的理论计算公式。

文中建立了复杂约束条件下抗爆梁在弹性阶段和塑性阶段的理论解析方法,并分析了竖向弹性与阻尼约束、水平约束和抗弯约束对梁动力响应的影响,表明可以有效利用柔性边界提高结构承载能力和降低变形性。

1 计算模型

图 1 为一细长直梁,两端具有柔性约束边界条件,梁受承受爆炸荷载 $p(x,t)$ 作用,表达式为 $p = p_0(1 - t/t_d)$,其中 t_d 为作用时间。两端柔性嵌固,综合考虑了各类约束情况,包括:竖向弹性支承系数 k ,竖向粘性支承系数 e ,水平方向弹性支撑刚度 c ,两端抗弯刚度系数为 g_k ,端部有集中质量为 m_0 。

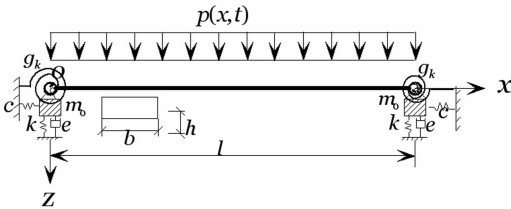


图 1 复杂约束条件下梁的计算模型

Fig. 1 The model of a beam with complex constraints

模型边界条件较多,需建立多个平衡方程,不利于得到结构动力响应的解析解,可将边界约束分为二部分,一是竖向弹性与阻尼约束情况,二是水平约束与抗弯约束情况。

1.1 弹性阶段

在弹性阶段,梁端处的主要位移发生在竖直方向,而水平位移和截面转动主要发生在塑性阶段,弹性阶段非常小,可忽略弹性阶段水平位移和截面转动对结构动力响应的影响。

仅竖向弹性和阻尼约束下,结构位移可表示为:

$$y(x,t) = u(t) + pF(x)T(t) \quad (1)$$

式中: $F(x)$ 为简支梁的振型, $T(t)$ 是位移动力函数,它的最大值即为动力系数。

将式(1)代入到梁的振动方程式,有:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = \omega^2 \left[1 - \frac{t}{t_d} - \frac{m_0}{p_0} \ddot{u}(t) \right] \quad (2)$$

式中: ω 为对应于振型函数 $F(x)$ 的振动频率,

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l F(x) dx}{m \int_0^l F^2(x) dx}$$

弹性支座上集中质量的运动方程

$$m_0 \ddot{u} + e \cdot \dot{u} + k \cdot u - \frac{1}{2} p_0 l T(t) = 0 \quad (3)$$

式(2)、(3)组成求解方程组并无量纲化,有:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{U} + r_1 \dot{U} + r_0 U - r_0 T &= 0 \\ \lambda_2 \dot{U} + \dot{T} + \omega^2 T &= \omega^2 f(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: $U(t)$ 为无量纲参数,满足 $u(t) = \frac{p_0 l}{2k} U(t)$,

$$r_1 = \frac{e}{m_0}, \quad r_0 = \frac{k}{m_0} = \omega_0^2,$$

$$\lambda_2 = \omega^2 ml / (2k)$$

其实 $U(t)$ 为支座位移的动力函数,因为 $U(t) = \frac{u(t)}{u_{st}}$,而 $u_{st} = p_0 l / 2k$ 为静载作用下的支座位移。

在三角形爆炸荷载作用下,当满足 $0 < t \leq t_d$,方程组(4)的通解可求得:

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= 1 + \frac{n_2}{n_1 \omega t_d} - \frac{t}{t_d} - n_1 \sum_{i=1,2} (D_i \cos \beta_i \omega t - E_i \sin \beta_i \omega t) e^{\alpha_i \omega t} \\ T(t) &= 1 - \frac{t}{t_d} - \sum_{i=1,2} (A_i \cos \beta_i \omega t - B_i \sin \beta_i \omega t) e^{\alpha_i \omega t} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: A_i, B_i, D_i, E_i 为系数,均可由初始条件解得。

1.2 塑性阶段

许多的结构静力试验已证明,在静载作用下,端部水平和抗弯约束对结构受力的影响主要是在塑性阶段,结构在爆炸等动荷载作用下,两类约束对结构的影响亦是如此^[10]。

进入塑性阶段的时刻 τ 可由下式求得。

$$M(l, \tau) = \frac{p_0 l^2}{8} T(\tau) = M_p T(\tau) = M_{y,d} \quad (6)$$

式中: $T(\tau)$ 为动力函数, $M_{y,d}$ 为动力屈服弯矩, M_p 为静载 p_0 作用下的跨中弯矩。

1.2.1 竖向弹性和阻尼约束

进入塑性阶段,假定跨中出现一个塑性铰,梁是由两块刚体通过塑性铰连结而成的体系,转角截面仍符合平截面假定。利用虚功原理,可推导出塑性阶段梁的运动方程组。

$$\left. \begin{aligned} m_s \ddot{u} + e \dot{u} + k u + 0.125 m l^2 \ddot{\varphi} &= 0.5 p_0 l (1 - t/t_d) \\ \frac{3}{l} \ddot{u} + \ddot{\varphi} &= \frac{24 M_p}{m l^3} \left(1 - \frac{t}{t_d} - k_M \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $m_s = 0.5 ml + m_0$, k_M 为屈服弯矩的动力系数, $k_M = M_{y,d} / M_p$ 。

塑性阶段开始时的初始条件为:

$$u = u_0, \quad \dot{u} = \dot{u}_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \quad (8)$$

式中:

$$u_0 = \frac{p_0 l}{2k} U(\tau), \quad \dot{u}_0 = \frac{p_0 l \omega}{2k} V(\tau) \quad (9)$$

其中,

$$V(\tau) = n_1 \sum_{i=1,2} [(\beta_i D_i + \alpha_i E_i) \sin \beta_i \omega \tau + (\beta_i E_i - \alpha_i D_i) \cos \beta_i \omega \tau] e^{\alpha_i \omega \tau} - \frac{1}{\omega t_d}$$

φ_0 、 $\dot{\varphi}_0$ 分别为塑性阶段开始时刻塑性铰的初始角度和初速度,分别由弹性阶段结束和塑性阶段开始时位移连续条件和动量相等条件确定。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_0 &= \frac{4}{l^2} \int_0^l \dot{y}(x, \tau) dx = \frac{p_0 l^3}{30B} r(\tau) \\ r(\tau) &= \sum_{i=1,2} [(\beta_i A_i + \alpha_i B_i) \sin \beta_i \omega \tau + (\beta_i B_i - \alpha_i A_i) \cos \beta_i \omega \tau] e^{\alpha_i \omega \tau} - \frac{1}{\omega t_d} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

可求得方程式组(7)的解为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= -\frac{3}{l} (\bar{C}_1 \sin \gamma_2 \omega \bar{t} + \bar{C}_2 \cos \gamma_2 \omega \bar{t}) e^{\gamma_1 \omega \bar{t}} + \frac{12M_p}{ml^3} \left(1 - \frac{\tau}{t_d} - k_M - \frac{\bar{t}}{3t_d} \right) \bar{t}^2 + B_3 \bar{t} + B_4 \\ u(t) &= (\bar{C}_1 \sin \gamma_2 \omega \bar{t} + \bar{C}_2 \cos \gamma_2 \omega \bar{t}) e^{\gamma_1 \omega \bar{t}} + \frac{p_0 l}{8k} \left(1 - \frac{\tau}{t_d} + 3k_M + \frac{e}{k\omega} - \frac{\bar{t}}{t_d} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: $\bar{t} = t - \tau$, 系数 B_i 、 \bar{C}_i 均为待定参数,利用运动的连续性条件可求得, γ_1 、 γ_2 是方程组(7)齐次方程的根。

1.2.2 水平和抗弯约束

梁形成塑性铰后,边界产生的推力作用会随着结构的变形发展而不断增加,首先假定该推力不会超过受压混凝土破坏时的极限压力值,即

$$p_{H, \max} < p_{Hn} \quad (12)$$

式中: $p_{H, \max}$ 、 p_{Hn} 分别为结构受到的极限推力和受压区混凝土达到极限压应变时的推力值。

计算时,竖直方向考虑惯性力,水平方面则忽略惯性力,只考虑水平推力,模型如图2所示。

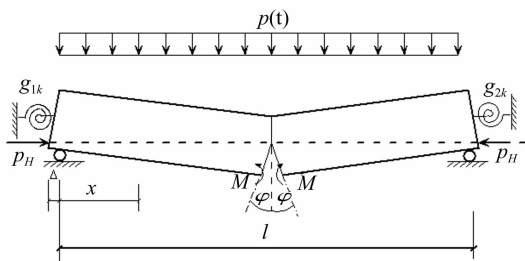


图2 水平弹性约束与抗弯约束梁的计算模型

Fig.2 The computation model of a beam with elastically horizontal and rotational constraints

此时位移表达式:

$$w = \varphi(t)x, \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (13)$$

利用虚位移原理,推得塑性阶段梁的运动方程,考虑竖向惯性力及水平推力 $p_H = 2c \cdot \varphi(t)z_c$ 。

$$\int_0^{l/2} p(t) \delta \varphi x dx - \int_0^{l/2} (m \ddot{\varphi} \cdot x) \delta \varphi \cdot x dx - M_{y,d} \delta \varphi - p_H z_c \delta \varphi - g_k \varphi \delta \varphi = 0$$

简化得:

$$\ddot{\varphi}(t) + (\omega_c^2 + \omega_g^2) \varphi = \frac{24M_p}{ml^3} \left(\delta - k_M - \frac{t}{t_d} \right) \quad (14)$$

式中: $\delta = 1 - \frac{\tau}{t_d}$, c 为水平刚度系数, z_c 为推力到受压区

合力点的距离, $\omega_c^2 = \frac{48cz_c^2}{ml^3}$, $\omega_g^2 = \frac{24g_k}{ml^3}$ 。

式(14)也可简化为

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_{gc}^2 \varphi = \frac{24M_p}{ml^3} \left(\delta - k_M - \frac{t}{t_d} \right) \quad (15)$$

式中: ω_{gc} 为塑性阶段梁在两类端部约束下的振动频率,

$$\omega_{gc} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_g^2}$$

式(15)的初始条件为:当塑性阶段开始时刻,忽略弹性阶段两端截面转角,则 $t = \tau$ 时有:

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \quad (16)$$

式中: $\dot{\varphi}_0$ 由弹性阶段终止和塑性阶段开始时的动量守恒条件来确定。

根据式(15),并结合初始条件(16),可求得

$$\varphi(t) = \frac{M_p}{2z_c c + g_k} \left[(\delta - \delta_M) (1 - \cos \omega_{gc} t) - \frac{t}{t_d} + \frac{\sin \omega_{gc} t}{\omega_{gc} t} \right] + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_{gc}} \sin \omega_{gc} t \quad (17)$$

对于施加在梁上并且沿梁均匀分布的平台荷载 p_0 情况,结构的动力响应可用三角形荷载作用的解变换得到,只需令 $t_d \rightarrow \infty$, 则 $p_0 \left(1 - \frac{t}{t_d} \right) \rightarrow p_0$, 式(17)变为

$$\varphi(t) = \frac{M_p}{2z_c c + g_k} \left[(\delta - \delta_M) (1 - \cos \omega_{gc} t) + \frac{\sin \omega_{gc} t}{\omega_{gc} t} \right] + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_{gc}} \sin \omega_{gc} t \quad (18)$$

2 计算结果及分析

假定一等效的钢筋混凝土梁承受三角形爆炸荷载,沿梁均匀分布,截面尺寸为 $b \times h = 0.2 \text{ m} \times 0.5 \text{ m}$, 跨度 $l = 5 \text{ m}$; 理想弹塑性材料,等效弹性模量 $E = 3 \times 10^4 \text{ MPa}$, 密度 2500 kg/m^3 , 屈服强度 $f_y = 17.2 \text{ MPa}$ 。

定义相对线刚度系数和相对抗弯刚度系数

$$\lambda = \frac{kl^3}{EI}, \quad \xi = \frac{cl}{EA}, \quad \eta = \frac{g_k}{EW} \quad (19)$$

式中： W 为梁截面抗弯模量。

虽然弹性阶段由于结构挠曲变形引起的水平推力和端截面转动有限，但弹性阶段的动力计算必不可少，目的是由连续性条件求得塑性阶段初始条件。

假定 Q_c 是梁的静力屈服荷载，当爆炸荷载峰值 $p_0 > 0.8Q_c$ 时，梁会进入塑性阶段，计算时取 $p_0 = 80 \text{ kN}$ ， $t_d = 0.05 \text{ s}$ ，并定义塑性位移动力函数为：

$$k_f = \frac{\varphi(t) \frac{l}{2}}{y_{st}} \quad (20)$$

式中： y_{st} 为静载 p_0 作用下梁的最大弹性挠度。弹性阶段内，则有 $k_f = T(t)$ 。

图 3 是爆炸荷载作用下不同竖向弹性约束刚度 $\lambda = 2, 5, 6, 10$ 时梁的中点位移时程曲线，该位移是指由梁弯曲变形引起的挠度，不包含支座引起的刚性位移。其中 $\lambda = 2$ 和 $\lambda = 5$ 时，结构未能进入塑性阶段，最大位移函数值分别为 0.2 和 0.3，且竖向刚度越小时，其位移越小。 $\lambda = 6$ 和 $\lambda = 10$ 时，结构均进入塑性阶段，与弹性阶段相比，位移较大，位移系数分别为 3.1 和 3.6，且相对刚度越小，其值越小。引起结构动力系数减小的原因主要有：一是支座竖向位移引起结构附加惯性力，消耗一部分能量；二是竖向弹性约束本身变形存储部分能量。竖向弹性约束可主动调节结构减小强动载下结构的动力响应，相对提高结构的抗力。提高的效果与弹性支承的刚度、载荷作用时间的长短以及振动衰减的程度相关^[3]。

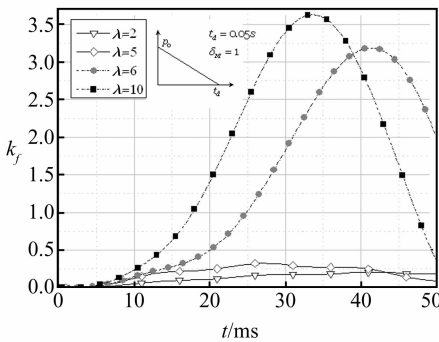


图 3 竖向弹性约束对位移的影响

Fig. 3 The effect of vertical stiffness on displacement

分别计算水平刚度系数 $\xi = 0$ (简支)、0.1、0.2、0.5 时梁的动力位移，如图 4 所示，为不同水平约束刚度梁的竖向跨中位移时程曲线。可以看出，在塑性阶段，水平约束刚度对结构位移的影响显著。当水平支撑刚度 $\xi = 0$ 时，即简支梁情况，塑性位移动力函数的峰值是 1.55，当支撑刚度分别增大到 $\xi = 0.1, 0.2$ 和 0.5 时，峰值相应减小到 1.29、1.1、0.9，说明随着支撑刚度增大，结构的位移动力函数会相应减小。简支情况，即两端点可水平自由运动时，位移最大。以上表明：水平支撑

约束的存在，降低了梁位移的变形和动力系数，结构抗力可相对程度地得到提高。还可看出，水平支撑刚度越小，动力函数到达峰值的时间就越迟，说明弹性支承刚度的减小会增大结构的振动周期。

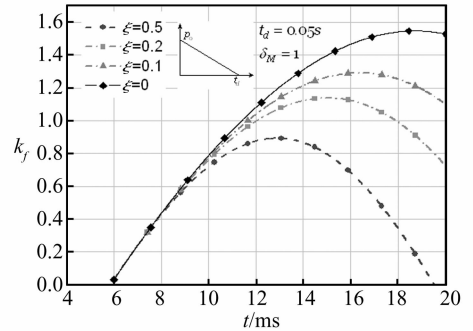


图 4 水平约束刚度对塑性位移动力函数的影响

Fig. 4 The effect of horizontal stiffness on dynamic coefficient of plastic displacement

对于梁承受均布平台荷载 p_0 情况，结构的动力响应可用三角形荷载作用的解令 $t_d \rightarrow \infty$ 变换得到，图 5 为平台荷载和三角形荷载计算结果的对比如。

两类荷载的峰值相等，平台荷载可认为作用时间非常长， $t_d \rightarrow \infty$ 。从图 6 中可看出，相同水平约束刚度条件下，平台荷载下结构的塑性位移动力函数均高于相同边界条件的三角形荷载下结构的位移动力函数，表明荷载的作用时间越长，对结构承载越不利。

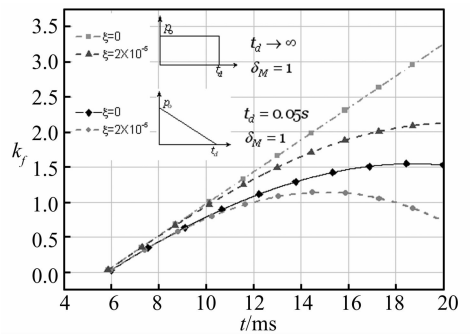


图 5 两类动荷载下水平约束刚度的影响比较

Fig. 5 Comparison the effect of horizontal stiffness on k_f under two dynamic loadings

图 6 为水平刚度系数 $\xi = 0.2$ 保持不变，不同屈服弯矩强化系数 δ_M 对梁塑性位移系数的影响曲线。 δ_M 是由于结构受瞬时动力荷载作用，快速加载对材料强度起增强作用，导致屈服弯矩与静载下屈服弯矩之比大于 1。当 $\delta_M = 1.0$ 时，即不考虑动力强化作用，从图 6 中可以看出，梁的动力函数值最大；当考虑加载速率对材料强度的影响时， $\delta_M > 1$ ，且随着 δ_M 的增大，结构的位移动力系数相应减小，说明考虑材料的动力增强作用可有效提高结构的抗爆潜力。

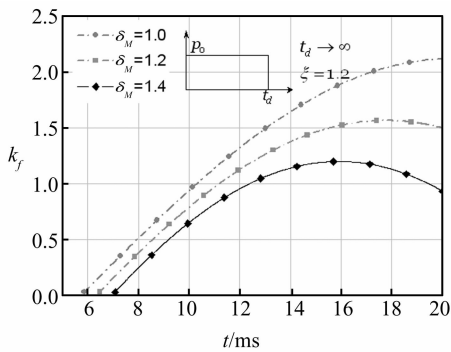


图6 屈服弯矩动力强化系数的影响

Fig. 6 The effect of dynamic coefficient of yielding bending moment on k_y

图7为不同抗弯约束刚度梁的跨中竖向位移时程曲线。在塑性阶段,抗弯约束直接限制刚体转动,对结构位移的影响显著。当抗弯刚度系数 $\eta=0$ 时,即两端简支情况,塑性位移动力函数的峰值是1.55,当抗弯刚度系数分别增大到 $\eta=0.1$ 、 0.2 和 0.5 时,峰值相应减小到1.0、0.81、0.58,分别减小35%、48%、63%,表明抗弯刚度的增加,中点的位移动力系数会相应减小。通过调整抗弯约束刚度,也可相对提高梁的抗爆能力。

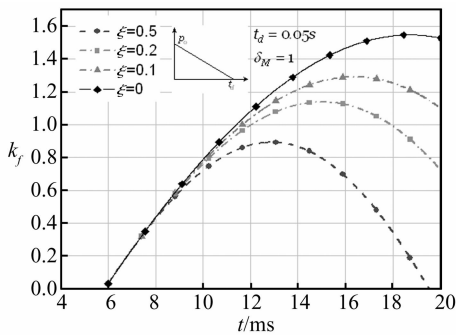


图7 抗弯约束刚度对位移函数的影响

Fig. 7 The effect of rotational restraint stiffness on dynamic coefficient of displacement

3 结论

(1) 文中建立了复杂约束条件下抗爆梁在弹性阶段和塑性阶段的理论解析方法,可对复杂约束条件下的梁式结构进行弹塑性动力响应分析。

(2) 竖向弹性约束可调节结构,引起附加惯性力,消耗更多爆炸能量,减小强动载下结构的动力响应,相对提高结构的抗力。

(3) 在塑性阶段,水平弹性约束和抗弯约束影响梁结构的动态响应显著。水平支撑约束的存在,使梁截面在变形过程中产生横向压力,降低位移动力系数;抗弯刚度的增加,同样会减小的结构位移动力系数,结构抗力可相对地得到提高,可通过调整水平约束或者抗弯刚度来提高梁式结构的抗爆承载潜力。

(4) 平台荷载作用下结构的塑性位移动力函数均高于同等条件下的三角形荷载下的位移动力函数,说明平台荷载对结构承载更不利。

(5) 当考虑加载速率对材料强度的影响时,即 $\delta_M > 1$,随着 δ_M 的增加,结构的位移动力系数相应减小,可有效提高结构的抗爆潜力。

参考文献

- [1] Krauthammer T, Hall W J. Modified analysis reinforced concrete beams[J]. ASCE Structural Division, 1982, 108(2): 457-475.
- [2] Das S K, Morley C T. Compressive membrane action in circular reinforced slabs [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2005, 47: 1629-1647.
- [3] 宋春明,王明洋,刘斌. 减震装置提高防护门抗力的理论分析[J]. 防灾减灾工程学报, 2011, (6): 700-703. SONG Chun-ming, WANG Ming-yang, Liu Bin. Theoretical analysis of shock-mitigating device to increase the resistibility of protective door [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2011, (6): 700-703.
- [4] 方秦,杜茂林. 爆炸荷载作用下弹性与阻尼支承梁的动力响应[J]. 力学与实践, 2006, 28(2): 53-56. FANG Qin, DU Mao-lin. Dynamic responses of an elastically supported beams with damping subjected to blast loads [J]. Mechanics in Engineering, 2006, 28(2): 53-56.
- [5] Christensen K P. The effect of the membrane stresses of the ultimate strength of interior panel in a reinforced concrete slab [J]. The Structural Engineer, 1963, 41(8): 261-265.
- [6] Lu Y, Gu X M. Probability analysis of RC member deformation limits for different performance levels and reliability of their deterministic calculations [J]. Structural Safety, 2004, 26: 367-389.
- [7] 陈力,方秦,郭志昆,等. 静载作用下钢筋混凝土梁板结构的面力效应(II) - 试验研究及主要影响参数讨论 [J]. 土木工程学报, 2011, (1): 36-41. CHEN Li, FANG Qin, GUO Zhi-kun. Membrane action on reinforced concrete beam-slab structures under static load (II) - test and discussion on main affecting parameters [J]. China Civil Engineering Journal, 2011, (1): 36-41.
- [8] 郭志昆. 考虑面力作用的浅埋结构抗力研究[D]. 南京: 解放军理工大学, 1995.
- [9] 宋春明,王明洋. 动支座对拱结构抗爆承载力的影响[J]. 爆炸与冲击, 2009, 29(3): 312-317. SONG Chun-ming, WANG Ming-yang. Effects of flexible supports on explosion resisting capacity of Arches [J]. Explosion and Shock Waves, 2009, 29(3): 312-317.
- [10] A. A. 格沃兹杰夫, K. B. 米哈依洛夫. 钢筋混凝土强度问题新论 [M]. 张祖光, 朱政奎, 陆继赞等译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1982.