

# Synthesis of Constant-Breadth Cam Mechanisms

Kuan-Lwun Shu, Long-Iong Wu

Department of Power Mechanical Engineering, National Tsing Hua University, Hsinchu  
Email: kaunlwun.shu@gmail.com, liwu@pme.nthu.edu.tw

Received: Feb. 13th, 2012; revised: Feb. 27th, 2012; accepted: Mar. 8th, 2012

**Abstract:** This paper presents an analytical approach for determining the profile of the constant-breadth cam. At any instant there are two contact points between the cam and the follower, and the line passing through the two contact points must be perpendicular to both faces of the follower. The follower motion program can be designed for  $180^\circ$  of cam rotation, but in order to satisfy the constant-breadth condition, the follower motion program of the remaining  $180^\circ$  depends entirely upon that of the previous  $180^\circ$ . The cam profile can be expressed analytically. An example is provided to illustrate the approach.

**Keywords:** Curve of Constant Width; Velocity Instant Center; Cam Profile; Radius of Curvature

## 等宽确动凸轮机构的设计

徐冠伦, 吴隆庸

动力机械工程学系, 国立清华大学, 新竹  
Email: kaunlwun.shu@gmail.com, liwu@pme.nthu.edu.tw

收稿日期: 2012年2月13日; 修回日期: 2012年2月27日; 录用日期: 2012年3月8日

**摘要:** 本文提供一种解析法用以设计等宽确动凸轮的轮廓。等宽确动凸轮机构的凸轮和从动件在任一时刻均有两个接触点, 并且这两个接触点的连线必会垂直于从动件的接触平面。因为从动件的接触面间的距离固定, 从动件前半周期和后半周期的运动规律有相依的函数关系, 因此在前半周期所选定的从动件之运动规律亦同时决定了从动件在后半周期的运动规律。等宽确动凸轮的轮廓可以用解析方程式表示。本文提供一实例加以说明。

**关键词:** 定幅曲线; 速度瞬心; 凸轮轮廓; 曲率半径

### 1. 引言

直动式等宽确动凸轮机构系属于形状封闭类型的确动凸轮机构。它不需回动弹簧而可直接藉由凸轮和从动件在任一时刻均有两个接触点的特性以达成确动传动之效果, 并且可设法施加适当预负荷<sup>[1]</sup>以提高机构的刚性。此外, 相较于一般力量封闭型的盘形凸轮机构, 直动式等宽确动凸轮机构不需承受因弹簧的锁合力对从动系统所造成的额外负载。因此, 凸轮与从动件之工作表面间的磨损较为轻微。

事实上, 直动式等宽确动凸轮之轮廓可视为定幅曲线<sup>[2]</sup>的应用实例。它的凸轮轮廓曲线必须随时与从

动件的两平行面保持相切, 且这两平行面间之距离固定。因为它的凸轮轮廓曲线有这样特殊的几何限制条件, 所以限缩这种凸轮机构所适用的场合。

直动式等宽确动凸轮机构的介绍常见于机构学相关的教科书中<sup>[3-6]</sup>, 但如何设计这种凸轮机构的说明均相当简略, 并且此方面之研究亦相对少见。现有的文献<sup>[7-9]</sup>主要探讨以圆弧凸轮驱动的等宽确动凸轮机构之从动件的运动规律。Ye 和 Smith<sup>[10]</sup>则是着重于分析双停留运动类型的等宽确动凸轮机构, 然而过程不甚简明。为精确且快速地完成直动式等宽确动凸轮机构的设计, 本文利用平面机构之速度瞬心的观念, 推

导出这种凸轮机构之凸轮轮廓的参数方程式，并分析其凸轮轮廓的几何特性以及其对从动件运动规律所衍生的特有限制条件。

## 2. 直动式等宽确动凸轮机构

图 1 所示为双停留直动式等宽确动凸轮机构。它的从动件具有两个平行的平板面，其平板面与从动件移动方向垂直且平板面间保持固定距离。直动式等宽确动凸轮机构的轮廓可分为四个部份：弧线  $P_0P_1$  的轮廓用以使从动件产生升程运动，其对应的凸轮旋转角为  $\beta_r$ ；弧线  $P_1P_2$  与弧线  $P_0P_3$  的轮廓为圆弧，用以使从动件停留，其对应的凸轮旋转角分别为  $\beta_h$  与  $\beta_l$ ；弧线  $P_2P_3$  的轮廓用以使从动件产生回程运动，其对应的凸轮旋转角为  $\beta_f$ 。其中，凸轮旋转角的下标  $r$ 、 $h$ 、 $f$  与  $l$  分别代表升程、高停留、回程与低停留。

当凸轮旋转角  $\theta = 0^\circ$ ，从动件位于行程最低处且速度为零，从动件两平板面分别与凸轮相切于圆弧轮廓的端点  $P_0$  与点  $P_2$ ，此时  $P_0O_2$  与  $P_2O_2$  分别为点  $P_0$  与点  $P_2$  的接触点法线，所以此时点  $P_0$  与点  $P_2$  连线必定通过凸轮旋转轴  $O_2$ 。同理，当凸轮旋转角  $\theta = \beta_r$ ，

从动件位于行程最高处且速度为零，从动件两平板面分别与凸轮轮廓相切于圆弧轮廓的端点  $P_1$  与点  $P_3$ ，此时点  $P_1$  与点  $P_3$  连线也必定通过凸轮旋转轴  $O_2$ 。因此，线段  $P_0O_2$  与线段  $P_1O_3$  相交于点  $O_2$ ，形成两组对顶角。因为对顶角相等，所以凸轮机构的升程角  $\beta_r$  必等于回程角  $\beta_f$ ，高停留凸轮旋转角  $\beta_h$  必等于低停留凸轮旋转角  $\beta_l$ ，且从动件之前半段行程与后半段行程所对应的凸轮旋转角各占完整周期的一半。此外，从动件从最低点上升至高停留处，从动件位移为  $h$ ，而上平板面与凸轮轮廓之接触点  $P_1$  到凸轮旋转轴  $O_2$  的距离为  $r_b + h$ ，而下平板面与凸轮轮廓之接触点  $P_3$  到凸轮旋转轴  $O_2$  的距离为  $r_b$ ，由此关系可得知平板面间距离  $d$  为：

$$d = 2r_b + h \quad (1)$$

直动式等宽确动凸轮机构具有机架(杆件 1)、凸轮(杆件 2)及从动件(杆件 3)等三个杆件，因此它有三个瞬心  $I_{12}$ 、 $I_{13}$  及  $I_{23}$ ，其中  $I_{12}$  为凸轮轴  $O_2$ ， $I_{13}$  为从动件作相对平移之垂直方向的无限远处，而  $I_{23}$  则在凸轮和从动件之接触点的公法线。由于等宽确动的特性，凸轮与从动件在任一时刻均有两个接触点  $A$  与  $B$  以使得从动件产生拘束运动，并且接触点  $A$  与  $B$  的两条公法线必定同时交于瞬心  $I_{23}$  之上<sup>[1]</sup>。若违反此两条公法线必须相交于  $I_{23}$  的条件，将导致瞬心  $I_{23}$  不唯一的情况发生。若发生瞬心  $I_{23}$  不唯一的情况，则将使得从动件的两个平板面间无法保持固定距离，因此也就无法产生拘束运动。所以，接触点  $A$  与  $B$  的两条公法线必定交于瞬心  $I_{23}$ ；也就是说，两个对应接触点  $A$  与  $B$  所连成的直线  $AB$  必定垂直于从动件的平板面，因此凸轮轮廓曲线满足定幅曲线之等宽特性。亦即，若接触点  $A$  与瞬心  $I_{23}$  已知，则直线  $AI_{23}$  和从动件下端平板面的交点就是对应接触点  $B$ 。综上所述，凸轮轮廓上之接触点  $A$  与对应接触点  $B$  的位置是相依的几何关系。因此，凸轮前半段和后半段的轮廓具有相依的几何关系。

此外，从动件于前半段行程  $S$  为凸轮旋转角  $\theta$  的函数，可表示为：

$$S = S(\theta) \quad (2)$$

由于从动件两平板面间保持固定距离，因此从动件后半段对应的行程可表示为：

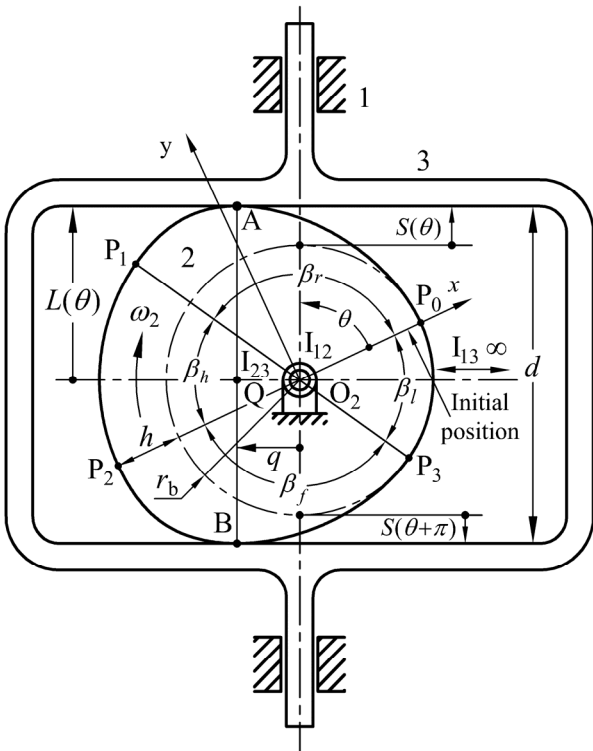


Figure 1. Constant-breadth cam-follower mechanisms and its instant centers  
图 1. 等宽确动凸轮机构及其瞬心

$$\begin{aligned} S(\theta+\pi) &= d-2r_b-S(\theta) \\ &= (2r_b+h)-2r_b-S(\theta) \\ &= h-S(\theta) \end{aligned} \quad (3)$$

亦即,若指定从动件前半段的行程,则它后半段行程亦将随之产生。并且,若已知从动件前半行程的位移函数,则将方程式(3)对凸轮旋转角 $\theta$ 分别微分一次、二次、以及三次后便可求得从动件于回程之速度、加速度与跃度之函数,即

$$V(\theta+\pi) = -S'(\theta) \quad (4)$$

$$A(\theta+\pi) = -S''(\theta) \quad (5)$$

$$J(\theta+\pi) = -S'''(\theta) \quad (6)$$

### 3. 等宽确动凸轮机构之凸轮轮廓

一个平面机构中的任意两个杆件在任一时刻皆有一共同点,且这个共同点在两个杆件上的线速度相同,这个共同点称为此二杆件的速度瞬心。利用速度瞬心的观念,并由选定的设计条件即可定出凸轮与从动件的瞬心位置,进而可导出凸轮轮廓之矢量参数方程式<sup>[12-14]</sup>。如图1所示,定一坐标系 $O_2-XY$ 固定于凸轮上,坐标原点 $O_2$ 与凸轮之旋转轴心重合, $\theta$ 为凸轮的角位移;等宽确动凸轮机构有机架(杆件1)、凸轮(杆件2)及从动件(杆件3)等三个杆件。因此,凸轮机构有三个瞬心 $I_{12}$ 、 $I_{13}$ 及 $I_{23}$ 。对直动式从动件而言,瞬心 $I_{12}$ 为凸轮固定轴枢,瞬心 $I_{13}$ 在从动件相对平移之垂直方向的无限远处,根据三心定理可知瞬心 $I_{12}$ 、 $I_{13}$ 与 $I_{23}$ 必定会落在同一直线上;又因为凸轮(杆件2)及从动件(杆件3)之瞬心必定落在接触点的公法线。因此,机架、凸轮及从动件之三个瞬心 $I_{12}$ 、 $I_{13}$ 及 $I_{23}$ 的位置分别如图1上所示。若 $Q$ 点代表瞬心 $I_{23}$ 且 $O_2Q=q$ ,则在凸轮上之 $Q$ 点的速率可表示为:

$$V_Q = q\omega_2 \quad (7)$$

其中, $\omega_2$ 为凸轮转速。因为从动件为平移运动,所以从动件上所有点的速度均相同;因此在从动件上之 $Q$ 点的速率可表示为:

$$V_Q = \frac{dL(\theta)}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dL(\theta)}{d\theta} \omega_2 \quad (8)$$

其中 $L(\theta)$ 为从动件位置函数:

$$L(\theta) = r_b + S(\theta) \quad (9)$$

其中 $r_b$ 为凸轮基圆半径, $S(\theta)$ 为从动件运动规律函数。根据瞬心的定义,杆件2(凸轮)与杆件3(从动件)在瞬心 $I_{23}$ 上的点具有相同的线速度,而 $Q$ 点为瞬心 $I_{23}$ ,比较上述公式后可得到

$$q(\theta) = \frac{dL(\theta)}{d\theta} = \frac{dS(\theta)}{d\theta} = V(\theta) \quad (10)$$

由上节内容可得知,凸轮与从动件间之两个对应接触点以及瞬心 $I_{23}$ 必定在同一直线上,且凸轮轮廓曲线满足定幅曲线之等宽特性;藉由这些特殊的几何条件,便可决定前半段行程与随之决定之后半段行程所对应的等宽确动凸轮轮廓。前半段的凸轮轮廓之矢量方程式可表示为:

$$O_2A = O_2Q + QA \quad (11)$$

其中

$$O_2Q = q(\theta) \begin{Bmatrix} \cos(\theta+90^\circ) \\ \sin(\theta+90^\circ) \end{Bmatrix} = q(\theta) \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$QA = [r_b + S(\theta)] \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (13)$$

凸轮前半段轮廓的坐标可表示为:

$$O_2A = \begin{Bmatrix} x_A(\theta) \\ y_A(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q(\theta)\sin\theta + [r_b + S(\theta)]\cos\theta \\ q(\theta)\cos\theta + [r_b + S(\theta)]\sin\theta \end{Bmatrix} \quad (14)$$

同理,凸轮后半段轮廓的矢量方程式可表示为:

$$O_2B = O_2Q + QB \quad (15)$$

其中

$$QB = [d - L(\theta)] \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = [d - r_b - S(\theta)] \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

凸轮后半段轮廓的坐标可表示为:

$$O_2B = \begin{Bmatrix} x_B(\theta) \\ y_B(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q(\theta)\sin\theta + [d - r_b - S(\theta)]\cos\theta \\ q(\theta)\cos\theta + [d - r_b - S(\theta)]\sin\theta \end{Bmatrix} \quad (17)$$

### 4. 等宽确动凸轮轮廓之曲率半径

当凸轮轮廓以参数方程式 $x = x(\theta)$ 、 $y = y(\theta)$ 表示,则其曲率半径可表示为<sup>[15]</sup>:

$$\rho(\theta) = \frac{\{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2\}^{1.5}}{x'(\theta)y''(\theta) - x''(\theta)y'(\theta)} \quad (18)$$

其中,  $x'$ 及  $x''$ 分别表示  $x$  对  $\theta$  的一次及二次微分,  $y'$ 及  $y''$ 分别表示  $y$  对  $\theta$  的一次及二次微分。将推导出的凸轮轮廓矢量参数方程式(14)代入方程式(18)中,即可计算等宽确动凸轮前半段轮廓的曲率半径:

$$\rho_A(\theta) = \frac{(x_A'^2 + y_A'^2)^{1.5}}{x_A' y_A'' - x_A'' y_A'} \quad (19)$$

其中,

$$x_A'(\theta) = -A(\theta)\sin\theta - L(\theta)\sin\theta \quad (20)$$

$$y_A'(\theta) = -A(\theta)\cos\theta - L(\theta)\cos\theta \quad (21)$$

$$x_A''(\theta) = -J(\theta)\sin\theta - A(\theta)\cos\theta - V(\theta)\sin\theta - L(\theta)\cos\theta \quad (22)$$

$$y_A''(\theta) = -J(\theta)\cos\theta - A(\theta)\sin\theta - V(\theta)\cos\theta - L(\theta)\sin\theta \quad (23)$$

其中,  $V(\theta)$ 、 $A(\theta)$ 、以及  $J(\theta)$ 分为  $S(\theta)$ 对  $\theta$  的一阶、二阶、以及三阶导函数。经过代数运算,等宽确动凸轮前半段轮廓的曲率半径  $\rho_A$  可以表示为:

$$\rho_A(\theta) = A(\theta) + L(\theta) \quad (24)$$

同理,等宽确动凸轮后半段轮廓的曲率半径  $\rho_B$  可表示为:

$$\rho_B(\theta) = \frac{(x_B'^2 + y_B'^2)^{1.5}}{x_B' y_B'' - x_B'' y_B'} \quad (25)$$

其中,

$$x_B'(\theta) = -A(\theta)\sin\theta - L(\theta)\sin\theta + d\sin\theta \quad (26)$$

$$y_B'(\theta) = -A(\theta)\cos\theta - L(\theta)\cos\theta + d\cos\theta \quad (27)$$

$$x_B''(\theta) = -J(\theta)\sin\theta - A(\theta)\cos\theta - V(\theta)\sin\theta - L(\theta)\cos\theta + d\cos\theta \quad (28)$$

$$y_B''(\theta) = -J(\theta)\cos\theta - A(\theta)\sin\theta - V(\theta)\cos\theta - L(\theta)\sin\theta + d\sin\theta \quad (29)$$

经过代数运算,等宽确动凸轮后半段轮廓的曲率半径  $\rho_B$  可以表示为:

$$\rho_B(\theta) = d - A(\theta) - L(\theta) \quad (30)$$

由(24)、(30)两式可发现

$$\rho_A(\theta) + \rho_B(\theta) = d \quad (31)$$

也就是:

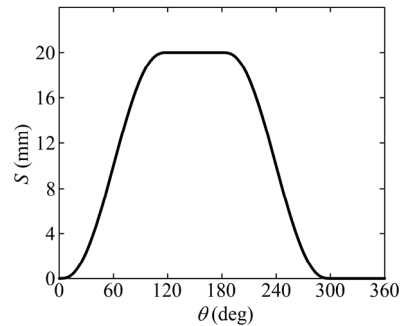
$$\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = d \quad (32)$$

由以上推导可知,对于直动式等宽确动凸轮而言,凸轮前半段轮廓与后半段轮廓的曲率半径间存在着  $\rho(\theta) + \rho(\theta + \pi) = d$  的关系。因此,计算等宽确动凸轮轮廓的曲率半径时,只要知道前半段轮廓的曲率半径,便可透过方程式(32)计算出对应后半段轮廓的曲率半径。

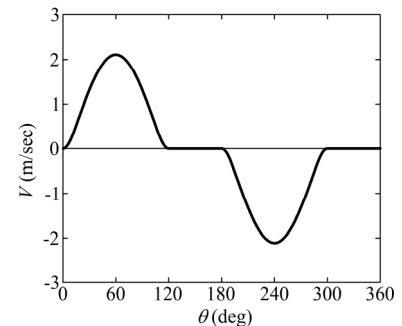
## 5. 范例

本设计方法的应用将以底下的范例进行说明。

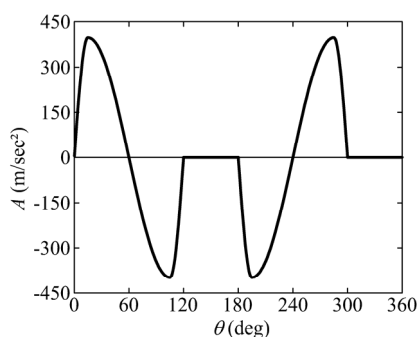
当凸轮的角位移为  $0^\circ \sim 120^\circ$  时,从动件以修正正弦运动曲线上升 20 mm; 当凸轮的角位移为  $120^\circ \sim 180^\circ$  时,从动件停留。当给定前半段的位移函数后,便可利用(3)式推导出后半段行程的位移方程式。图 2 为从动件之运动规律,其中后半段行程的速度、加速度与跃度函数可分别利用方程式(4)、(5)与(6)求得,不需另外推导。凸轮的基圆半径  $r_b$  为 40 mm,故平板面间距离  $d$  应设定为 100 mm。图 3 所示为利用(14)与(17)式所计算出的凸轮轮廓;由于前半段与后半段行程所对应的轮廓曲线可同时求得,故仅需计算方程式在  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  所对应的数值即可。图 4 所示为凸轮轮廓的曲率半径,其中前半行程之曲率半径  $\rho_A$  系利用(19)式计算而得,而后半行程的曲率半径  $\rho_B$  为利用平板面间距离  $d$  减去所对应的前半行程之曲率半径  $\rho_A$  而得。



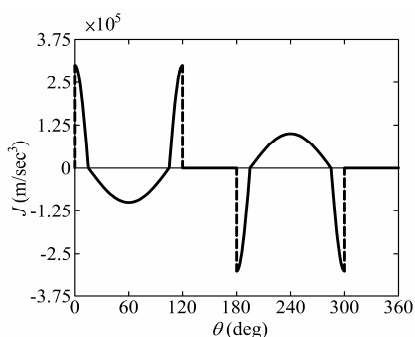
(a) 从动件之位移函数



(b) 从动件之速度函数



(c) 从动件之加速度函数



(d) 从动件之跃度函数

Figure 2. Motion of the follower  
图 2. 从动件之运动规律

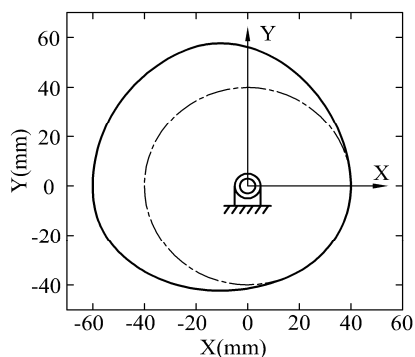


Figure 3. Profile of constant-breadth cam  
图 3. 等宽凸轮机构之轮廓

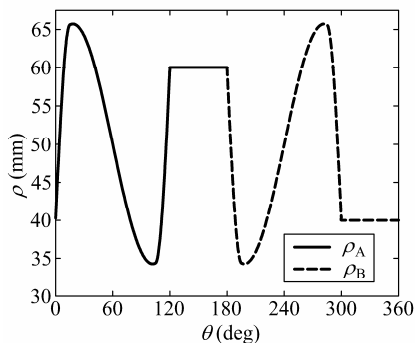


Figure 4. Radius of curvatures of constant-breadth cam  
图 4. 等宽凸轮轮廓之曲率半径

## 6. 结论

本文针对等宽确动凸轮机构所具有的特殊几何尺寸限制与运动规律进行说明，并利用速度瞬心的观念推导出等宽确动凸轮机构之凸轮轮廓的参数方程式。由于等宽确动凸轮机构的凸轮和从动件在任一时刻均有两个接触点，并且这两个对应接触点的连线恒垂直于从动件的接触平面，因此，等宽确动凸轮机构具有特殊的几何尺寸限制，其中包含：从动件两接触平面之间的距离减去基圆直径必等于从动件行程；从动件在高停留区间所对应之凸轮旋转角的幅度值必须等于在低停留区间所对应之凸轮旋转角的幅度值。而从动件前半周期和后半周期的运动规律同样具有特殊的函数关系：当选定凸轮旋转角在  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$  区间时的从动件之运动规律后，也就同时决定了从动件在凸轮旋转角为  $180^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  区间时的运动规律。综上所述，本文所提供的结果，可帮助设计者迅速与确实地完成等宽确动凸轮机构的设计。

## 参考文献 (References)

- [1] H. Nakazawa. Principle of precision engineering. Oxford: Oxford University Press, 1994: 96-98.
- [2] J. C. Fisher. Curves of constant width from a linear viewpoint. Mathematics Magazine, 1987, 6(3): 131-140.
- [3] F. Reuleaux. The kinematics of machinery: Outlines of a theory of machines. London: Macmillan, 1875, Reprinted 1963: 139-146.
- [4] P. W. Jenson. Cam design and manufacture, 2nd Edition. New York: Marcel Dekker, 1987: 134-137.
- [5] H. A. Rothbart. Cam design handbook. New York: Mac-Graw Hill, 2004: 477-479.
- [6] 石永刚, 徐振华. 凸轮机构设计[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1995: 161-167.
- [7] S. G. Dhande, N. Rajaram. Kinematic analysis of constant-breadth cam-follower mechanisms. Transactions of the ASME, Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1984, 106(3): 214-221.
- [8] 徐起贺, 王文深. 等宽凸轮机构的数学建模与动态仿真[J]. 机械传动, 2002, 2: 24-25, 75.
- [9] E. E. Zayas, S. Cardona and L. Jordi. Analysis and synthesis of the displacement function of the follower in constant-breadth cam mechanisms. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44: 1938-1949.
- [10] Z. Ye, M. R. Smith. Synthesis of constant-breadth cam mechanisms. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(9): 941-953.
- [11] K. Brunell. Constant diameter cams, their properties and design characteristics. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry, 1962: 161-164.
- [12] J. K. Davidson. Calculating cam profiles quickly. Machine Design, 1978, 50(28): 151-155.
- [13] 颜鸿森, 吴隆庸. 机构学[M]. 台北: 台湾东华书局股份有限公司, 2006: 268-285.
- [14] L. I. Wu. Calculating conjugate cam profile by vector equation.

## 等宽确动凸轮机构的设计

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C:  
Journal of Mechanical Engineering Science, 2003, 217(10):  
1117-1123.

[15] J. Reeve. Cams for industry. London: Mechanical Engineering  
Publications Limited, 1995: 90-98.