

严格反馈非线性系统预设性能 backstepping 控制器设计

胡云安¹, 耿宝亮¹, 赵永涛²

(1. 海军航空工程学院 控制工程系, 山东 烟台 264001; 2. 92060 部队 军械教研室, 辽宁 大连 116000)

摘要: 针对一类具有一般形式的严格反馈非线性系统, 提出一种基于预设性能的 backstepping 控制器设计方法. 所谓预设性能是指在保证跟踪误差收敛到一个预先设定的任意小的区域的同时, 保证收敛速度及超调量满足预先设定的条件. 首先引入性能函数的概念, 通过误差转化将原始的受限系统转换为等价的非受限系统; 然后基于 Lyapunov 理论进行 backstepping 控制器的设计, 并进行了稳定性分析; 最后通过仿真实验验证了所提出方法的正确性.

关键词: 预设性能; 性能函数; 误差转化; backstepping 控制

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Prescribed performance backstepping control of strict feedback nonlinear systems

HU Yun-an¹, GENG Bao-liang¹, ZHAO Yong-tao²

(1. Department of Control Engineering, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai 264001, China; 2. Ordnance Teaching and Research Room, 92060 Unit of PLA, Dalian 116000, China. Correspondent: GENG Bao-liang, E-mail: gbl404173223@163.com)

Abstract: For a class of strict feedback nonlinear systems with guaranteed prescribed performance, a backstepping controller is designed. The prescribed performance means that the tracking error should converge to an arbitrarily predefined small residual set, with convergence rate no less than a prespecified value, exhibiting a maximum overshoot less than a sufficiently small prespecified constant. A performance function and an output error transformation are introduced to transform the original 'constrained' system into an equivalent 'unconstrained' one. Based on the Lyapunov stability theory, a backstepping controller is designed and the system is stable according to the stability analysis. The simulation results show the correctness of proposed scheme.

Key words: prescribed performance; performance function; error transformation; backstepping control

0 引言

严格反馈非线性系统的控制问题是近年来的研究热点, 并取得了一系列的成果^[1]. Backstepping 控制技术是解决严格反馈非线性系统控制问题的有效手段, 文献[2-3]对其最近几年的发展情况进行了总结.

上述文献大多将注意力集中在系统稳态性能的研究上, 保证系统的跟踪误差收敛到一个有界的区域或渐近收敛到原点, 而对系统的瞬态性能(超调量和收敛速度)缺乏系统的分析和设计工具. Bechlioulis 等^[4]提出了预设性能的概念, 同时兼顾了系统的稳态和瞬态性能. 文献[4-5]针对一类反馈线性化系统设

计了预设性能自适应控制器; 文献[6-8]将预设性能的概念与输出反馈相结合, 提出了一种预设性能输出反馈控制器的设计方法; 文献[9-10]将预设性能的概念应用到机械臂力/位置跟踪问题中, 在保证跟踪误差收敛到一个预先设定的任意小的区域的同时, 保证收敛速度及超调量满足预先设定的条件. 据作者所知, 还没有相关文献对严格反馈非线性系统的预设性能控制问题进行系统研究.

本文针对具有一般形式的严格反馈非线性系统, 将预设性能的概念与 backstepping 控制技术相结合, 提出一种预设性能 backstepping 控制器的设计方法, 解决了严格反馈非线性系统的预设性能控制问题.

收稿日期: 2013-04-21; 修回日期: 2013-07-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174031).

作者简介: 胡云安(1966-), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性控制、智能系统等研究; 耿宝亮(1984-), 男, 博士生, 从事反演、自适应控制的研究.

1 系统描述与预备知识

1.1 系统描述

考虑如下具有一般形式的严格反馈非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t)) + g_1(x_1(t))x_2(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_i(t) = f_i(\bar{x}_i(t)) + g_i(\bar{x}_i(t))x_{i+1}(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x(t)) + g_n(x(t))u, \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $u \in R$ 和 $y \in R$ 分别为系统的状态量、输入量和输出量. 定义 $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i$, $f(\cdot)$ 和 $g(\cdot)$ 为已知连续函数且一阶可导, $g(\cdot)$ 是严格正或严格负的.

控制目标如下:

1) 给定期望轨迹 $y_r(t)$, 设计 backstepping 控制器 u , 以保证输出信号 $y(t)$ 跟踪期望信号 $y_r(t)$ 的同时闭环系统中的所有信号有界;

2) 输出误差 $e(t) = y(t) - y_r(t)$ 满足预先设定的瞬态和稳态性能.

在进行设计之前先进行如下假设:

假设 1 期望轨迹 $y_r(t)$ 及其高阶导数 $y_r^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 为已知连续有界函数.

假设 2 初始误差 $|e(0)| = |y(0) - y_r(0)|$ 有界且其上界为已知常数.

1.2 性能函数

定义 1 连续函数 $\rho : R_+ \rightarrow R_+$ 为性能函数, 满足:

1) $\rho(t)$ 是正的且严格递减;

2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = \rho_\infty > 0$.

很明显, 控制目标 2) 可以通过如下不等式来实现:

$$-\delta\rho(t) < e(t) < \rho(t), \quad e(0) > 0; \quad (2)$$

$$-\rho(t) < e(t) < \delta\rho(t), \quad e(0) < 0. \quad (3)$$

其中: $t \in [0, \infty)$, $\delta \in [0, 1]$.

这里性能函数取为

$$\rho(t) = (\rho_0 - \rho_\infty)e^{-lt} + \rho_\infty. \quad (4)$$

其中: $\rho_0, \rho_\infty, l > 0$ 为预先设定的常数, ρ_∞ 表示预先设定的稳态误差的上限, $\rho(t)$ 的衰减速度为跟踪误差 $e(t)$ 收敛速度的下界, 同时跟踪误差的最大超调不会大于 $\delta\rho_0$. 因此, 通过选择适当的性能函数 $\rho(t)$ 和常数 δ 便可对输出误差的稳态和瞬态性能进行限制. 上述过程可借助图 1 进行说明.

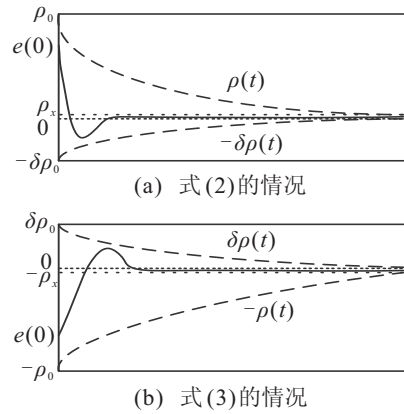


图 1 跟踪误差与性能函数的关系

1.3 误差转化

从式 (2) 和 (3) 可以看出, 原始的非线性模型中存在不等式约束, 直接处理的难度非常大. 为将其转化为等式约束, 定义

$$e(t) = \rho(t)S(\varepsilon). \quad (5)$$

其中: ε 为转化误差, $S(\varepsilon)$ 满足如下性质:

1) $S(\varepsilon)$ 光滑且严格递增.

$$2) \begin{cases} -\delta < S(\varepsilon) < 1, & e(0) > 0; \\ -1 < S(\varepsilon) < \delta, & e(0) < 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} S(\varepsilon) = -\delta, & e(0) > 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} S(\varepsilon) = 1, & \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} S(\varepsilon) = -1, & e(0) < 0. \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} S(\varepsilon) = \delta, & \end{cases}$$

由前面的定义可知, 当 $e(0) > 0$ 时, 有

$$-\delta < S(\varepsilon) < 1,$$

又 $\rho(t) > 0$, 因此

$$-\delta\rho(t) < \rho(t)S(\varepsilon) < \rho(t).$$

结合式 (5), 得到

$$-\delta\rho(t) < e(t) < \rho(t).$$

同理, 当 $e(0) < 0$ 时, 可以得到

$$-\rho(t) < e(t) < \delta\rho(t).$$

进一步, 通过 $S(\varepsilon)$ 的性质及 $\rho(t) \geq \rho_\infty > 0$ 进行如下逆变换:

$$\varepsilon = T \frac{e(t)}{\rho(t)},$$

其中 $T = S^{-1}$.

如果 $\varepsilon(t) \in \ell_\infty$, $t \in [0, \infty)$, 则式 (2) 和 (3) 成立. 更进一步, 根据性能函数 $\rho(t)$ 严格递减的性质, 跟踪误差最终将被限定在如下区域中:

$$E = \{e \in R : |e(t)| \leq \rho_\infty\}.$$

注 1 如果 $e(0) = 0$, 则 δ 不能设定为零, 以避免

$\varepsilon(0)$ 趋向于无穷.

注 2 根据假设 2, 选择 $\rho_0 > |e(0)|$.

2 预设性能 backstepping 控制器设计

取误差

$$e_i(t) = x_i(t) - y_r^{(i-1)}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

将原始模型转化为误差模型

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = f_1(E_1) + g_1(E_2)(e_2(t) + \dot{y}_r(t)) - \dot{y}_r(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_i(t) = f_i(E_i) + g_i(E_i)(e_{i+1}(t) + y_r^{(i)}(t)) - y_r^{(i)}(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) = f_n(E_n) + g_n(E_n)u - y_r^{(n)}(t), \end{cases}$$

其中 $E_i = [e_1(t) + y_r(t), \dots, e_i(t) + y_r^{(i-1)}(t)]^T \in R^i$, $i = 1, 2, \dots, n$. 进一步整理得

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \bar{f}_1(e_1) + \bar{g}_1(e_1)e_2(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_i(t) = \bar{f}_i(\bar{e}_i) + \bar{g}_i(\bar{e}_i)e_{i+1}(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) = \bar{f}_n(\bar{e}_n) + \bar{g}_n(\bar{e}_n)u. \end{cases} \quad (7)$$

其中: $\bar{e}_i = [e_1(t), \dots, e_i(t)]^T \in R^i$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\bar{f}_i(\bar{e}_i) = f_i(E_i) + g_i(E_i)y_r^{(i)}(t) - y_r^{(i)}(t)$; $\bar{g}_i(\bar{e}_i) = g_i(E_i)$.

对式 (7) 的第 1 个子系统进行误差转化, 得到

$$e_1(t) = \rho(t)S(\varepsilon). \quad (8)$$

将式 (8) 两边对时间求导, 得到

$$\dot{e}_1(t) = \dot{\rho}(t)S(\varepsilon) + \rho(t)\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon}(t); \quad (9)$$

将式 (9) 代入 (7), 得到

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}(t) = F(\varepsilon) + G(\varepsilon)e_2(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_i(t) = \bar{f}_i(\bar{e}_i) + \bar{g}_i(\bar{e}_i)e_{i+1}(t), \\ \vdots \\ \dot{e}_n(t) = \bar{f}_n(\bar{e}_n) + \bar{g}_n(\bar{e}_n)u. \end{cases} \quad (10)$$

其中

$$F(\varepsilon) = \frac{\bar{f}_1(e_1) - \dot{\rho}(t)S(\varepsilon)}{\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\rho(t)},$$

$$G(\varepsilon) = \frac{\bar{g}_1(e_1)}{\frac{\partial S}{\partial \varepsilon}\rho(t)}.$$

为表示方便, 将 $F(\varepsilon), G(\varepsilon), \bar{f}_i(\bar{e}_i), \bar{g}_i(\bar{e}_i), \bar{f}_n(\bar{e}_n), \bar{g}_n(\bar{e}_n)$ 简记为 $F, G, \bar{f}_i, \bar{g}_i, \bar{f}_n, \bar{g}_n$.

下面开始 backstepping 控制器的设计.

Step 1 将式 (10) 中的第 1 个子系统转化为

$$\dot{\varepsilon} = F + G\alpha_1 + Gz_2.$$

其中: $z_2 = e_2 - \alpha_1$ 为虚拟状态量, α_1 为虚拟控制量.

设计虚拟控制量为

$$\alpha_1 = \frac{1}{G}(-k_1\varepsilon - F),$$

其中 $k_1 > 0$ 为设计参数.

选取 Lyapunov 函数为

$$V_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2,$$

对其求导得

$$\dot{V}_1 = \varepsilon\dot{\varepsilon} = -k_1\varepsilon^2 + G\varepsilon z_2.$$

Step n - 1 将式 (10) 中的第 $n - 1$ 个子系统转化为

$$\dot{z}_{n-1} = \bar{f}_{n-1} + \bar{g}_{n-1}\alpha_{n-1} + \bar{g}_{n-1}z_n - \dot{\alpha}_{n-2}.$$

其中: $z_n = e_n - \alpha_{n-1}$ 为虚拟状态量, $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ 为虚拟控制量.

设计虚拟控制量为

$$\alpha_{n-1} = \frac{1}{\bar{g}_{n-1}}(-\bar{f}_{n-1} - \bar{g}_{n-2}z_{n-2} - k_{n-1}z_{n-1} + \dot{\alpha}_{n-2}),$$

其中 $k_{n-1} > 0$ 为设计参数.

选择 Lyapunov 函数

$$V_{n-1} = V_{n-2} + \frac{1}{2}z_{n-1}^2,$$

对其求导得

$$\dot{V}_{n-1} = -k_1\varepsilon^2 - k_2z_2^2 - \dots - z_{n-1}^2 + \bar{g}_{n-1}z_{n-1}z_n.$$

Step n 将式 (10) 的第 n 个子系统转化为

$$\dot{z}_n(t) = \bar{f}_n + \bar{g}_n u - \dot{\alpha}_{n-1}.$$

选取实际控制量为

$$u(t) = \frac{1}{\bar{g}_n}(-\bar{f}_n - \bar{g}_{n-1}z_{n-1} - k_n z_n + \dot{\alpha}_{n-1}), \quad (11)$$

其中 $k_n > 0$ 为设计参数.

选择 Lyapunov 函数

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2}z_n^2,$$

对其求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n = & -k_1\varepsilon^2 \dots - k_{n-1}z_{n-1}^2 + z_n(\bar{f}_n + \bar{g}_n u + \bar{g}_{n-1}z_{n-1}) = \\ & -k_1\varepsilon^2 \dots - k_{n-1}z_{n-1}^2 - k_n z_n^2. \end{aligned}$$

综上, 可以得到如下定理.

定理 1 对于误差模型 (7), 采用误差转化方程 (8) 和控制律 (11), 能够保证闭环系统中所有信号有界, 进而保证原系统 (1) 的跟踪误差满足预设的瞬态和稳态性能的要求.

3 仿真分析

仿真对象的数学模型描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - 2x_2 + u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

期望轨迹 $y_r(t) = \sin t + \sin(2t)$; 初始状态 $x_1(0) = 0.8, x_2(0) = 0$; 性能函数选择为 $\rho(t) = (1 - 10^{-3}) \times e^{-2t} + 10^{-3}$; 误差转化函数为 $S(\varepsilon) = \frac{e^\varepsilon - 0.1e^{-\varepsilon}}{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}$; 设计参数 $k_1 = 1, k_2 = 1$.

仿真结果如图 2~图 4 所示. 图 2 为实际输出跟踪期望轨迹的情况, 曲线表明, 实际输出能够在很短的时间内跟上期望信号并实现稳定跟踪, 跟踪效果好. 图 3 为跟踪误差随时间的变化情况, 其中点划线所包围的区域为跟踪误差的可行域, 曲线表明, 跟踪误差始终处于可行域内, 满足预设的瞬态和稳态性能的要求. 图 4 为输入信号随时间的变化情况, 曲线平滑有界, 满足控制要求.

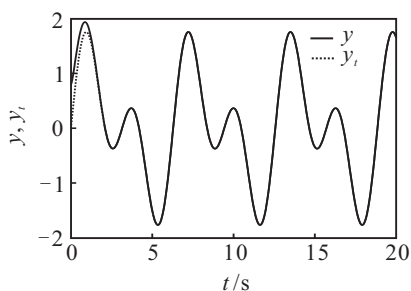


图 2 实际输出 y 跟踪期望轨迹 y_r 的情况

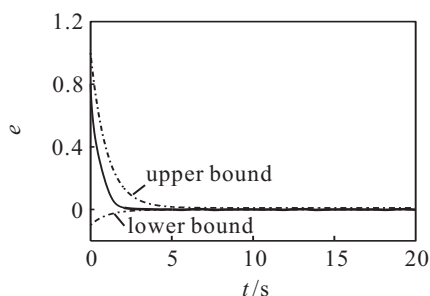


图 3 跟踪误差随时间的变化情况

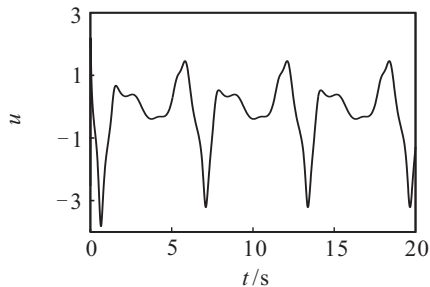


图 4 输入信号随时间的变化情况

4 结 论

本文针对具有一般形式的严格反馈非线性系统, 将性能函数的概念与 backstepping 控制技术相结合, 提出一种预设性能 backstepping 控制器的设计方法, 能够同时满足系统瞬态和稳态性能的要求. 另外, 在应用模型上进一步扩展, 将反馈线性化系统推广到一

般形式的严格反馈非线性系统, 为解决更为复杂系统的控制问题提供了一种新的思路.

参考文献(References)

- [1] 方勇纯, 卢桂章. 非线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009: 1-13.
(Fang Y C, Lu G Z. Nonlinear system theory[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 1-13.)
- [2] Hassan K K. Nonlinear systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007: 589-603.
- [3] 胡云安, 晋玉强, 李海燕. 非线性系统鲁棒自适应反演控制[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010: 1-9.
(Hu Y A, Jin Y Q, Li H Y. Robustness of adaptive backstepping control for nonlinear systems[M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010: 1-9.)
- [4] Charalamos P B, George A R. Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances[C]. The 16th Mediterranean Conf on Control and Automation. Ajaccio: IEEE, 2008: 1035-1040.
- [5] Charalamos P B, George A R. Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(9): 2090-2099.
- [6] Artemis K K, George A R. Prescribed performance output feedback control: An approximate passivation approach[C]. The 18th Mediterranean Conf on Control and Automation. Morocco: IEEE, 2010: 11-16.
- [7] Artemis K K, George A R. Prescribed performance output feedback/observer-free robust adaptive control of uncertain systems using neural networks[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics, 2011, 41(6): 1483-1494.
- [8] Artemis K K, George A R. Adaptive dynamic output feedback neural network control of uncertain MIMO nonlinear systems with prescribed performance[J]. IEEE Trans on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(1): 138-149.
- [9] Charalamos P B, Zoe D, George A R. Robot force/position tracking with guaranteed prescribed performance[C]. IEEE Int Conf on Robotics and Automation. Kobe: IEEE, 2009: 3688-3693.
- [10] Zoe D, Yiannis K, Olga Z. Prescribed performance control for robot joint trajectory tracking under parametric and model uncertainties[C]. Thessaloniki: IEEE, 2009: 1313-1318.

(责任编辑: 孙艺红)