

文章编号: 1000-4750(2014)07-0106-06

空间桁架梁固有振动的能量变分解析解

张文福, 杜娟, 刘迎春, 计静, 任亚文

(黑龙江省防灾减灾及防护工程重点实验室, 东北石油大学土木建筑工程学院, 大庆 163318)

摘要: 目前人们对空间桁架梁的振动特性研究得较少, 该文首先采用 Timoshenko 梁的连续化模型来模拟空间桁架梁, 推导得到了空间桁架梁的等代抗弯刚度和等代抗剪刚度, 并采用能量变分法对空间桁架梁的固有振动进行分析, 给出空间桁架梁的竖向振动频率和振型的解析解。然后采用有限元软件 ANSYS 对几种不同算例进行模拟, 通过模态分析得到空间桁架梁的频率与振型。将能量变分法求得的频率解析解与有限元分析求得的频率数值解进行对比, 结果基本上是一致的, 将两种方法得到的振型对比, 结果吻合良好。该文所提出的能量变分解析解可供空间桁架梁的工程设计参考。

关键词: 空间桁架梁; 固有振动; 能量变分法; Timoshenko 梁; 剪切变形

中图分类号: TU311 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0064

THE ENERGY VARIATION ANALYTICAL SOLUTION FOR THE NATURE VIBRATION OF THE SPACE TRUSS GIRDER

ZHANG Wen-fu, DU Juan, LIU Ying-chun, JI Jing, REN Ya-wen

(Heilongjiang Key Laboratory of Disaster Prevention, Mitigation and Protection Engineering,

College of Civil and Architecture Engineering, Northeast Petroleum University School, Daqing 163318, China)

Abstract: The vibration characteristics of the space truss girder has been less studied. The continuous Timoshenko beam model is adopted to simulate the space truss girder and the equivalent bending stiffness and equivalent shear stiffness are obtained. The nature vibration of the space truss beam is analyzed based on the energy variational method, and the analytical solutions of vertical vibration frequency and the vibration mode of the space truss beam can be derived. Then the finite element software ANSYS is adopted to simulate different cases, and the frequency and the vibration mode of the space truss beam can be obtained. The frequency obtained by the energy variational method is compared with that obtained by the finite element analysis, and consistent results are found. The vibration modes obtained by those two methods are compared, and good agreement is found. The analytical solutions of energy variational method can be used as a reference for engineering design of the space truss beam.

Key words: space truss beam; nature vibration; energy variational method; Timoshenko beam; shear deformation

在建筑应用上, 空间桁架主要包括空间桁架梁(柱、拱)和平板网架这两种结构, 其中空间桁架梁

相对于实腹梁结构而言, 具有自重轻、造型美观、可实现的跨度大、受力性能合理等优点, 为建筑师

收稿日期: 2013-01-21; 修改日期: 2013-10-19

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51178087); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金项目(新教师类 20122322120004); 黑龙江省自然科学基金面上项目(E201336); 黑龙江省教育厅科学技术研究面上项目(12511022)

通讯作者: 张文福(1965-), 男, 山东人, 教授, 博士, 博导, 主要从事结构工程、抗风与抗震方面的研究工作(E-mail: zhang_wenfu@126.com).

作者简介: 杜娟(1988-), 女, 黑龙江人, 硕士生, 主要从事钢结构与组合结构研究(E-mail: 18645991006@163.com);

刘迎春(1980-), 女, 黑龙江人, 副教授, 硕士, 主要从事结构工程及防灾减灾工程研究(E-mail: chunliuying@163.com);

计静(1977-), 男, 黑龙江人, 教授, 博士, 主要从事结构工程抗震方面的研究工作(E-mail: jijing1977@163.com);

任亚文(1986-), 男, 山西人, 硕士生, 主要从事防灾减灾工程及防护工程研究(E-mail: renyawen86@126.com).

所喜爱的结构形式之一，在大跨度建筑的屋盖结构中得到广泛的应用。目前，人们对这种结构的整体稳定性和动力特性研究较少。在平板网架结构方面，张文福等^[1-2]曾基于分解刚度的思想提出了网架结构固有频率的计算方法，采用考虑剪切变形的具有三个广义位移的平板弯曲理论进行固有振动分析，给出了三向网架结构固有振动能量变分解析解。本文将采用能量变分法^[3]来分析空间桁架梁的固有振动，首先给出空间桁架梁的等代抗弯刚度和抗剪刚度，然后推导得到了空间桁架梁的各阶频率解析解，该解析解考虑了剪切变形的影响，可以为这种桁架梁结构动力分析提供参考依据，最后采用 ANSYS 建立几种算例的模型，将两种方法求得的结果进行对比分析。

1 基本假定与等代刚度

当采用四角锥构成的空间桁架梁时，为简化计算可进行连续化处理。建立此类空间桁架梁的连续化模型时，采用了如下的假设：

- 1) 材料符合胡克定律；
- 2) 沿着梁长度方向的四角锥数目足够稠密，数目一般应大于等于 5；
- 3) 弯矩和轴力主要由上下弦杆承担，而剪力由斜腹杆承受；
- 4) 梁以竖向振动为主，且振动是微幅的；
- 5) 梁的左支座为固定铰支座，右支座为滑动铰支座。

因为空间桁架梁的剪切变形对刚度的影响较大，为了更好地模拟空间桁架梁的动力特性，本文采用了双变量的 Timoshenko 梁^[4-5]模型，即假设垂直于轴线的直线段变形后仍为直线，但不再垂直于轴线，也就是在 xz 平面内转了一个角度 θ ，但与 Euler 梁理论不同， $\theta \neq \partial w / \partial x$ ，即产生了一个剪切角 $\gamma = \partial w / \partial x - \theta$ ，见图 1。根据上述理论，便可以

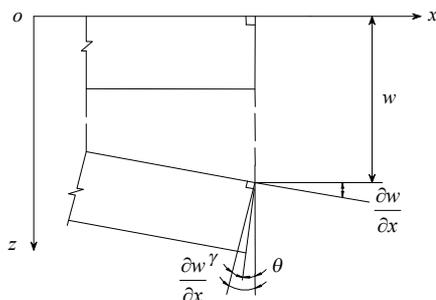


图 1 剪切角示意图
Fig.1 The shear angle diagram

将此类空间桁架梁连续化为具有两个广义位移未知量 w 、 θ 的 Timoshenko 梁模型，其中 w 为竖向位移， θ 为截面转角。

对于图 2 所示的桁架梁，在建立其控制方程之前，首先要确定桁架梁的等代刚度，即桁架梁的等代抗弯刚度和等代抗剪刚度^[6-7]。

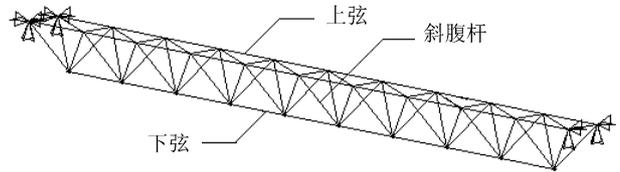


图 2 空间桁架梁结构

Fig.2 Space truss beam structure

1) 等代抗弯刚度的确定

在四角锥桁架中任取一单元锥体，如图 3(a)所示，假设等代实体梁单元的抗弯刚度为 EI_{eq} ，如图 3(b)所示，在一对弯矩 M 单独作用下，等代实体梁单元应变能为：

$$U_{beam} = \frac{M^2 s}{2EI_{eq}} \quad (1)$$

根据假设 3) 中的弯矩主要由上下弦杆承担，可得桁架梁单元应变能为：

$$U_{truss} = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i} = \frac{M^2 s}{2Eh^2} \left(\frac{1}{2A_a} + \frac{1}{A_b} \right) \quad (2)$$

式中： E 为材料的弹性模量； A_a 、 A_b 分别为上下弦杆的截面面积； h 、 s 为空间桁架梁的高度及节间距离。

根据等代实体梁单元应变能与空间桁架梁单元应变能相等的原则，可得桁架梁单元的等代抗弯刚度为：

$$EI_{eq} = E \frac{2A_a A_b}{2A_a + A_b} h^2 \quad (3)$$

2) 等代抗剪刚度的确定

如图 3(c)所示，假设等代实体梁单元的抗剪刚度为 GA_{eq} ，在一对剪力 V 单独作用下，等代实体梁单元应变能为：

$$U_{beam} = \frac{V^2 s}{2GA_{eq}} \quad (4)$$

根据假设 3) 中的剪力由斜腹杆承受，可得桁架梁单元应变能为：

$$U_{truss} = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2EA_i} =$$

$$4 \times \frac{(V/2 \sin b)^2 (\sqrt{b^2 + s^2} / 2 \cos b)}{2EA_d} \quad (5)$$

式中: b 为空间桁架梁的宽度; A_d 为腹杆截面面积; β 为斜腹杆与上弦平面之间的夹角, 其中 $\sin\beta$ 、 $\cos\beta$ 由图 3 的几何关系求得:

$$\left. \begin{aligned} \sin b &= \frac{2h}{\sqrt{b^2 + s^2 + 4h^2}} \\ \cos b &= \frac{\sqrt{b^2 + s^2}}{\sqrt{b^2 + s^2 + 4h^2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

根据等代实体梁单元应变能与空间桁架梁单元应变能相等的原则, 可得桁架梁单元的等代抗剪刚度为:

$$GA_{eq} = \frac{2sEA_d \sin^2 b \cos b}{\sqrt{b^2 + s^2}} \quad (7)$$

利用文献[3]中的公式, 空间桁架梁的物理方程可写为:

$$M = -EI \frac{dq}{dx}, \quad Q = GA \left(\frac{dw}{dx} - q \right) \quad (8)$$

式中, w 、 θ 分别为 Timoshenko 梁模型中的竖向位移和转角, 是两个待定的广义位移。

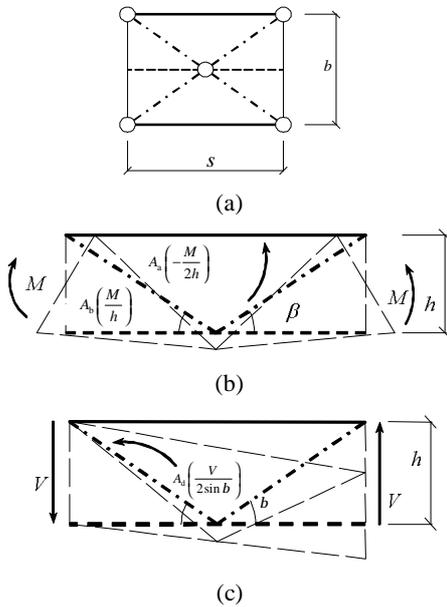


图 3 四角锥单元(括号内为内力值)

Fig.3 Pyramidic unit (for internal forces within brackets)

2 固有振动分析

2.1 采用能量变分法分析空间桁架的固有振动

这里我们设空间桁架梁的动位移为:

$$\left. \begin{aligned} w(x,t) &= W(x) \sin(\omega t + j) \\ q(x,t) &= Q(x) \sin(\omega t + j) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中, $W(x)$ 、 $Q(x)$ 为振型函数。在竖向微幅振动(假设 4)情况下, 与此双变量振型函数相对应的 Timoshenko 梁的总势能可写为^[3]:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 dx + \\ &\quad \frac{GA}{2} \int_0^l \left(\frac{dW}{dx} - Q \right)^2 dx - \frac{\bar{m}W^2}{2} \int_0^l W^2 dx \end{aligned} \quad (10)$$

其中, \bar{m} 为等代实体梁单位长度的质量。

根据上述能量泛函取驻值的条件^[6], 利用变分法可以推出空间桁架梁应该满足的 2 个平衡方程和 8 个边界条件, 进而将空间桁架梁固有振动问题转化为微分方程的边值问题(略)。本文将采用能量变分法来求解此类问题。

首先根据简支梁的边界条件(假设 5)), 将双变量振型函数取为如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} W(x) &= \sum_{m=1}^p A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \\ Q(x) &= \sum_{m=1}^p B_m \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)积分后可求出 Π , 根据势能驻值^[8]原理, $\frac{\partial \Pi}{\partial A_m} = 0$, 由此可得:

$$A_m \left[\frac{GA\pi^2}{2l} (m^2) - \bar{m}W^2 \left(\frac{l}{2} \right) \right] - B_m GA \left(\frac{m\pi}{2} \right) = 0, \quad m=1, 2, \mathbf{L}, p \quad (12)$$

再由 $\frac{\partial \Pi}{\partial B_m} = 0$, 可得:

$$B_m \left[\frac{EI\pi^2}{2l} (m^2) + \frac{GA}{2} \right] - A_m GA \left(\frac{m\pi}{2} \right) = 0, \quad m=1, 2, \mathbf{L}, p \quad (13)$$

由式(13)得到:

$$B_m = A_m \frac{(m\pi)GA}{EI\pi^2 m^2 + GA} \quad (14)$$

将式(14)代入式(12)从而得到如下的频率方程:

$$A_m \left[\frac{GA\pi^2}{l^2} (m^2) - \bar{m}W^2 - \frac{(GA)^2 (m\pi)^2}{EI\pi^2 m^2 + GA} \right] = 0 \quad (15)$$

其中, $m=1, 2, 3, \mathbf{L}, p$ 。因为振动中 A_m 不能为零, 必有:

$$\bar{C}_m - \bar{m}W^2 = 0 \quad (16)$$

式中: $\bar{C}_m = \frac{GA\pi^2}{l^2} m^2 - \frac{(GA)^2 (m\pi)^2}{EI\pi^2 (m^2) + GA}$ 。

解式(16)可得振动频率:

$$w_m^2 = \frac{\bar{C}_m}{\bar{m}}, \quad m=1,2,3,L,p \quad (17)$$

式中: m 为振动的半波数, 与阵型阶次相对应, 比如 $m=1$ 对应第一阶振型, $m=2$ 对应第二阶振型。

2.2 采用 ANSYS 对空间桁架梁进行固有振动分析

本文结合工程实际, 选取 6 种典型的四角锥桁架梁^[9]进行分析, 桁架梁的线质量为 869.39kg/m, 其基本参数见表 1~表 3。采用 ANSYS^[10-12]对其固有振动进行分析时, 单元类型采用 LINK8 单元, LINK8 单元为三维单元, 可以承受单向的拉伸或者压缩, 每个节点具有三个自由度; 采用质量单元 MASS21 模拟桁架的质量特性, MASS21 单元为一个具有六个自由度的质量单元, 本文中将质量施加在桁架上弦每个节点上, 其中中间节点上施加的质量为线质量与节间间距乘积的一半, 而边节点上则为线质量与节间间距乘积的四分之一。空间桁架梁

的支座处设为上弦左端约束三个方向的自由度, 右端只约束竖向和侧向的自由度。利用 ANSYS 软件中的模态分析中的 Block Lanczos 的方法提取模态, 并扩展模态以得到空间桁架梁的振型与频率。表 4 为 ANSYS 计算 6 种桁架梁所得到的前四阶频率, 表中还列出了能量变分法所得的频率解析解。根据假设的振型函数可以绘制出桁架梁的振型图, 将其与利用有限元结果绘制的振型图对比, 吻合良好。图 4~图 7 给出了根据 ANSYS 和能量变分法的结果绘制的桁架梁 L1 的前四阶振型。

表 1 钢管截面面积

Table 1 The section area of steel pipe

钢管尺寸/(mm×mm)	面积/cm ²	钢管尺寸/(mm×mm)	面积/cm ²
60×3.5	6.21	168×4	20.61
76×4	9.05	180×6	32.8
89×4	10.7	219×6	40.1
114×4	13.82	219×7	46.6
140×4	17.09	273×8	66.6

表 2 空间桁架梁的基本参数

Table 2 The space truss girder basic parameters

桁架梁	桁架跨度	桁架高度	网格长度	网格宽度	上弦杆/	下弦杆/	腹杆/	上弦平面直腹杆/	上弦平面斜腹杆/
	L/m	h/m	s/m	b/m	(mm×mm)	(mm×mm)	(mm×mm)	(mm×mm)	(mm×mm)
L1	30	2	3	1.8	168×4	180×6	89×4	60×3.5	76×4
L2	30	2	2.5	1.4	168×4	180×6	76×4	60×3.5	60×3.5
L3	48	3.2	4	2.8	180×6	219×7	140×4	60×3.5	114×4
L4	48	3.2	3.4	2.4	180×6	219×7	114×4	60×3.5	89×4
L5	66	4.5	5.5	4.5	219×6	273×8	168×4	89×4	140×4
L6	66	4.5	4.7	2.7	219×6	273×8	168×4	60×3.5	114×4

表 3 空间桁架梁的刚度

Table 3 Stiffness of space truss girder

桁架梁	抗弯刚度 EI/(N×mm ²)	抗剪刚度 GA/N	sinβ	cosβ
L1	1.505×10 ⁹	1.412×10 ⁸	0.754	0.657
L2	1.505×10 ⁹	1.250×10 ⁸	0.813	0.582
L3	5.747×10 ⁹	2.212×10 ⁸	0.795	0.607
L4	5.747×10 ⁹	1.780×10 ⁸	0.838	0.545
L5	1.518×10 ¹⁰	2.503×10 ⁸	0.784	0.620
L6	1.518×10 ¹⁰	2.789×10 ⁸	0.857	0.516

表 4 能量变分法求得的频率与 ANSYS 求得的频率对比

Table 4 Comparison of energy variational method with ANSYS for frequency

桁架梁	一阶频率/(1/s)		二阶频率/(1/s)		三阶频率/(1/s)		四阶频率/(1/s)	
	能量变分法	有限元法	能量变分法	有限元法	能量变分法	有限元法	能量变分法	有限元法
L1	2.173	2.164	7.582	7.212	14.427	14.020	21.686	19.965
L2	2.158	2.145	7.430	7.211	13.971	13.804	20.826	19.794
L3	1.663	1.654	5.832	5.595	11.150	10.878	16.818	15.660
L4	1.643	1.640	5.626	5.420	10.530	10.457	15.648	15.034
L5	1.413	1.405	4.842	4.634	9.068	8.847	13.481	12.576
L6	1.422	1.413	4.932	4.762	9.336	9.263	13.982	13.396

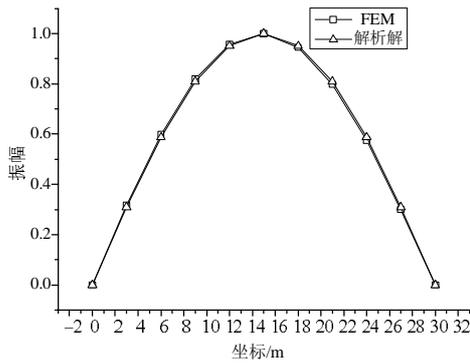


图4 桁架梁 L1 的一阶振型

Fig.4 The first vibration mode of truss beam L1

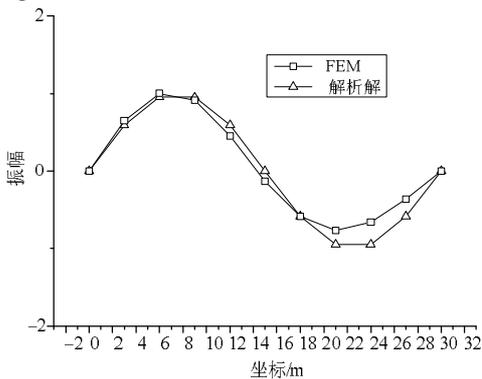


图5 桁架梁 L1 的二阶振型

Fig.5 The second vibration mode of truss beam L1

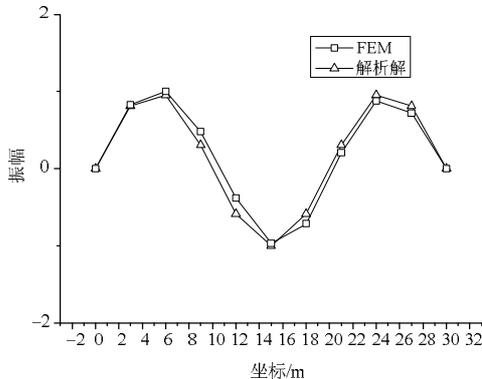


图6 桁架梁 L1 的三阶振型

Fig.6 The third vibration mode of truss beam L1

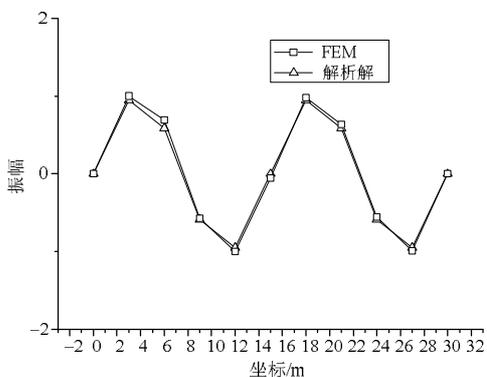


图7 桁架梁 L1 的四阶振型

Fig.7 The fourth vibration mode of truss beam L1

3 结论

研究表明,本文所建立的连续化模型是合理的。采用能量变分法对空间桁架梁进行固有振动分析求得的频率解析解与有限元分析得到的频率结果基本一致, ANSYS 提取出的振型与能量变分法给出的振型函数也吻合良好,这说明能量变分法可以用来分析空间桁架梁和柱的动力特性。

本文所给出的频率和振型的能量变分解析解具有简洁、实用、精度高的特点,可供空间桁架梁结构的抗风与抗震设计参考。

参考文献:

- [1] 张文福, 刘文洋, 赵文艳, 姚芳. 三向类网架结构弯曲和振动分析的分解刚度法[J]. 工程力学, 2006, 23(4): 130—133.
Zhang Wenfu, Liu Wenyang, Zhao Wenyan, Yao Fang. Split rigidity method for bending and vibration analysis of three-way plate-like space truss [J]. Engineering Mechanics, 2006, 23(4): 130—133. (in Chinese)
- [2] 张文福, 刘文洋, 巨秀丽, 周利剑. 网架结构固有振动分析的分解刚度法[J]. 工程力学, 2007, 24(3): 138—141.
Zhang Wenfu, Liu Wenyang, Ju Xiuli, Zhou Lijian. Split rigidity method for nature vibration analysis of grid structures [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(3): 138—141. (in Chinese)
- [3] 张文福. 空间结构[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 182—184.
Zhang Wenfu. Spatial structure [M]. Beijing: The Science Press, 2005: 182—184. (in Chinese)
- [4] Ji Yaoshen, Jen-Kuang Huang, L W Taylor, Jr. Timoshenko beam modeling for parameter estimation of NASA mini-mast truss [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1993, 115(19): 21—24.
- [5] 铁摩辛柯, 盖尔. 材料力学[M]. 北京: 科学出版社, 1978: 256—264.
Timoshenko S, Gere J. Mechanics of materials [M]. Beijing: The Science Press, 1978: 256—264. (in Chinese)
- [6] 张文福, 赵文艳. 网架结构的数值模拟分析与设计[M]. 哈尔滨: 哈尔滨地图出版社, 2003: 12—16.
Zhang Wenfu, Zhao Wenyan. Numerical Simulation Analysis and Design of the grid structure [M]. Harbin: Harbin Map Press, 2003: 12—16. (in Chinese)
- [7] 张文福, 张百龙. 网架结构设计[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1994: 49—50.
Zhang Wenfu, Zhang Bailong. Design of double-layer space grids [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1994: 49—50. (in Chinese)
- [8] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科

- 学出版社, 1981: 14—17.
- Hu Haichang. Variational principles in elasticity and its applications [M]. Beijing: The Science Press, 1981: 14—17. (in Chinese)
- [9] 付波, 丁圣果, 郑涛, 郑炜. 四角锥系空间桁架的临界荷载[J]. 贵州大学学报, 2009, 26(5): 101—104.
- Fu Bo, Ding Shengguo, Zheng Tao, Zheng Wei. The critical load of pyramidal space truss [J]. Journal of Guizhou University, 2009, 26(5): 101—104. (in Chinese)
- [10] 刘涛, 杨凤鹏. 精通 ANSYS[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 185—186.
- Liu Tao, Yang Fengpeng. Proficient in ANSYS [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 185—186. (in Chinese)
- [11] 洪庆章, 刘清吉, 郭嘉源. ANSYS 教学范例[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002: 100—118.
- Hong Qingzhang, Liu Qingji, Guo Jiayuan. Teaching example of ansys [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2002: 100—118. (in Chinese)
- [12] 张文福, 刘迎春. 钢桁架拱结构固有振动分析[J]. 空间结构, 2006, 12(4): 55—57.
- Zhang Wenfu, Liu Yingchun. Natural vibration analysis of steel truss arch structures [J]. Spatial Structure, 2006, 12(4): 55—57. (in Chinese)

(上接第 98 页)

- [16] 尹世平, 徐世焯. 钢筋与纤维编织网联合增强细粒混凝土梁的弯曲试验与理论研究[J]. 工程力学, 2011, 28(1): 87—96.
- Yin Shiping, Xu Shilang. Experimental and theoretical investigation on the flexural behavior of fine grained concrete beam reinforced with textile combined steel [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(1): 87—96. (in Chinese)
- [17] 荀勇, 支正东, 张勤. 织物增强混凝土薄板加固钢筋混凝土梁受弯性能试验研究[J]. 建筑结构学报, 2010, 31(3): 70—76.
- Xun Yong, Zhi Zhengdong, Zhang Qin. Experimental research on flexural behavior of reinforced concrete beams strengthened with textile reinforced concrete sheets [J]. Journal of Building Structures, 2010, 31(3): 70—76. (in Chinese)
- [18] 徐世焯, 尹世平. 纤维编织网增强细粒混凝土加固 RC 受弯构件的正截面承载性能研究[J]. 土木工程学报, 2012, 45(1): 1—7.
- Xu Shilang, Yin Shiping. Investigation on the bearing capacity of the normal section of RC flexural component strengthened with textile-reinforced concrete [J]. China Civil Engineering Journal, 2012, 45(1): 1—7. (in Chinese)
- [19] 尹世平. TRC 基本力学性能及其增强钢筋混凝土梁受弯性能研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2010.
- Yin Shiping. Research on TRC mechanical behavior and Flexural Performance of Concrete Beam Reinforced with TRC [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010. (in Chinese)
- [20] GBJ50010-2002, 混凝土结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- GB 50010-2002, Code for design of concrete structure [S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese)